GL_2 上の保型形式と L 函数

第 2 部 局所体上の GL_2 の表現論

今野拓也

takuya@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院数理学研究院

第 2 部のメニュー

第 2 部のメニュー

- 局所体上の GL_2 の構造

第 2 部のメニュー

- 局所体上の GL_2 の構造
- p 進体上の GL_2 の表現 I

第 2 部のメニュー

- 局所体上の GL_2 の構造
- p 進体上の GL_2 の表現 I
- p 進体上の GL_2 の表現 II

第 2 部のメニュー

- 局所体上の GL_2 の構造
- p 進体上の GL_2 の表現 I
- p 進体上の GL_2 の表現 II
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の表現

1. 局所体上の GL_2 の構造

- F ; 局所体。$|\ |_F$; そのモジュラス。

1. 局所体上の GL_2 の構造

- F ; 局所体。$|\ |_F$; そのモジュラス。
- F が非アルキメデス的な場合にはさらに次の記号を用意しておく。
  - $\mathcal{O} \subset F$; 整数環。
  - $\mathfrak{p} = (\varpi) \subset \mathcal{O}$; 唯一の極大イデアル。
  - $k_F := \mathcal{O}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_q$; 剰余体。
  - $\mathrm{val}_F : F^\times \ni x \mapsto -\log_q |x|_F \in \mathbb{Z}$; 付値。

1. 局所体上の GL_2 の構造

- F ; 局所体。$|\ |_F$; そのモジュラス。
- F が非アルキメデス的な場合にはさらに次の記号を用意しておく。
  - $\mathcal{O} \subset F$; 整数環。
  - $\mathfrak{p} = (\varpi) \subset \mathcal{O}$; 唯一の極大イデアル。
  - $k_F := \mathcal{O}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_q$; 剰余体。
  - $\mathrm{val}_F : F^\times \ni x \mapsto -\log_q |x|_F \in \mathbb{Z}$; 付値。
- $G = \mathrm{GL}_2$, $\boldsymbol{K} := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \\ G(\mathcal{O}) & F \text{ が非アルキメデス的のとき} \end{cases}$

1. 局所体上の GL_2 の構造

- F ; 局所体。$|\ |_F$; そのモジュラス。
- F が非アルキメデス的な場合にはさらに次の記号を用意しておく。
  - $\mathcal{O} \subset F$; 整数環。
  - $\mathfrak{p} = (\varpi) \subset \mathcal{O}$; 唯一の極大イデアル。
  - $k_F := \mathcal{O}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_q$; 剰余体。
  - $\mathrm{val}_F : F^\times \ni x \mapsto -\log_q |x|_F \in \mathbb{Z}$; 付値。
- $G = \mathrm{GL}_2$, $\boldsymbol{K} := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \\ G(\mathcal{O}) & F \text{ が非アルキメデス的のとき} \end{cases}$
  - $G(F) = B(F) \sqcup B(F)wU(F)$ (Bruhat 分解), $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. 局所体上の GL_2 の構造

- F ; 局所体。$|\ |_F$; そのモジュラス。
- F が非アルキメデス的な場合にはさらに次の記号を用意しておく。
  - $\mathcal{O} \subset F$; 整数環。
  - $\mathfrak{p} = (\varpi) \subset \mathcal{O}$; 唯一の極大イデアル。
  - $k_F := \mathcal{O}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_q$; 剰余体。
  - $\mathrm{val}_F : F^\times \ni x \mapsto -\log_q |x|_F \in \mathbb{Z}$; 付値。
- $G = \mathrm{GL}_2$, $\boldsymbol{K} := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \\ G(\mathcal{O}) & F \text{ が非アルキメデス的のとき} \end{cases}$
  - $G(F) = B(F) \sqcup B(F)wU(F)$ (Bruhat 分解), $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $G(F) = B(F)\boldsymbol{K}$ (岩澤分解)。

2. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

2.1. 許容表現

2. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

2.1. 許容表現

G ; 完全不連結局所コンパクト群
(*i.e.*, コンパクト部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。)

2. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

2.1. 許容表現

$\boldsymbol{G}$; 完全不連結局所コンパクト群
(*i.e.*, コンパクト部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。)

- (π, V) が $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. V ; $\mathbb{C}$ 線型空間。$\pi : \boldsymbol{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$; 準同型。
2. $\forall v \in V$, $\mathrm{Stab}(v, \boldsymbol{G}) := \{g \in \boldsymbol{G} \mid \pi(g)v = v\} \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群。

2. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

2.1. 許容表現

$\boldsymbol{G}$; 完全不連結局所コンパクト群
(*i.e.*, コンパクト部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。)

- (π, V) が $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. V ; $\mathbb{C}$ 線型空間。$\pi : \boldsymbol{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$; 準同型。
2. $\forall v \in V$, $\mathrm{Stab}(v, \boldsymbol{G}) := \{g \in \boldsymbol{G} \mid \pi(g)v = v\} \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群。

- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が許容表現

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall K \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群,

$$\dim(V^K := \{v \in V \mid \pi(k)v = v,\ k \in K\}) < \infty.$$

2. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

2.1. 許容表現

$\boldsymbol{G}$; 完全不連結局所コンパクト群
(*i.e.*, コンパクト部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。)

- (π, V) が $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現

  $\overset{\text{def}}{\iff}$

  1. V ; $\mathbb{C}$ 線型空間。$\pi : \boldsymbol{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$; 準同型。
  2. $\forall v \in V$, $\mathrm{Stab}(v, \boldsymbol{G}) := \{g \in \boldsymbol{G} \mid \pi(g)v = v\} \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群。

- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が許容表現

  $\overset{\text{def}}{\iff} \forall K \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群,

$$\dim(V^K := \{v \in V \mid \pi(k)v = v,\ k \in K\}) < \infty.$$

- $V_1 \subset V$ が (π, V) の部分表現 $\overset{\text{def}}{\iff} \pi(g)V_1 \subset V_1$, $(\forall g \in G(\mathbb{A}))$.

2. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

2.1. 許容表現

$\boldsymbol{G}$; 完全不連結局所コンパクト群
(*i.e.*, コンパクト部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。)

- (π, V) が $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  1. V ; $\mathbb{C}$ 線型空間。$\pi : \boldsymbol{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$; 準同型。
  2. $\forall v \in V, \mathrm{Stab}(v, \boldsymbol{G}) := \{g \in \boldsymbol{G} \mid \pi(g)v = v\} \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群。

- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が許容表現

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall K \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群,

  $$\dim(V^K := \{v \in V \mid \pi(k)v = v,\ k \in K\}) < \infty.$$

- $V_1 \subset V$ が (π, V) の部分表現 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi(g)V_1 \subset V_1$, $(\forall g \in G(\mathbb{A}))$.
  そのとき $(\pi, V/V_1)$ は $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現になる (商表現)。

2.1. 許容表現 (2)

- 滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。

2.1. 許容表現 (2)

- 滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。
- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が**既約** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{0\}, V$ 以外に部分表現なし。

2.1. 許容表現 (2)

- 滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。
- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が既約 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{0\}, V$ 以外に部分表現なし。
  $\operatorname{Irr}\boldsymbol{G}$; $\boldsymbol{G}$ の既約許容表現の同型類の集合。

2.1. 許容表現 (2)

- 滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。
- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が既約 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{0\}, V$ 以外に部分表現なし。
  $\mathrm{Irr}\,\boldsymbol{G}$; $\boldsymbol{G}$ の既約許容表現の同型類の集合。
- $\Phi : (\pi, V) \to (\pi', V')$; 線型写像が $\boldsymbol{G}$ 準同型
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Phi \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ \Phi, \quad \forall g \in \boldsymbol{G}.$$

2.1. 許容表現 (2)

- 滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。
- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が既約 $\overset{\text{def}}{\iff} \{0\}, V$ 以外に部分表現なし。

  $\operatorname{Irr}\boldsymbol{G}$; $\boldsymbol{G}$ の既約許容表現の同型類の集合。
- $\Phi : (\pi, V) \to (\pi', V')$; 線型写像が $\boldsymbol{G}$ 準同型

  $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\Phi \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ \Phi, \quad \forall g \in \boldsymbol{G}.$$

- 滑らかな表現は $\boldsymbol{G}$ 準同型の空間 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{G}}(V, V')$ を射の集合とするアーベル圏をなす。許容表現はその充満部分圏となる。

2.1. 許容表現 (2)

- 滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。
- $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が既約 $\overset{\text{def}}{\iff} \{0\}, V$ 以外に部分表現なし。

  $\mathrm{Irr}\,\boldsymbol{G}$; $\boldsymbol{G}$ の既約許容表現の同型類の集合。
- $\Phi : (\pi, V) \to (\pi', V')$; 線型写像が $\boldsymbol{G}$ 準同型

  $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\Phi \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ \Phi, \quad \forall g \in \boldsymbol{G}.$$

- 滑らかな表現は $\boldsymbol{G}$ 準同型の空間 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{G}}(V, V')$ を射の集合とするアーベル圏をなす。許容表現はその充満部分圏となる。

事実 2.2. (Schur の補題) (π, V) ; $\boldsymbol{G}$ の既約で滑らかな表現。

1. $\mathrm{End}_{\boldsymbol{G}}(\pi, V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$.
2. $\exists\, \omega_\pi : Z(\boldsymbol{G}) \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標 (中心指標) s.t.

$$\pi(z) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_V, \quad (\forall z \in Z(\boldsymbol{G})).$$

2.1. 許容表現 (3)

2.1. 許容表現 (3)

- (π, V) ; $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現。

  $\Longrightarrow$

2.1. 許容表現 (3)

- (π, V) ; $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現。

$\Longrightarrow$

  - V^* (双対空間) は

$$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle := \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle, \quad (v^* \in V^*,\, v \in V,\, g \in \boldsymbol{G})$$

で定まる $\boldsymbol{G}$ の表現の構造を持つ (双対表現)。

2.1. 許容表現 (3)

- (π, V) ; $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現。

$\Longrightarrow$

  - V^* (双対空間) は

$$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle := \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle, \quad (v^* \in V^*,\ v \in V,\ g \in \boldsymbol{G})$$

    で定まる $\boldsymbol{G}$ の表現の構造を持つ (双対表現)。
  - $V^\vee := \{v^\vee \in V^* \mid \mathrm{Stab}(v^\vee, \boldsymbol{G}) \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群 $\}$ とすれば、(π^*, V^*) の部分表現 $(\pi^\vee, V^\vee)$ は滑らか ((π, V) の反傾表現)。

2.1. 許容表現 (3)

- (π, V) ; $\boldsymbol{G}$ の滑らかな表現。

  $\Longrightarrow$

  - V^* (双対空間) は

    $$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle := \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle, \quad (v^* \in V^*,\, v \in V,\, g \in \boldsymbol{G})$$

    で定まる $\boldsymbol{G}$ の表現の構造を持つ (双対表現)。
  - $V^\vee := \{v^\vee \in V^* \mid \mathrm{Stab}(v^\vee, \boldsymbol{G}) \subset \boldsymbol{G}$; 開部分群 $\}$ とすれば、(π^*, V^*) の部分表現 $(\pi^\vee, V^\vee)$ は滑らか ((π, V) の反傾表現)。
- (π, V) が許容表現ならば $(V^\vee)^\vee = V$. (一般には $(V^\vee)^\vee \subset V$).

