

GL<sub>2</sub> 上の保型形式と  $L$  関数  
第 4 部 *Hecke-Jacquet-Langlands* 理論

今野拓也

takuya@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院数理学研究院

# 第4部のメニュー

---

## 第4部のメニュー

---

- $G(\mathbb{A})$  の既約表現

## 第4部のメニュー

---

- $G(\mathbb{A})$  の既約表現
- Whittaker 模型と重複度一定理

## 第4部のメニュー

---

- $G(\mathbb{A})$  の既約表現
- Whittaker 模型と重複度一定理
- 標準  $L$  関数

## 第4部のメニュー

---

- $G(\mathbb{A})$  の既約表現
- Whittaker 模型と重複度一定理
- 標準  $L$  関数
- Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

## 第4部のメニュー

---

- $G(\mathbb{A})$  の既約表現
- Whittaker 模型と重複度一定理
- 標準  $L$  関数
- Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想
- 逆定理

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現

$F$ ; 代数体とする。(正標数の大域体でも類似の理論が成り立つ。)

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現

$F$ ; 代数体とする。(正標数の大域体でも類似の理論が成り立つ。)

- $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\text{fin}}$ ; アデール環。  $||_{\mathbb{A}}$ ; イデールノルム。  
 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1 \dots$

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現

$F$ ; 代数体とする。(正標数の大域体でも類似の理論が成り立つ。)

- $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\text{fin}}$ ; アデール環。  $||_{\mathbb{A}}$ ; イデールノルム。  
 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1 \dots$
- $G(F_\infty)$ ; 実 Lie 群  $\implies (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$  加群が考えられる。  
ただし、 $\mathfrak{g}_\infty := G(F_\infty)$  の Lie 環  $\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ,  $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$ .

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現

$F$ ; 代数体とする。(正標数の大域体でも類似の理論が成り立つ。)

- $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\text{fin}}$ ; アデール環。  $||_{\mathbb{A}}$ ; イデールノルム。  
 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1 \dots$

- $G(F_\infty)$ ; 実 Lie 群  $\implies (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$  加群が考えられる。

ただし、 $\mathfrak{g}_\infty := G(F_\infty)$  の Lie 環  $\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ,  $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$ .

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 局所コンパクト完全不連結群。

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 :=  $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  の滑らかな表現。

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現

$F$ ; 代数体とする。(正標数の大域体でも類似の理論が成り立つ。)

- $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\text{fin}}$ ; アデール環。  $||_{\mathbb{A}}$ ; イデールノルム。  
 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1 \dots$

- $G(F_\infty)$ ; 実 Lie 群  $\implies (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$  加群が考えられる。

ただし、 $\mathfrak{g}_\infty := G(F_\infty)$  の Lie 環  $\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ,  $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$ .

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 局所コンパクト完全不連結群。

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 :=  $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  の滑らかな表現。

- $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群が考えられる。

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現

$F$ ; 代数体とする。(正標数の大域体でも類似の理論が成り立つ。)

- $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\text{fin}}$ ; アデール環。  $||_{\mathbb{A}}$ ; イデールノルム。  
 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1 \dots$

- $G(F_\infty)$ ; 実 Lie 群  $\implies (\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty)$  加群が考えられる。

ただし、 $\mathfrak{g}_\infty := G(F_\infty)$  の Lie 環  $\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{K}_\infty := \prod_{v|\infty} \mathbf{K}_v$ .

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 局所コンパクト完全不連結群。

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 :=  $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  の滑らかな表現。

- $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群が考えられる。

$(\pi, V)$ ;  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群が許容的

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \tau \in \Pi(\mathbf{K}), \quad \dim \text{Hom}_{\mathbf{K}}(\tau, \pi|_{\mathbf{K}}) < +\infty.$$

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (2)

---

制限テンソル積

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (2)

## 制限テンソル積

- $(\pi_v, V_v)_v, (\pi_v \in \text{Irr } G(F_v))$  が**連接族**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S_\pi$ ; アルキメデス素点を全て含む素点の有限集合 s.t.

$\pi_v$  が不分岐:  $V_v^{K_v} \neq 0, \quad \forall v \notin S_\pi.$

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (2)

## 制限テンソル積

- $(\pi_v, V_v)_v, (\pi_v \in \text{Irr } G(F_v))$  が**接続族**  
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S_\pi$ ; アルキメデス素点を全て含む素点の有限集合 s.t.  
 $\pi_v$  が不分岐:  $V_v^{K_v} \neq 0, \quad \forall v \notin S_\pi.$
- $(\pi_v, V_v)_v$ ; 接続族。  $\forall v \notin S_\pi$  で  $\xi_v^0 \neq 0, \in V_v^{K_v}$  を取る。

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (2)

## 制限テンソル積

- $(\pi_v, V_v)_v, (\pi_v \in \text{Irr } G(F_v))$  が**接続族**  
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S_\pi$ ; アルキメデス素点を全て含む素点の有限集合 s.t.  
 $\pi_v$  が不分岐:  $V_v^{K_v} \neq 0, \forall v \notin S_\pi$ .
- $(\pi_v, V_v)_v$ ; 接続族。  $\forall v \notin S_\pi$  で  $\xi_v^0 \neq 0, \in V_v^{K_v}$  を取る。
  - $S \supset S_\pi$  のとき

$$\left( \bigotimes_{v \in S} \pi_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \mathbb{1}_{K_v}, \bigotimes_{v \in S} V_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \xi_v^0 \right)$$

は定義可能な  $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}}(S))$  加群。

$$\prod_{v \neq \infty, \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} K_v$$

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (2)