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群

$\boldsymbol{G} = G(F)$ の場合を考える。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群

$\boldsymbol{G} = G(F)$ の場合を考える。

(τ, V) ; $T(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow$ $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導表現

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群

$\boldsymbol{G} = G(F)$ の場合を考える。

(τ, V) ; $T(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow$ $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導表現

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は } G(F) \text{ のある開部分群の} \\ & \text{右移動作用で不変} \end{array} \right\},$$

$$\delta_B : B(F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \left|\frac{a}{d}\right|_F \in \mathbb{R}_+^\times \quad \text{(モジュラス指標)}$$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群

$\boldsymbol{G} = G(F)$ の場合を考える。

(τ, V) ; $T(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow$ $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導表現

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は } G(F) \text{ のある開部分群の} \\ & \text{右移動作用で不変} \end{array} \right\},$$

$$\delta_B : B(F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \left|\frac{a}{d}\right|_F \in \mathbb{R}_+^\times \quad \text{(モジュラス指標)},$$

$$I_B^G(\tau, g)f(x) := f(xg), \quad g \in G(F),\, f \in I_B^G(V).$$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群

$\boldsymbol{G} = G(F)$ の場合を考える。

(τ, V) ; $T(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow$ $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導表現

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は } G(F) \text{ のある開部分群の} \\ & \text{右移動作用で不変} \end{array} \right\},$$

$$\delta_B : B(F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \left|\frac{a}{d}\right|_F \in \mathbb{R}_+^\times \quad \text{(モジュラス指標)},$$

$$I_B^G(\tau, g)f(x) := f(xg), \quad g \in G(F),\, f \in I_B^G(V).$$

- (τ, V) が許容的 $\Longrightarrow$ $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$ も許容的。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群

$\boldsymbol{G} = G(F)$ の場合を考える。

(τ, V) ; $T(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow$ $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導表現

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は } G(F) \text{ のある開部分群の} \\ & \text{右移動作用で不変} \end{array} \right\},$$

$$\delta_B : B(F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \left|\frac{a}{d}\right|_F \in \mathbb{R}_+^\times \quad (\text{モジュラス指標}),$$

$$I_B^G(\tau, g)f(x) := f(xg), \quad g \in G(F),\, f \in I_B^G(V).$$

- (τ, V) が許容的 $\Longrightarrow (I_B^G(\tau), I_B^G(V))$ も許容的。
- $I_B^G(\tau)^\vee \simeq I_B^G(\tau^\vee)$.

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 **2.3.**

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 **2.3.** $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 **2.3.** $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

$$\chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times \text{ ; 擬指標}$$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 **2.3.** $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

$$\chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times \text{ ; 擬指標}$$

$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を一般主系列表現という。 $\square$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 **2.3.** $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

$$\chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times \text{ ; 擬指標}$$

$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を一般主系列表現という。 $\square$

(π, V) ; $G(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow (\pi_B, V_B)$; B に沿っての Jacquet 加群

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 **2.3.** $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

$$\chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times \text{ ; 擬指標}$$

$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を一般主系列表現という。 $\square$

(π, V) ; $G(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow (\pi_B, V_B)$; B に沿っての Jacquet 加群

$$V_B := V/V(U), \quad V(U) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(u)v - v \,|\, u \in U(F)\},$$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 2.3. $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

$$\chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times \text{ ; 擬指標}$$

$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を一般主系列表現という。 $\square$

(π, V) ; $G(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow (\pi_B, V_B)$; B に沿っての Jacquet 加群

$$V_B := V/V(U), \quad V(U) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(u)v - v \mid u \in U(F)\},$$

$$j_B : V \twoheadrightarrow V_B \text{ ; 自然な射影}$$

$$\pi_B(t)j_B(v) := \delta_B(t)^{-1/2} j_B(\pi(t)v), \quad t \in T(F), v \in V.$$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (2)

例 2.3. $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to \mathbb{C}^\times$; 擬指標

$$\chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times \text{ ; 擬指標}$$

$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を一般主系列表現という。 $\square$

(π, V) ; $G(F)$ の滑らかな表現 $\rightsquigarrow (\pi_B, V_B)$; B に沿っての Jacquet 加群

$$V_B := V/V(U), \quad V(U) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(u)v - v \mid u \in U(F)\},$$

$$j_B : V \twoheadrightarrow V_B \text{ ; 自然な射影}$$

$$\pi_B(t) j_B(v) := \delta_B(t)^{-1/2} j_B(\pi(t)v), \quad t \in T(F), v \in V.$$

- Jacquet の補題：
  (π, V) が許容表現 $\Longrightarrow (\pi_B, V_B)$ も $T(F)$ の許容表現。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (3)

補題 2.4. (Frobenius 相互律) π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (3)

補題 2.4. (Frobenius 相互律) π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

超カスプ表現

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (3)

補題 2.4. (Frobenius 相互律) π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

超カスプ表現

- $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) が準カスプ的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} V_B = 0.$

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (3)

補題 2.4. (Frobenius 相互律) π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

超カスプ表現

- $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) が準カスプ的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} V_B = 0$.
- 準カスプ表現 (π, V) が超カスプ表現 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\pi, V)$; 許容的。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (3)

補題 2.4. (Frobenius 相互律) π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

超カスプ表現

- $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) が準カスプ的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} V_B = 0$.
- 準カスプ表現 (π, V) が超カスプ表現 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\pi, V)$; 許容的。

事実 2.5. (i) 長さ有限な準カスプ表現は許容的、特に超カスプ表現になる。
(ii) $G(F)$ の滑らかな表現 (τ, V) が $\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ を既約部分商に持つならば、τ は π を部分表現および商表現に持つ。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (3)

補題 2.4. (Frobenius 相互律) π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

超カスプ表現

- $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) が準カスプ的 $\overset{\text{def}}{\iff} V_B = 0$.
- 準カスプ表現 (π, V) が超カスプ表現 $\overset{\text{def}}{\iff}$ (π, V) ; 許容的。

事実 2.5. (i) 長さ有限な準カスプ表現は許容的、特に超カスプ表現になる。
(ii) $G(F)$ の滑らかな表現 (τ, V) が $\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ を既約部分商に持つならば、τ は π を部分表現および商表現に持つ。

- $\mathrm{Irr}_0\, G(F) \subset \mathrm{Irr}\, G(F)$; 既約超カスプ表現の同型類の集合。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (4)

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (4)

系 **2.6.** $\forall\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \setminus \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ に対し、$\exists\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ があって

$$\pi \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2).$$

特に π は許容表現。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (4)

系 **2.6.** $\forall\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \setminus \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ に対し、$\exists\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ があって

$$\pi \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2).$$

特に π は許容表現。

[証明] 仮定から $\pi_B \neq 0$; 有限生成。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (4)

系 **2.6.** $\forall\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \setminus \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ に対し、$\exists\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ があって

$$\pi \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2).$$

特に π は許容表現。

[証明] 仮定から $\pi_B \neq 0$; 有限生成。 $\Longrightarrow \pi_B \twoheadrightarrow \exists\chi_1 \boxtimes \chi_2$ (Zorn の補題)。

2.2. 放物的誘導と Jacquet 加群 (4)

系 **2.6.** $\forall\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \smallsetminus \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ に対し、$\exists\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ があって

$$\pi \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2).$$

特に π は許容表現。

[証明] 仮定から $\pi_B \neq 0$; 有限生成。 $\Longrightarrow \pi_B \twoheadrightarrow \exists\chi_1 \boxtimes \chi_2$ (Zorn の補題)。 $\Longrightarrow$

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \chi_1 \boxtimes \chi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)).$$

2.3. Weil 表現

2.3. Weil 表現

- E ; F の分離二次拡大 or $E = F \oplus F$. $\mathrm{Aut}_F(E) = \langle\, \sigma \,\rangle$.

2.3. Weil 表現

- E ; F の分離二次拡大 or $E = F \oplus F$. $\mathrm{Aut}_F(E) = \langle\, \sigma \,\rangle$.
- $\mathrm{N}_{E/F} : E \ni z \mapsto z\sigma(z) \in F$; 二次形式。

  $\mathrm{O}(E) = \ker \mathrm{N}_{E/F} \rtimes \mathrm{Aut}_F(E)$; 二次空間 $(E, \mathrm{N}_{E/F})$ の直交群。

2.3. Weil 表現

- E ; F の分離二次拡大 or $E = F \oplus F$. $\mathrm{Aut}_F(E) = \langle\, \sigma \,\rangle$.
- $\mathrm{N}_{E/F} : E \ni z \mapsto z\sigma(z) \in F$; 二次形式。

  $\mathrm{O}(E) = \ker \mathrm{N}_{E/F} \rtimes \mathrm{Aut}_F(E)$; 二次空間 $(E, \mathrm{N}_{E/F})$ の直交群。
- $\psi : F \longrightarrow \mathbb{C}^1$; 非自明指標。$\psi_E := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}$.

2.3. Weil 表現

- E ; F の分離二次拡大 or $E = F \oplus F$. $\mathrm{Aut}_F(E) = \langle \sigma \rangle$.
- $\mathrm{N}_{E/F} : E \ni z \mapsto z\sigma(z) \in F$; 二次形式。
  $\mathrm{O}(E) = \ker \mathrm{N}_{E/F} \rtimes \mathrm{Aut}_F(E)$; 二次空間 $(E, \mathrm{N}_{E/F})$ の直交群。
- $\psi : F \to \mathbb{C}^1$; 非自明指標。$\psi_E := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}$.

$\rightsquigarrow (\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現 s.t.

2.3. Weil 表現

- E ; F の分離二次拡大 or $E = F \oplus F$. $\mathrm{Aut}_F(E) = \langle\, \sigma \,\rangle$.
- $\mathrm{N}_{E/F} : E \ni z \mapsto z\sigma(z) \in F$; 二次形式。

  $\mathrm{O}(E) = \ker \mathrm{N}_{E/F} \rtimes \mathrm{Aut}_F(E)$; 二次空間 $(E, \mathrm{N}_{E/F})$ の直交群。
- $\psi : F \to \mathbb{C}^1$; 非自明指標。$\psi_E := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}$.