## 制限テンソル積

- $(\pi_v, V_v)_v, (\pi_v \in \text{Irr } G(F_v))$  が**接続族**  
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S_\pi$ ; アルキメデス素点を全て含む素点の有限集合 s.t.  
 $\pi_v$  が不分岐:  $V_v^{K_v} \neq 0, \quad \forall v \notin S_\pi.$
- $(\pi_v, V_v)_v$ ; 接続族。  $\forall v \notin S_\pi$  で  $\xi_v^0 \neq 0, \in V_v^{K_v}$  を取る。
  - $S \supset S_\pi$  のとき

$$\left( \bigotimes_{v \in S} \pi_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \mathbb{1}_{K_v}, \bigotimes_{v \in S} V_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \xi_v^0 \right)$$

は定義可能な  $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}}(S))$  加群。

$(\pi_v, V_v)_v$  の**制限テンソル積**; 既約  $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群

$$\left( \bigotimes_v \pi_v, \bigotimes_v V_v := \varinjlim_{S \subset S_\pi} \left( \bigotimes_{v \in S} V_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \xi_v^0 \right) \right)$$

が定まる。(同型類は  $\xi_v^0$  の取り方によらない。)

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (3)

命題 4.1.  $\forall \pi$  ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群、 $\exists!$   $(\pi_v)_v$  ; 連接族

$$\text{s.t. } \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v.$$

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (3)

命題 4.1.  $\forall \pi$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群、 $\exists!$   $(\pi_v)_v$ ; 連接族

$$\text{s.t. } \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v.$$

[証明]  $\pi$  は既約  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))$  加群

$G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  の Hecke 環



# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (3)

命題 4.1.  $\forall \pi$  ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群、 $\exists!$   $(\pi_v)_v$  ; 連接族

$$\text{s.t. } \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v.$$

[証明]  $\pi$  は既約  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))$  加群。

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}})) = \varinjlim_S \left( \bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\mathbf{K}_v} \right)$$

□

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (3)

命題 4.1.  $\forall \pi$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群、 $\exists!$   $(\pi_v)_v$ ; 連接族

$$\text{s.t. } \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v.$$

[証明]  $\pi$  は既約  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))$  加群。

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}})) = \varinjlim_S \left( \bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\mathbf{K}_v} \right)$$

□

既約ユニタリ表現に対しても類似の結果が成り立つ。

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ;  $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$  の既約ユニタリ表現の同値類の集合。

# 1. $GL_2(\mathbb{A})$ の既約表現 (3)

命題 4.1.  $\forall \pi$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群、 $\exists!$   $(\pi_v)_v$ ; 連接族

$$\text{s.t. } \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v.$$

[証明]  $\pi$  は既約  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))$  加群。

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\text{fin}})) = \varinjlim_S \left( \bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\mathbf{K}_v} \right)$$

□

既約ユニタリ表現に対しても類似の結果が成り立つ。

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ;  $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$  の既約ユニタリ表現の同値類の集合。

系 4.2.  $\forall (\pi, H) \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ,  $\exists!$   $(\pi_v)_v$ ,  $(\pi_v \in \Pi(G(F_v)))$ ; 連接族

$$\text{s.t. } (\pi, H) \text{ は } \bigotimes_v \pi_v \text{ の完備化。}$$

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}$ .

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}$ .
- $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$  は第 2 部の結果と系 4.2 で記述された。

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}$ .
- $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$  は第 2 部の結果と系 4.2 で記述された。
- あとは  $m(\pi)$  ( $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ) を決定したい。

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}$ .
- $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$  は第 2 部の結果と系 4.2 で記述された。
- あとは  $m(\pi)$  ( $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ) を決定したい。

$$\psi = \bigotimes_v \psi_v : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^1 ; \text{非自明指標。 } \psi_U \left( \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) := \psi(b).$$

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}$ .
- $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$  は第 2 部の結果と系 4.2 で記述された。
- あとは  $m(\pi)$  ( $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ) を決定したい。

$$\psi = \bigotimes_v \psi_v : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^1 ; \text{非自明指標。 } \psi_U \left( \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) := \psi(b).$$

$\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ; 次を満たす  $W : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  の空間。

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}}$ .
- $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$  は第 2 部の結果と系 4.2 で記述された。
- あとは  $m(\pi)$  ( $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ) を決定したい。

$$\psi = \bigotimes_v \psi_v : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^1 ; \text{非自明指標。 } \psi_U \left( \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) := \psi(b).$$

$\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ; 次を満たす  $W : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  の空間。

- $G(F_\infty)$  成分について滑らかで、右  $K$  有限。
- $W(ug) = \psi_U(u)W(g), (u \in U(\mathbb{A}), g \in G(\mathbb{A}))$ ;

## 2. 重複度一定理

- 定理 1.13:  $\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} \pi^{\oplus m(\pi)}}$ .
- $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$  は第 2 部の結果と系 4.2 で記述された。
- あとは  $m(\pi)$  ( $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ ) を決定したい。

$$\psi = \bigotimes_v \psi_v : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^1 ; \text{非自明指標。 } \psi_U \left( \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) := \psi(b).$$

$\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ; 次を満たす  $W : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  の空間。

- $G(F_\infty)$  成分について滑らかで、右  $K$  有限。
- $W(ug) = \psi_U(u)W(g)$ , ( $u \in U(\mathbb{A})$ ,  $g \in G(\mathbb{A})$ );
- アルキメデス素点  $v$  に対して  $r_v \in \mathbb{N}$ ,  $C > 0$  があって、

$$\left| W \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \right| \leq C |a|_v^{r_v}, \quad a \in F_v^\times.$$

## 2. 重複度一定理 (2)

命題 4.4. (i)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 with  
 $\dim \pi_v = \infty, \quad \text{at } \forall v,$

$\exists! \mathcal{W}_\psi(\pi) \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  s.t.  $(R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq (\pi, V)$ , (**Whittaker 模型**).

(ii)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$  with  $\dim \pi_v < \infty, \exists v$  は  $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  の部分表現ではない。

## 2. 重複度一定理 (2)

命題 4.4. (i)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 with  
 $\dim \pi_v = \infty, \quad \text{at } \forall v,$

$\exists! \mathcal{W}_\psi(\pi) \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  s.t.  $(R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq (\pi, V)$ , (**Whittaker 模型**).