$\rightsquigarrow$ $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現 s.t.

$$\begin{aligned}
\omega_{E,\psi}(g)\Phi(v) &= \Phi(g^{-1}.v), \quad g \in \mathrm{O}(E),\\
\omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\Phi(v) &= \omega_{E/F}(a)|a|_F \Phi(v.a), \quad a \in F^\times,\\
\omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) &= \psi(b\mathrm{N}_{E/F}(v))\Phi(v), \quad b \in F,\\
\omega_{E,\psi}(w)\Phi(v) &= \lambda(E/F,\psi)\int_E \Phi(v')\psi_E(v\sigma(v'))\,dv'.
\end{aligned} \tag{WR}$$

Langlands の λ 因子 (1 の 4 乗根)

3. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 II

3.1. 超カスプ台

3. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 II

3.1. 超カスプ台

命題 2.8. (i) 一般主系列表現は超カスプ的な部分商を持たない。
(ii) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の長さは高々2 である。
(iii) 次は互いに同値。

(a) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ がある既約部分商を共有する。

(b) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ の組成因子は一致する。

(c) (χ_1, χ_2) と (χ_1', χ_2') は並べ替えを除いて一致する。

3. 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 II

3.1. 超カスプ台

命題 2.8. (i) 一般主系列表現は超カスプ的な部分商を持たない。
(ii) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の長さは高々2 である。
(iii) 次は互いに同値。

(a) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ がある既約部分商を共有する。

(b) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ の組成因子は一致する。

(c) (χ_1, χ_2) と (χ_1', χ_2') は並べ替えを除いて一致する。

- 命題から

$$\operatorname{Irr} G(F) \setminus \operatorname{Irr}_0 G(F) = \coprod_{\substack{[\chi_1, \chi_2]\,;\,\text{multiset} \\ \chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr} F^\times}} \mathrm{JH}\big(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)\big).$$

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 ($a \in F$)

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 ($a \in F$)

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 $(a \in F)$

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

- $\mathcal{W}_\psi(G(F)) := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)} \psi_U$

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 $(a \in F)$

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

- $\mathcal{W}_\psi(G(F)) := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)} \psi_U$; 次を満たす $W : G(F) \to \mathbb{C}$ の空間。
  - $W(ug) = \psi_U(u)W(g), u \in U(F), g \in G(F)$;
  - W はある開コンパクト部分群で右不変。

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 $(a \in F)$

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

- $\mathcal{W}_\psi(G(F)) := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)} \psi_U$; 次を満たす $W : G(F) \to \mathbb{C}$ の空間。
  - $W(ug) = \psi_U(u)W(g), u \in U(F), g \in G(F)$;
  - W はある開コンパクト部分群で右不変。

右移動作用 $R(g)W(x) := W(xg), (g \in G(F), W \in \mathcal{W}_\psi(G(F))$ により $G(F)$ の滑らかな表現になる。

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 $(a \in F)$

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

- $\mathcal{W}_\psi(G(F)) := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)} \psi_U$; 次を満たす $W : G(F) \to \mathbb{C}$ の空間。
  - $W(ug) = \psi_U(u)W(g), u \in U(F), g \in G(F)$;
  - W はある開コンパクト部分群で右不変。

  右移動作用 $R(g)W(x) := W(xg), (g \in G(F), W \in \mathcal{W}_\psi(G(F))$ により $G(F)$ の滑らかな表現になる。

- $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ が非退化 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi \hookrightarrow \mathcal{W}_\psi(G(F))$

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 ($a \in F$)

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

- $\mathcal{W}_\psi(G(F)) := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)} \psi_U$; 次を満たす $W : G(F) \to \mathbb{C}$ の空間。
  - $W(ug) = \psi_U(u)W(g), u \in U(F), g \in G(F);$
  - W はある開コンパクト部分群で右不変。

  右移動作用 $R(g)W(x) := W(xg), (g \in G(F), W \in \mathcal{W}_\psi(G(F))$ により $G(F)$ の滑らかな表現になる。

- $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ が非退化 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi \hookrightarrow \mathcal{W}_\psi(G(F))$

  $\Longleftrightarrow \pi_{U,\psi} := V/V(U,\psi) \neq 0$, ただし

$$V(U,\psi) := \mathrm{span}\{\pi(u)v - \psi_U(u)v \mid u \in U(F), v \in V\}.$$

3.2. Whittaker 模型

- $\psi^a : F \ni x \mapsto \psi(ax) \in \mathbb{C}^1$; 指標 $(a \in F)$

$$\psi_U^a : U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^a(b) \in \mathbb{C}^1.$$

- $\mathcal{W}_\psi(G(F)) := \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)} \psi_U$; 次を満たす $W : G(F) \to \mathbb{C}$ の空間。
  - $W(ug) = \psi_U(u)W(g), u \in U(F), g \in G(F)$;
  - W はある開コンパクト部分群で右不変。

  右移動作用 $R(g)W(x) := W(xg), (g \in G(F), W \in \mathcal{W}_\psi(G(F))$ により $G(F)$ の滑らかな表現になる。

- $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ が非退化 $\overset{\text{def}}{\iff} \pi \hookrightarrow \mathcal{W}_\psi(G(F))$

  $\iff \pi_{U,\psi} := V/V(U,\psi) \neq 0$, ただし

$$V(U,\psi) := \mathrm{span}\{\pi(u)v - \psi_U(u)v \mid u \in U(F), v \in V\}.$$

  π の $\mathcal{W}_\psi(G(F))$ の部分表現としての実現を Whittaker 模型という。

3.3. 非超カスプ既約表現の分類

3.3. 非超カスプ既約表現の分類

定理 2.11. (i) $\mathrm{Irr}\, G(F)$ の超カスプ的でない元は以下の通り ($\chi_i, \chi \in \mathrm{Irr}\, F^{\times}$)。

(a) $\pi(\chi_1, \chi_2) := I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$, ($\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_F^{\pm 1}$, 一般主系列表現)。

(b) $\mathrm{St}(\chi)$; $I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2})$ の唯一の既約部分表現

(中心指標 χ のスペシャル表現)。

(c) $\chi(\det) := \chi \circ \det$ (一次元表現)。

(ii) 上の既約表現のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1)$ だけである。

3.3. 非超カスプ既約表現の分類

定理 2.11. (i) $\mathrm{Irr}\, G(F)$ の超カスプ的でない元は以下の通り ($\chi_i, \chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$)。

(a) $\pi(\chi_1, \chi_2) := I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$, ($\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_F^{\pm 1}$, 一般主系列表現)。

(b) $\mathrm{St}(\chi)$; $I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2})$ の唯一の既約部分表現

(中心指標 χ のスペシャル表現)。

(c) $\chi(\det) := \chi \circ \det$ (一次元表現)。

(ii) 上の既約表現のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1)$ だけである。

- 次は完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{St}(\chi) \longrightarrow I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2}) \longrightarrow \chi(\det) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \chi(\det) \longrightarrow I_B^G(\chi|\ |_F^{-1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{1/2}) \longrightarrow \mathrm{St}(\chi) \longrightarrow 0$$

- $\mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2), I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)) \neq 0.$

3.4. 二面体型表現

E/F ; 分離二次拡大、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$.

3.4. 二面体型表現

E/F ; 分離二次拡大、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$.

- $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現

3.4. 二面体型表現

E/F ; 分離二次拡大、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$.

- $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現
- $\omega_\circ := \omega|_{\mathrm{SO}(E)}$ ($\mathrm{SO}(E) := \ker \mathrm{N}_{E/F} \subset \mathrm{O}(E)$) として

$$\mathcal{S}(E)_{\bar{\omega}_\circ} := \{\Phi \in \mathcal{S}(E) \mid \Phi(gv) = \omega_\circ(g)\Phi(v),\ g \in \mathrm{SO}(E)\}.$$

上の $\mathrm{SL}_2(F)$ の表現 $\pi(\omega_\circ, \psi)$ は既約

3.4. 二面体型表現

E/F ; 分離二次拡大、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$.

- $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現
- $\omega_\circ := \omega|_{\mathrm{SO}(E)}$ ($\mathrm{SO}(E) := \ker \mathrm{N}_{E/F} \subset \mathrm{O}(E)$) として

$$\mathcal{S}(E)_{\bar{\omega}_\circ} := \{\Phi \in \mathcal{S}(E) \,|\, \Phi(gv) = \omega_\circ(g)\Phi(v),\ g \in \mathrm{SO}(E)\}.$$

上の $\mathrm{SL}_2(F)$ の表現 $\pi(\omega_\circ, \psi)$ は既約

$\pi(\omega_\circ, \psi)$ を $G(F)_E := \{g \in G(F) \,|\, \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$ の表現に延長：

$$\pi(\omega, \psi)\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) := \omega(z)|z|_E^{1/2}\Phi(vz), \quad a = \mathrm{N}_{E/F}(z).$$

3.4. 二面体型表現

E/F ; 分離二次拡大、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$.

- $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現
- $\omega_\circ := \omega|_{\mathrm{SO}(E)}$ $(\mathrm{SO}(E) := \ker \mathrm{N}_{E/F} \subset \mathrm{O}(E))$ として

$$\mathcal{S}(E)_{\bar{\omega}_\circ} := \{\Phi \in \mathcal{S}(E) \mid \Phi(gv) = \omega_\circ(g)\Phi(v),\ g \in \mathrm{SO}(E)\}.$$

上の $\mathrm{SL}_2(F)$ の表現 $\pi(\omega_\circ, \psi)$ は既約

$\pi(\omega_\circ, \psi)$ を $G(F)_E := \{g \in G(F) \mid \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$ の表現に延長：

$$\pi(\omega, \psi)\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) := \omega(z)|z|_E^{1/2}\Phi(vz), \quad a = \mathrm{N}_{E/F}(z).$$

- $\pi(\omega) := \mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)} \pi(\omega, \psi)$; $G(F)$ の二面体型表現。

3.4. 二面体型表現

E/F ; 分離二次拡大、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$.

- $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$; $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現
- $\omega_\circ := \omega|_{\mathrm{SO}(E)}$ $(\mathrm{SO}(E) := \ker \mathrm{N}_{E/F} \subset \mathrm{O}(E))$ として

$$\mathcal{S}(E)_{\bar{\omega}_\circ} := \{\Phi \in \mathcal{S}(E) \,|\, \Phi(gv) = \omega_\circ(g)\Phi(v),\ g \in \mathrm{SO}(E)\}.$$

上の $\mathrm{SL}_2(F)$ の表現 $\pi(\omega_\circ, \psi)$ は既約

$\pi(\omega_\circ, \psi)$ を $G(F)_E := \{g \in G(F) \,|\, \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$ の表現に延長：

$$\pi(\omega, \psi)\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) := \omega(z)|z|_E^{1/2}\Phi(vz), \quad a = \mathrm{N}_{E/F}(z).$$

- $\pi(\omega) := \mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)} \pi(\omega, \psi)$; $G(F)$ の二面体型表現。

  局所 Langlands 対応で F の Weil 群 W_F の二面体型表現 $\mathrm{ind}_{W_E}^{W_F} \omega$ に対応することからのネーミング。

3.4. 二面体型表現 (2)

定理 2.12. (i) $\pi(\omega) \in \operatorname{Irr} G(F)$ で、これは ψ によらない。

$$\chi(\det)\pi(\omega) \simeq \pi(\omega(\chi \circ \mathrm{N}_{E/F})), \quad \omega_{\pi(\omega)} = (\omega|_{F^\times})\omega_{E/F}.$$

(ii) $\sigma(\omega) := \omega \circ \sigma \neq \omega \Longrightarrow \pi(\omega)$ は超カスプ表現。

$\sigma(\omega) = \omega \Longrightarrow \exists \chi \in \operatorname{Irr} F^\times$ s.t. $\omega = \chi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, $\pi(\omega) \simeq \pi(\chi, \chi\omega_{E/F})$.