(ii)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$  with  $\dim \pi_v < \infty$ ,  $\exists v$  は  $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  の部分表現ではない。

[証明] (i)  $\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ ;  $\pi_v$  の Whittaker 模型。

## 2. 重複度一定理 (2)

命題 4.4. (i)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 with  
 $\dim \pi_v = \infty, \quad \text{at } \forall v,$

$\exists! \mathcal{W}_\psi(\pi) \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  s.t.  $(R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq (\pi, V)$ , (**Whittaker 模型**).

(ii)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$  with  $\dim \pi_v < \infty, \exists v$  は  $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  の部分表現ではない。

[証明] (i)  $\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ ;  $\pi_v$  の Whittaker 模型。

$v \notin S_\pi$  with  $\text{ord} \psi_v = 0, \implies \exists! W_v^0 \in \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$  s.t.  $W_v^0|_{\mathbf{K}_v} = 1$ .

## 2. 重複度一定理 (2)

命題 4.4. (i)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 with  
 $\dim \pi_v = \infty, \quad \text{at } \forall v,$

$\exists! \mathcal{W}_\psi(\pi) \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  s.t.  $(R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq (\pi, V)$ , (**Whittaker 模型**).

(ii)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$  with  $\dim \pi_v < \infty, \exists v$  は  $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  の部分表現ではない。

[証明] (i)  $\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ ;  $\pi_v$  の Whittaker 模型。

$v \notin S_\pi$  with  $\text{ord} \psi_v = 0, \implies \exists! W_v^0 \in \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$  s.t.  $W_v^0|_{\mathbf{K}_v} = 1$ .

$$\mathcal{W}_\psi(\pi) = \bigotimes_v \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) := \varinjlim_{S \supset S_\pi} \left( \bigotimes_{v \in S} \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S} W_v^0 \right).$$

## 2. 重複度一定理 (2)

命題 4.4. (i)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 with  
 $\dim \pi_v = \infty, \quad \text{at } \forall v,$

$\exists! \mathcal{W}_\psi(\pi) \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  s.t.  $(R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq (\pi, V)$ , (**Whittaker 模型**).

(ii)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$  with  $\dim \pi_v < \infty, \exists v$  は  $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  の部分表現ではない。

[証明] (i)  $\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ ;  $\pi_v$  の Whittaker 模型。

$v \notin S_\pi$  with  $\text{ord} \psi_v = 0, \implies \exists! W_v^0 \in \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$  s.t.  $W_v^0|_{\mathbf{K}_v} = 1$ .

$$\mathcal{W}_\psi(\pi) = \bigotimes_v \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) := \varinjlim_{S \supset S_\pi} \left( \bigotimes_{v \in S} \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S} W_v^0 \right).$$

一意性は局所 Whittaker 模型の一意性から従う。

## 2. 重複度一定理 (2)

命題 4.4. (i)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$ ; 既約許容  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群 with  
 $\dim \pi_v = \infty, \quad \text{at } \forall v,$

$\exists! \mathcal{W}_\psi(\pi) \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  s.t.  $(R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq (\pi, V)$ , (**Whittaker 模型**).

(ii)  $(\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, V)$  with  $\dim \pi_v < \infty, \exists v$  は  $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$  の部分表現ではない。

[証明] (i)  $\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ ;  $\pi_v$  の Whittaker 模型。

$v \notin S_\pi$  with  $\text{ord} \psi_v = 0, \implies \exists! W_v^0 \in \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$  s.t.  $W_v^0|_{\mathbf{K}_v} = 1$ .

$$\mathcal{W}_\psi(\pi) = \bigotimes_v \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) := \varinjlim_{S \supset S_\pi} \left( \bigotimes_{v \in S} \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S} W_v^0 \right).$$

一意性は局所 Whittaker 模型の一意性から従う。

(ii)  $\mathcal{W}_\psi(\pi)$  があれば、その  $G(F_v)$  への制限は有限次元表現  $\pi_v$  の Whittaker

模型 (**矛盾!**) □

## 2. 重複度一定理 (3)

---

$$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$$

## 2. 重複度一定理 (3)

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$

- $\mathcal{L}_0(G)_\pi$ ;  $\mathcal{L}_0(G)$  内の  $\pi^{\oplus m(\pi)}$  に同型な部分空間。
- $\mathcal{A}_0(G)_\pi := \mathcal{L}_0(G)_\pi \cap \mathcal{A}_0(G)$ .

## 2. 重複度一定理 (3)

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$

- $\mathcal{L}_0(G)_\pi$ ;  $\mathcal{L}_0(G)$  内の  $\pi^{\oplus m(\pi)}$  に同型な部分空間。
- $\mathcal{A}_0(G)_\pi := \mathcal{L}_0(G)_\pi \cap \mathcal{A}_0(G)$ .

$W_\psi : \mathcal{A}_0(G)_\pi \ni \phi \mapsto W_\psi(\phi) \in \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ;  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  準同型

## 2. 重複度一定理 (3)

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$

- $\mathcal{L}_0(G)_\pi$ ;  $\mathcal{L}_0(G)$  内の  $\pi^{\oplus m(\pi)}$  に同型な部分空間。
- $\mathcal{A}_0(G)_\pi := \mathcal{L}_0(G)_\pi \cap \mathcal{A}_0(G)$ .

$W_\psi : \mathcal{A}_0(G)_\pi \ni \phi \mapsto W_\psi(\phi) \in \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ;  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  準同型

$$W_\psi(\phi; g) := \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug) \overline{\psi_U(u)} du \quad (\psi\text{-Fourier 係数})$$

## 2. 重複度一定理 (3)

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$

- $\mathcal{L}_0(G)_\pi$ ;  $\mathcal{L}_0(G)$  内の  $\pi^{\oplus m(\pi)}$  に同型な部分空間。
- $\mathcal{A}_0(G)_\pi := \mathcal{L}_0(G)_\pi \cap \mathcal{A}_0(G)$ .

$W_\psi : \mathcal{A}_0(G)_\pi \ni \phi \mapsto W_\psi(\phi) \in \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ;  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  準同型

$$W_\psi(\phi; g) := \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug) \overline{\psi_U(u)} du \quad (\psi\text{-Fourier 係数})$$

- しかも、 $\phi(g) = \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ ; Fourier 展開

## 2. 重複度一定理 (3)

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$

- $\mathcal{L}_0(G)_\pi$ ;  $\mathcal{L}_0(G)$  内の  $\pi^{\oplus m(\pi)}$  に同型な部分空間。
- $\mathcal{A}_0(G)_\pi := \mathcal{L}_0(G)_\pi \cap \mathcal{A}_0(G)$ .

$W_\psi : \mathcal{A}_0(G)_\pi \ni \phi \mapsto W_\psi(\phi) \in \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ;  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  準同型

$$W_\psi(\phi; g) := \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug) \overline{\psi_U(u)} du \quad (\psi\text{-Fourier 係数})$$

- しかも、 $\phi(g) = \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ ; Fourier 展開

$\implies W_\psi$  は単射!

## 2. 重複度一定理 (3)

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1) \rightsquigarrow$

- $\mathcal{L}_0(G)_\pi$ ;  $\mathcal{L}_0(G)$  内の  $\pi^{\oplus m(\pi)}$  に同型な部分空間。
- $\mathcal{A}_0(G)_\pi := \mathcal{L}_0(G)_\pi \cap \mathcal{A}_0(G)$ .

$W_\psi : \mathcal{A}_0(G)_\pi \ni \phi \mapsto W_\psi(\phi) \in \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ ;  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  準同型

$$W_\psi(\phi; g) := \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug) \overline{\psi_U(u)} du \quad (\psi\text{-Fourier 係数})$$

- しかも、 $\phi(g) = \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ ; Fourier 展開

$\implies W_\psi$  は単射!

定理 4.5. (i) 各  $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  の  $\mathcal{L}_0(G)$  での重複度は高々1:  $m(\pi) \leq 1$ .

(ii) さらに制限テンソル積分解  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$  が有限次元の  $\pi_v$  を含めば  $m(\pi) = 0$  である。

## 2. 重複度一定理 (4)

---

実はさらに強く次が成り立つ。これは保型形式の整数論への応用上、とても重要な役割を果たす。

## 2. 重複度一定理 (4)

実はさらに強く次が成り立つ。これは保型形式の整数論への応用上、とても重要な役割を果たす。

**定理 4.6. (強重複度一定理)**  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, \pi' \simeq \bigotimes_v \pi'_v \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  が

- $m(\pi) = m(\pi') \neq 0$ ;
- $\exists S$ ; 素点の有限集合 s.t.  $\pi_v \simeq \pi'_v, \forall v \notin S$ .

$\implies \pi \simeq \pi',$  すなわち  $\mathcal{A}_0(G)_\pi = \mathcal{A}_0(G)_{\pi'}$ .

## 2. 重複度一定理 (4)

実はさらに強く次が成り立つ。これは保型形式の整数論への応用上、とても重要な役割を果たす。

定理 4.6. (強重複度一定理)  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, \pi' \simeq \bigotimes_v \pi'_v \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  が

- $m(\pi) = m(\pi') \neq 0$ ;
- $\exists S$ ; 素点の有限集合 s.t.  $\pi_v \simeq \pi'_v, \forall v \notin S$ .

$\implies \pi \simeq \pi',$  すなわち  $\mathcal{A}_0(G)_\pi = \mathcal{A}_0(G)_{\pi'}$ .

- 特に  $\mathcal{A}_0(G)_\pi$  は不分岐素点での Hecke 作用素の作用だけで決まる。

## 2. 重複度一定理 (4)

実はさらに強く次が成り立つ。これは保型形式の整数論への応用上、とても重要な役割を果たす。

定理 4.6. (強重複度一定理)  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, \pi' \simeq \bigotimes_v \pi'_v \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  が

- $m(\pi) = m(\pi') \neq 0$ ;
- $\exists S$ ; 素点の有限集合 s.t.  $\pi_v \simeq \pi'_v, \forall v \notin S$ .

$\implies \pi \simeq \pi',$  すなわち  $\mathcal{A}_0(G)_\pi = \mathcal{A}_0(G)_{\pi'}$ .

- 特に  $\mathcal{A}_0(G)_\pi$  は **不分岐素点での Hecke 作用素** の作用だけで決まる。
- 証明は Casselman と Callahan によるが、 $GL_2 \times GL_2$  の Rankin-Selberg 積  $L$  関数の性質を用いた拡張性のある証明が Jacquet-Shalika により与えられている。

### 3. 標準 $L$ 函数

---

### 3. 標準 $L$ 関数

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  が **カスプ保型表現**  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{A}_0(G)_\pi \neq 0 \iff \mathcal{L}_0(G)_\pi \simeq \pi$ .

### 3. 標準 $L$ 関数

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  が **カスプ保型表現**  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{A}_0(G)_\pi \neq 0 \iff \mathcal{L}_0(G)_\pi \simeq \pi$ .

- カスプ保型表現  $\pi$  といった場合には、同型類だけでなく  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群  $\mathcal{A}_0(G)_\pi$  自体を指す。

### 3. 標準 $L$ 関数

$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  がカスプ保型表現  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{A}_0(G)_\pi \neq 0 \iff \mathcal{L}_0(G)_\pi \simeq \pi$ .