(iii) 二つのデータ (E, ω), (E', ω') に対して

$$\pi(\omega) \simeq \pi(\omega') \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{ind}_{W_E}^{W_F}(\omega) \simeq \operatorname{ind}_{W_{E'}}^{W_F}(\omega').$$

ただし、W_F ; F の Weil 群、$\omega : W_E \xrightarrow[\sim]{\text{相互律射}} E^\times \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}^\times$ と同一視。

3.4. 二面体型表現 (2)

定理 2.12. (i) $\pi(\omega) \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ で、これは ψ によらない。

$$\chi(\det)\pi(\omega) \simeq \pi(\omega(\chi \circ \mathrm{N}_{E/F})), \quad \omega_{\pi(\omega)} = (\omega|_{F^\times})\omega_{E/F}.$$

(ii) $\sigma(\omega) := \omega \circ \sigma \neq \omega \Longrightarrow \pi(\omega)$ は超カスプ表現。

$\sigma(\omega) = \omega \Longrightarrow \exists \chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ s.t. $\omega = \chi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, $\pi(\omega) \simeq \pi(\chi, \chi\omega_{E/F})$.

(iii) 二つのデータ (E, ω), (E', ω') に対して

$$\pi(\omega) \simeq \pi(\omega') \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ind}_{W_E}^{W_F}(\omega) \simeq \mathrm{ind}_{W_{E'}}^{W_F}(\omega').$$

ただし、W_F ; F の Weil 群、$\omega : W_E \xrightarrow[\sim]{\text{相互律射}} E^\times \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}^\times$ と同一視。

(i), (ii) の証明は Jacquet-Langlands だが、(iii) は GL_2 の局所ベースチェンジリフトの詳しい記述

Robert P. Langlands, Base change for $\mathrm{GL}(2)$ (Princeton UP) 1980.

が必要。

3.5. 補足

3.5. 補足

$$\pi \in \operatorname{Irr} G(F) \text{ が不分岐} \overset{\text{def}}{\iff} \pi^{\boldsymbol{K}} \neq 0$$

3.5. 補足

$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ が不分岐 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi^{\boldsymbol{K}} \neq 0 \iff \pi$ は次の２タイプのいずれか。

3.5. 補足

$\pi \in \operatorname{Irr} G(F)$ が不分岐 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi^{\boldsymbol{K}} \neq 0 \iff \pi$ は次の２タイプのいずれか。

- $\pi(\chi_1, \chi_2)$, $(\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr}(F^\times/\mathcal{O}^\times))$:

$$f^0\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} k\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_F^{1/2}, \ (k \in \boldsymbol{K}), \in \pi(\chi_1, \chi_2)^{\boldsymbol{K}}.$$

3.5. 補足

$\pi \in \operatorname{Irr} G(F)$ が不分岐 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi^{\boldsymbol{K}} \neq 0 \Longleftrightarrow \pi$ は次の 2 タイプのいずれか。

- $\pi(\chi_1, \chi_2)$, $(\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr}(F^\times/\mathcal{O}^\times))$:

$$f^0\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} k\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_F^{1/2}, \ (k \in \boldsymbol{K}), \in \pi(\chi_1, \chi_2)^{\boldsymbol{K}}.$$

- $\chi(\det)$, $(\chi \in \operatorname{Irr}(F^\times/\mathcal{O}^\times))$

3.5. 補足 (2)

3.5. 補足 (2)

$G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) がユニタリ化可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$; (半線型) 内積 s.t.

$$(\pi(g)v, \pi(g)v') = (v, v'), \quad g \in G(F), v,\ v' \in V.$$

3.5. 補足 (2)

$G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) がユニタリ化可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$; (半線型) 内積 s.t.

$$(\pi(g)v, \pi(g)v') = (v, v'), \quad g \in G(F), v,\ v' \in V.$$

$\Pi(G(F))$; $G(F)$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。

3.5. 補足 (2)

$G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) がユニタリ化可能
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$; (半線型) 内積 s.t.

$$(\pi(g)v, \pi(g)v') = (v, v'), \quad g \in G(F), v,\ v' \in V.$$

$\Pi(G(F))$; $G(F)$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。

$$\{\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)\ ;\ \text{ユニタリ化可能}\ \} \underset{C^\infty\ \text{部分を取る}\ \longleftarrow}{\xrightarrow{(\ ,\ )\ \text{で完備化}}} \Pi(G(F)) \qquad ;\ \text{全単射}$$

以下この両辺を同一視する。

3.5. 補足 (3)

命題 2.15. $\Pi(G(F))$ は次の 5 タイプの同型類からなる。

緩増加	離散系列	$\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F)$, $(\omega_\pi \in \Pi(F^\times))$
		$\mathrm{St}(\chi)$, $(\chi \in \Pi(F^\times))$
	主系列	$\pi(\chi_1, \chi_2)$, $(\chi_i \in \Pi(F^\times))$
非緩増加		$\chi(\det)$, $(\chi \in \Pi(F^\times))$
	補系列	$\pi(\chi\lvert\,\rvert_F^{s}, \chi\lvert\,\rvert_F^{-s})$, $\begin{pmatrix} \chi \in \Pi(F^\times) \\ 0 < s < 1/2 \end{pmatrix}$