- カスプ保型表現  $\pi$  といった場合には、同型類だけでなく  $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$  加群  $\mathcal{A}_0(G)_\pi$  自体を指す。

定理 4.7.  $\pi$ ; カスプ保型表現。  $\chi = \bigotimes_v \chi_v : \mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ; **イデール類指標**。

(i) Euler 積  $L(s, \pi \times \chi) := \prod_v L(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v)$  は  $\Re s \gg 0$  で絶対収束し、 $s \in \mathbb{C}$  についての**整型関数**に延びる (**標準  $L$  関数**)。

(ii)  $L(s, \pi \times \chi)$  は  $C_1 < \Re s < C_2$ , ( $C_1 < C_2$ ) の形の**縦帯領域**上で有界。

(iii)  $\varepsilon(s, \pi \times \chi) := \prod_v \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v)$ ; 有限積。

- $\varepsilon(s, \pi \times \chi)$  は  $\psi = \bigotimes_v \psi_v$  の取り方によらない。

- **関数等式**

$$L(s, \pi \times \chi) = \varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1 - s, \pi^\vee \times \chi^{-1})$$

が成り立つ。

### 3. 標準 $L$ 関数 (2)

[証明]  $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$  に対する Jacquet-Langlands のゼータ積分を考える。

### 3. 標準 $L$ 関数 (2)

[証明]  $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$  に対する Jacquet-Langlands のゼータ積分を考える。

$$Z(s, \chi, \phi; g) := \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (2)

[証明]  $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$  に対する Jacquet-Langlands のゼータ積分を考える。

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \phi; g) &:= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \end{aligned}$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (2)

[証明]  $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$  に対する Jacquet-Langlands のゼータ積分を考える。

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \phi; g) &:= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \end{aligned}$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (2)

[証明]  $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$  に対する Jacquet-Langlands のゼータ積分を考える。

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \phi; g) &:= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \end{aligned}$$

$\Re s \gg 0$  のとき、 (a)  $W_\psi(\phi) = \bigotimes_{v \in S} W_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} W_v^0$ ;  
(b)  $Z(s, \chi_v, W_v^0, g_v) = L(s, \pi_v \times \chi_v)$ , ( $g_v \in \mathbf{K}_v$ ).

### 3. 標準 $L$ 関数 (2)

[証明]  $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$  に対する Jacquet-Langlands のゼータ積分を考える。

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \phi; g) &:= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times} W_\psi\left(\phi, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times \end{aligned}$$

$\Re s \gg 0$  のとき、(a)  $W_\psi(\phi) = \bigotimes_{v \in S} W_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} W_v^0$ ;

(b)  $Z(s, \chi_v, W_v^0, g_v) = L(s, \pi_v \times \chi_v)$ , ( $g_v \in \mathbf{K}_v$ ).

$$= \prod_{v \in S} Z(s, \chi_v, W_v; g_v) \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v \times \chi_v) \quad (\text{unfolding})$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (3)

- $\Re s \gg 0$  で

$$Z(s, \chi, \phi; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (3)

- $\Re s \gg 0$  で

$$Z(s, \chi, \phi; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

整型、縦帯領域上有界

指数関数に取れる

### 3. 標準 $L$ 関数 (3)

- $\Re s \gg 0$  で

$$Z(s, \chi, \phi; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

整型、縦帯領域上有界

指数関数に取れる

$\implies L(s, \pi \times \chi)$  は整型で縦帯領域上有界。

### 3. 標準 $L$ 関数 (3)

- $\Re s \gg 0$  で

$$Z(s, \chi, \phi; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

整型、縦帯領域上有界

指数関数に取れる

$\implies L(s, \pi \times \chi)$  は整型で縦帯領域上有界。

- $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi \rightsquigarrow \phi^\vee(g) := \omega_\pi(\det g)^{-1} \phi(g) \in \mathcal{A}_0(G)_{\pi^\vee}.$

### 3. 標準 $L$ 関数 (3)

- $\Re s \gg 0$  で

$$Z(s, \chi, \phi; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

整型、縦帯領域上有界
指数関数に取れる

$\implies L(s, \pi \times \chi)$  は整型で縦帯領域上有界。

- $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi \rightsquigarrow \phi^\vee(g) := \omega_\pi(\det g)^{-1} \phi(g) \in \mathcal{A}_0(G)_{\pi^\vee}.$

$$Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg)$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega_\pi(a \det g)^{-1} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} wg\right) \chi^{-1}(a) |a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s} da^\times$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (3)

- $\Re s \gg 0$  で

$$Z(s, \chi, \phi; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

整型、縦帯領域上有界

指数関数に取れる

$\implies L(s, \pi \times \chi)$  は整型で縦帯領域上有界。

- $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi \rightsquigarrow \phi^\vee(g) := \omega_\pi(\det g)^{-1} \phi(g) \in \mathcal{A}_0(G)_{\pi^\vee}.$

$$Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg)$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega_\pi(a \det g)^{-1} \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} wg\right) \chi^{-1}(a) |a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s} da^\times$$

$$= \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g).$$

### 3. 標準 $L$ 関数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

### 3. 標準 $L$ 函数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

$$\omega_\pi(\det g)^{-1} L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} = \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g)$$

### 3. 標準 $L$ 函数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

$$\begin{aligned} \omega_\pi(\det g)^{-1} L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} &= \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g) \\ &= Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg) \end{aligned}$$

### 3. 標準 $L$ 函数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

$$\begin{aligned} \omega_\pi(\det g)^{-1} L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} &= \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g) \\ &= Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg) \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})} \end{aligned}$$

### 3. 標準 $L$ 函数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

$$\begin{aligned} \omega_\pi(\det g)^{-1} L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} &= \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g) \\ &= Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg) \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})} \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \omega_{\pi_v}(\det g_v)^{-1} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \end{aligned}$$

### 3. 標準 $L$ 函数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

$$\begin{aligned} \omega_\pi(\det g)^{-1} L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} &= \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g) \\ &= Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg) \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})} \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \omega_{\pi_v}(\det g_v)^{-1} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \\ &= \omega_\pi(\det g)^{-1} \varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}. \end{aligned}$$

### 3. 標準 $L$ 函数 (4)

$$W_\psi(\phi^\vee) = \bigotimes_v W_v^\vee \text{ として}$$

$$\omega_\pi(\det g)^{-1} L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} = \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(s, \chi, \phi; g)$$

$$= Z(1-s, \chi^{-1}, \phi^\vee; wg)$$

$$= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})}$$

$$= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \omega_{\pi_v}(\det g_v)^{-1} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}$$

$$= \omega_\pi(\det g)^{-1} \varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}.$$

$\implies$  函数等式。

□

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

---

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

---

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

---

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  &  $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \subset K$ .

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  &  $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \subset K$ .

- $p$ ; 素数がレベル  $K$  (または  $\Gamma := K \cap \text{SL}_2(\mathbb{Q})$ ) を割らない ( $p \nmid |\Gamma|$ )

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} K = \mathbf{K}_p \times K^p,$$

$\mathbf{K}_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ ; 極大 cpt. 部分群、 $K^p \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}}^p)$ .

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  &  $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \subset K$ .

- $p$ ; 素数がレベル  $K$  (または  $\Gamma := K \cap \text{SL}_2(\mathbb{Q})$ ) を割らない ( $p \nmid |\Gamma|$ )

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} K = \mathbf{K}_p \times K^p,$$

$\mathbf{K}_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ ; 極大 cpt. 部分群、 $K^p \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}}^p)$ .

- $n \in \mathbb{N}$ ; 素因数が  $\Gamma$  を割らないもの。  $f \in M_k(\Gamma)$ .

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  &  $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \subset K$ .

- $p$ ; 素数がレベル  $K$  (または  $\Gamma := K \cap \text{SL}_2(\mathbb{Q})$ ) を割らない ( $p \nmid |\Gamma|$ )

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} K = \mathbf{K}_p \times K^p,$$

$\mathbf{K}_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ ; 極大 cpt. 部分群、 $K^p \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}}^p)$ .

- $n \in \mathbb{N}$ ; 素因数が  $\Gamma$  を割らないもの。  $f \in M_k(\Gamma)$ .

$$T(n)f(z) := n^{k/2-1} \sum_{i=1}^r f(\alpha_i \cdot z) j(\alpha_i, z)^k \quad (\text{Hecke 作用素})$$

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  &  $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \subset K$ .

- $p$ ; 素数がレベル  $K$  (または  $\Gamma := K \cap \text{SL}_2(\mathbb{Q})$ ) を割らない ( $p \nmid |\Gamma|$ )

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} K = \mathbf{K}_p \times K^p,$$

$\mathbf{K}_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ ; 極大 cpt. 部分群、 $K^p \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}}^p)$ .

- $n \in \mathbb{N}$ ; 素因数が  $\Gamma$  を割らないもの。  $f \in M_k(\Gamma)$ .

$$T(n)f(z) := n^{k/2-1} \sum_{i=1}^r f(\alpha_i \cdot z) j(\alpha_i, z)^k \quad (\text{Hecke 作用素})$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma = \coprod_{i=1}^r \Gamma \alpha_i$$

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

$F = \mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ ; 開コンパクト部分群 s.t.  $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  &  $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \subset K$ .

- $p$ ; 素数がレベル  $K$  (または  $\Gamma := K \cap \text{SL}_2(\mathbb{Q})$ ) を割らない ( $p \nmid |\Gamma|$ )

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} K = \mathbf{K}_p \times K^p,$$

$\mathbf{K}_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ ; 極大 cpt. 部分群、 $K^p \subset G(\mathbb{A}_{\text{fin}}^p)$ .

- $n \in \mathbb{N}$ ; 素因数が  $\Gamma$  を割らないもの。  $f \in M_k(\Gamma)$ .

$$T(n)f(z) := n^{k/2-1} \sum_{i=1}^r f(\alpha_i \cdot z) j(\alpha_i, z)^k \quad (\text{Hecke 作用素})$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma = \coprod_{i=1}^r \Gamma \alpha_i$$

$$j(g, z) := \frac{\sqrt{\det g}}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q}), \det g > 0.$$

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (2)

定理 4.8 (Ramanujan-Petersson 予想、**Deligne** の定理).

$f \in S_k(\Gamma)$  が  $T(p)$ ,  $(p \nmid \Gamma)$  たちの同時固有函数のとき、その固有値  $c(p)$  は  $|c(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$  を満たす。

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (2)

定理 4.8 (Ramanujan-Petersson 予想、Deligne の定理).

$f \in S_k(\Gamma)$  が  $T(p)$ ,  $(p \nmid \Gamma)$  たちの同時固有函数のとき、その固有値  $c(p)$  は  $|c(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$  を満たす。

これをアデール群の言葉で書き直そう。

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (2)

定理 4.8 (Ramanujan-Petersson 予想、Deligne の定理).

$f \in S_k(\Gamma)$  が  $T(p)$ ,  $(p \nmid \Gamma)$  たちの同時固有函数のとき、その固有値  $c(p)$  は  $|c(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$  を満たす。

これをアデル群の言葉で書き直そう。

補題 4.9.  $f \in S_k(\Gamma)$ ,  $p \nmid \Gamma$ .

$$T(p)\phi_f(g) = p^{k/2-1}R(T_p)\phi_f(g) := p^{k/2-1} \int_{\mathbf{K}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathbf{K}_p} \phi_f(gx_p) dx_p.$$

$dx_p$ ;  $G(\mathbb{Q}_p)$  上の不変測度 s.t.  $\text{vol } \mathbf{K}_p = 1$ .

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (2)

定理 4.8 (Ramanujan-Petersson 予想、Deligne の定理).

$f \in S_k(\Gamma)$  が  $T(p)$ ,  $(p \nmid \Gamma)$  たちの同時固有函数のとき、その固有値  $c(p)$  は  $|c(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$  を満たす。

これをアデール群の言葉で書き直そう。

補題 4.9.  $f \in S_k(\Gamma)$ ,  $p \nmid \Gamma$ .

$$T(p)\phi_f(g) = p^{k/2-1}R(T_p)\phi_f(g) := p^{k/2-1} \int_{\mathbf{K}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathbf{K}_p} \phi_f(gx_p) dx_p.$$

$dx_p$ ;  $G(\mathbb{Q}_p)$  上の不変測度 s.t.  $\text{vol } \mathbf{K}_p = 1$ .

- 証明のカギ:  $G(\mathbb{Q})(p^{-1/2}\alpha_i g_\infty \mathbb{R}_+^\times \times K) = G(\mathbb{Q})(g_\infty \mathbb{R}_+^\times \times \alpha_i^{-1} K)$ ;

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (2)

定理 4.8 (Ramanujan-Petersson 予想、Deligne の定理).

$f \in S_k(\Gamma)$  が  $T(p)$ ,  $(p \nmid \Gamma)$  たちの同時固有函数のとき、その固有値  $c(p)$  は  $|c(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$  を満たす。

これをアデル群の言葉で書き直そう。

補題 4.9.  $f \in S_k(\Gamma)$ ,  $p \nmid \Gamma$ .

$$T(p)\phi_f(g) = p^{k/2-1} R(T_p)\phi_f(g) := p^{k/2-1} \int_{\mathbf{K}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathbf{K}_p} \phi_f(gx_p) dx_p.$$

$dx_p$ ;  $G(\mathbb{Q}_p)$  上の不変測度 s.t.  $\text{vol } \mathbf{K}_p = 1$ .

- 証明のカギ:  $G(\mathbb{Q})(p^{-1/2}\alpha_i g_\infty \mathbb{R}_+^\times \times K) = G(\mathbb{Q})(g_\infty \mathbb{R}_+^\times \times \alpha_i^{-1} K)$ ;  
 $\coprod_i \alpha_i^{-1} K = K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} K = p^{-1} K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K, \omega_\pi = 1$ .

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

---

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

---

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

### 一般化された Ramanujan-Petersson 予想

$\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi, \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ; 既約カスプ表現のとき

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

### 一般化された Ramanujan-Petersson 予想

$\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ ,  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ; 既約カスプ表現のとき

- $p \nmid \Gamma \implies \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 不分岐主系列表現。

$$c(p)\phi_f = p^{k/2-1}\pi_p(T_p)\phi_f = p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))\phi_f.$$

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

### 一般化された Ramanujan-Petersson 予想

$\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ ,  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ; 既約カスプ表現 のとき

- $p \nmid \Gamma \implies \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 不分岐主系列表現。

$$c(p)\phi_f = p^{k/2-1}\pi_p(T_p)\phi_f = p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))\phi_f.$$

1. **定理 4.8**  $\iff |\chi_1(p) + \chi_2(p)| \leq 2$ ;

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

### 一般化された Ramanujan-Petersson 予想

$\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ ,  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ; 既約カスプ表現 のとき

- $p \nmid \Gamma \implies \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 不分岐主系列表現。

$$c(p)\phi_f = p^{k/2-1}\pi_p(T_p)\phi_f = p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))\phi_f.$$

1. **定理 4.8**  $\iff |\chi_1(p) + \chi_2(p)| \leq 2$ ;
2.  $\omega_\pi = \mathbb{1} \implies \chi_1(p)\chi_2(p) = 1$ ;
3.  $c(p) \in \mathbb{R} \iff \chi_1(p) + \chi_2(p) \in \mathbb{R}$ .

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

### 一般化された Ramanujan-Petersson 予想

$\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ ,  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ; 既約カスプ表現のとき

- $p \nmid \Gamma \implies \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 不分岐主系列表現。

$$c(p)\phi_f = p^{k/2-1}\pi_p(T_p)\phi_f = p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))\phi_f.$$

1. **定理 4.8**  $\iff |\chi_1(p) + \chi_2(p)| \leq 2$ ;
2.  $\omega_\pi = \mathbb{1} \implies \chi_1(p)\chi_2(p) = 1$ ;
3.  $c(p) \in \mathbb{R} \iff \chi_1(p) + \chi_2(p) \in \mathbb{R}$ .

**定理 4.8**  $\iff |\chi_1(p)| = |\chi_2(p)| = 1 \iff \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 緩増加

## 4. Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想 (3)

- $T(p)$  は Petersson 内積に関して自己随伴。  $\implies c(p) \in \mathbb{R}$  !

### 一般化された Ramanujan-Petersson 予想

$\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ ,  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ; 既約カスプ表現 のとき

- $p \nmid \Gamma \implies \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 不分岐主系列表現。

$$c(p)\phi_f = p^{k/2-1}\pi_p(T_p)\phi_f = p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))\phi_f.$$

1. **定理 4.8**  $\iff |\chi_1(p) + \chi_2(p)| \leq 2$ ;
2.  $\omega_\pi = \mathbb{1} \implies \chi_1(p)\chi_2(p) = 1$ ;
3.  $c(p) \in \mathbb{R} \iff \chi_1(p) + \chi_2(p) \in \mathbb{R}$ .

**定理 4.8**  $\iff |\chi_1(p)| = |\chi_2(p)| = 1 \iff \pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ ; 緩増加

**予想 4.10 (一般 Ramanujan 予想).**  $F$ ; 代数体

$\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ ;  $G(\mathbb{A}_F)$  の既約カスプ表現  $\implies \pi_v$  は緩増加表現  $\forall v$

## 4. 逆定理

$m(\pi) = 1$  となるための必要十分条件を与える。

## 4. 逆定理

$m(\pi) = 1$  となるための必要十分条件を与える。

- 勝手な  $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  に対しても

$$L(s, \pi \times \chi) := \prod_v L(s, \pi_v \times \chi_v), \quad L(s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) := \prod_v L(s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})$$

は  $\Re s \gg 0$  で絶対収束。

### 定理 4.8.

$\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$  with (a)  $\dim \pi_v = \infty$  at  $\forall v$ , (b)  $\omega_\pi|_{F^\times} = \mathbb{1}$ .

$\forall \chi : \mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ; イデール類指標に対して定理 4.6 の主張を満たす :

- (i)  $L(s, \pi \times \chi)$  は整型函数に解析接続される。
- (ii) 任意の縦帯領域上で有界。
- (iii)  $L(s, \pi \times \chi) = \varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1 - s, \pi^\vee \times \chi^{-1})$ ; 函数等式。

$\implies$

$\pi$  はカスプ保型表現である :  $m(\pi) = 1$ .

## 4. 逆定理 (2)

[証明]  $\pi \rightsquigarrow \mathcal{W}_\psi(\pi)$  ; Whittaker 模型。

## 4. 逆定理 (2)

[証明]  $\pi \rightsquigarrow \mathcal{W}_\psi(\pi)$ ; Whittaker 模型。  $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$  に対して

$$\phi_W(g) := \sum_{\xi \in F^\times} W\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

$\implies$

## 4. 逆定理 (2)

[証明]  $\pi \rightsquigarrow \mathcal{W}_\psi(\pi)$ ; Whittaker 模型。  $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$  に対して

$$\phi_W(g) := \sum_{\xi \in F^\times} W\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

$\implies$

- 右辺の和は広義一様絶対収束し、緩増加関数を定める。

## 4. 逆定理 (2)

[証明]  $\pi \rightsquigarrow \mathcal{W}_\psi(\pi)$ ; Whittaker 模型。  $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$  に対して

$$\phi_W(g) := \sum_{\xi \in F^\times} W\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

$\implies$

- 右辺の和は広義一様絶対収束し、緩増加関数を定める。
- $\phi_W : B(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ ; 左  $B(F)$  不変。
- $(\phi_W)_B = 0$ ; 定数項は消えている。

## 4. 逆定理 (2)

[証明]  $\pi \rightsquigarrow \mathcal{W}_\psi(\pi)$ ; Whittaker 模型。  $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$  に対して

$$\phi_W(g) := \sum_{\xi \in F^\times} W\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

$\implies$

- 右辺の和は広義一様絶対収束し、緩増加関数を定める。
- $\phi_W : B(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ ; 左  $B(F)$  不変。
- $(\phi_W)_B = 0$ ; 定数項は消えている。

$\phi_W$  が  $G(F)$  不変 ( $\Leftrightarrow w$  不変) であることが問題。

## 4. 逆定理 (3)

仮定から

$$Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} ; \text{整型函数の等式}$$

## 4. 逆定理 (3)

仮定から

$$Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} ; \text{整型函数の等式}$$

特に  $\Re s \gg 0$  のとき、

## 4. 逆定理 (3)

仮定から

$$Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} ; \text{整型函数の等式}$$

特に  $\Re s \gg 0$  のとき、

$$Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) = L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg_v)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})}$$

## 4. 逆定理 (3)

仮定から

$$Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} ; \text{整型函数の等式}$$

特に  $\Re s \gg 0$  のとき、

$$\begin{aligned} Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg_v)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})} \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \omega_\pi^{-1}(\det g) \prod_{v \in S} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \end{aligned}$$

## 4. 逆定理 (3)

仮定から

$$Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} ; \text{整型函数の等式}$$

特に  $\Re s \gg 0$  のとき、

$$Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) = L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg_v)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})}$$

$$= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \omega_\pi^{-1}(\det g) \prod_{v \in S} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}$$

$$= \omega_\pi^{-1}(\det g) \boxed{L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}}$$

$$Z(s, \chi, W; g)$$

## 4. 逆定理 (3)

仮定から

$$Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} ; \text{整型函数の等式}$$

特に  $\Re s \gg 0$  のとき、

$$\begin{aligned} Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg_v)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})} \\ &= L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \omega_\pi^{-1}(\det g) \prod_{v \in S} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \\ &= \omega_\pi^{-1}(\det g) L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \\ &= \omega_\pi^{-1}(\det g) \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi_W \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times. \end{aligned}$$

## 4. 逆定理 (4)

$\Re s \ll 0$  とする。

## 4. 逆定理 (4)

$\Re s \ll 0$  とする。  $\implies Z(1 - s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg)$  の定義積分は絶対収束。

## 4. 逆定理 (4)

$\Re s \ll 0$  とする。  $\implies Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg)$  の定義積分は絶対収束。

$$\begin{aligned} & \therefore Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) \\ &= \omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi_W \left( w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times. \end{aligned}$$

## 4. 逆定理 (4)

$\Re s \ll 0$  とする。  $\implies Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg)$  の定義積分は絶対収束。

$$\begin{aligned} & \therefore Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) \\ &= \omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi_W \left( w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times. \end{aligned}$$

これらと次の補題から  $\phi_W$  は  $w$  不変。

## 4. 逆定理 (4)

$\Re s \ll 0$  とする。  $\implies Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg)$  の定義積分は絶対収束。

$$\begin{aligned} & \therefore Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) \\ &= \omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi_W \left( w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} da^\times. \end{aligned}$$

これらと次の補題から  $\phi_W$  は  $w$  不変。

補題.  $\varphi_\pm : \rightarrow \mathbb{C}$ ; 連続。

1.  $\exists C > 0$  s.t. Fourier 変換  $\hat{\varphi}_\pm(s)$  は  $\pm \Re s > C$  で絶対収束。
2.  $\hat{\varphi}_\pm(s)$  は任意の縦帯領域で有界な整型函数  $\hat{\varphi}(s)$  に解析接続。

$\implies \varphi_+ = \varphi_-$ .