3.5. 補足 (3)

命題 **2.15.** $\Pi(G(F))$ は次の 5 タイプの同型類からなる。

緩増加	離散系列	$\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F), (\omega_\pi \in \Pi(F^\times))$ $\mathrm{St}(\chi), (\chi \in \Pi(F^\times))$
	主系列	$\pi(\chi_1, \chi_2), (\chi_i \in \Pi(F^\times))$
非緩増加		$\chi(\det), (\chi \in \Pi(F^\times))$
	補系列	$\pi(\chi\lvert\,\rvert_F^s, \chi\lvert\,\rvert_F^{-s}), \begin{pmatrix} \chi \in \Pi(F^\times) \\ 0 < s < 1/2 \end{pmatrix}$

$\theta_2 : G(F) \ni \longmapsto \mathrm{Ad}(w)^t g^{-1} = \det g^{-1} \cdot g \in G(F)$; 外部自己同型。

3.5. 補足 (3)

命題 2.15. $\Pi(G(F))$ は次の 5 タイプの同型類からなる。

緩増加	離散系列	$\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F), (\omega_\pi \in \Pi(F^\times))$ $\mathrm{St}(\chi), (\chi \in \Pi(F^\times))$
	主系列	$\pi(\chi_1, \chi_2), (\chi_i \in \Pi(F^\times))$
非緩増加		$\chi(\det), (\chi \in \Pi(F^\times))$
	補系列	$\pi(\chi\lvert\,\rvert_F^s, \chi\lvert\,\rvert_F^{-s}), \begin{pmatrix} \chi \in \Pi(F^\times) \\ 0 < s < 1/2 \end{pmatrix}$

$\theta_2 : G(F) \ni \longmapsto \mathrm{Ad}(w)^t g^{-1} = \det g^{-1} \cdot g \in G(F)$; 外部自己同型。

$\Longrightarrow$

$$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \implies \pi^\vee \simeq \theta_2(\pi) \simeq \omega_\pi(\det)^{-1}\pi.$$

4. アルキメデス的な場合の表現論

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

4. アルキメデス的な場合の表現論

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

- $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $\Longrightarrow G(F)$ は実 Lie 群。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; その Lie 環。$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

4. アルキメデス的な場合の表現論

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

- $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $\Longrightarrow G(F)$ は実 Lie 群。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; その Lie 環。$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
- $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環。$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$; $\boldsymbol{K}$ の Lie 環。

4. アルキメデス的な場合の表現論

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

- $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $\Longrightarrow G(F)$ は実 Lie 群。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; その Lie 環。$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
- $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環。$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$; $\boldsymbol{K}$ の Lie 環。

(π, V) が $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $\pi : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$; $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ 加群構造 on V;
- $\pi : \boldsymbol{K} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$; 局所有限表現。

$$(\textit{i.e.}, \forall v \in V, \dim \operatorname{span}\{\pi(k)v \mid k \in \boldsymbol{K}\} < \infty.)$$

4. アルキメデス的な場合の表現論

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

- $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $\Longrightarrow G(F)$ は実 Lie 群。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; その Lie 環。$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
- $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環。$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$; $\boldsymbol{K}$ の Lie 環。

(π, V) が $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $\pi : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$; $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ 加群構造 on V;
- $\pi : \boldsymbol{K} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$; 局所有限表現。

  (*i.e.*, $\forall v \in V$, $\dim \mathrm{span}\{\pi(k)v \mid k \in \boldsymbol{K}\} < \infty$.)

s.t.

$$\frac{d}{dt}\pi(\exp tX)v\Big|_{t=0} = \pi(X)v, \quad X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{R}},\ v \in V,$$

$$\pi(k) \circ \pi(X) \circ \pi(k^{-1}) = \pi(\mathrm{Ad}(k)X), \quad k \in \boldsymbol{K},\ X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 (2)

- $\mathrm{Irr}\, G(F)$; 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の同型類の集合。

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 (2)

- $\mathrm{Irr}\, G(F)$; 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の同型類の集合。

(π, V) ; $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群がユニタリ化可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$; (半線型) 内積 s.t.

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 (2)

- $\mathrm{Irr}\, G(F)$; 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の同型類の集合。

(π, V) ; $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群がユニタリ化可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$; (半線型) 内積 s.t.

- $(\pi(X)\xi, \xi') = -(\xi, \pi(X)\xi')$, ($X \in \mathfrak{g}, \xi, \xi' \in V$);
- $(\pi(k)\xi, \xi') = (\xi, \pi(k^{-1})\xi')$, ($k \in \boldsymbol{K}, \xi, \xi' \in V$).

4.1. $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 (2)

- $\mathrm{Irr}\, G(F)$; 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の同型類の集合。

(π, V) ; $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群がユニタリ化可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$; (半線型) 内積 s.t.

- $(\pi(X)\xi, \xi') = -(\xi, \pi(X)\xi')$, ($X \in \mathfrak{g}, \xi, \xi' \in V$);
- $(\pi(k)\xi, \xi') = (\xi, \pi(k^{-1})\xi')$, ($k \in \boldsymbol{K}, \xi, \xi' \in V$).

$$\{\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F); \text{ユニタリ化可能}\} \;\underset{\boldsymbol{K}\ \text{有限部分}}{\overset{(\ ,\ )\ \text{で完備化}}{\rightleftarrows}}\; \Pi(G(F)) \quad ;\ \text{全単射}$$

以下、この両辺を同一視する。

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類

(τ, V) ; $T(F)$ の有限次元表現

$\rightsquigarrow (I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群：

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類

(τ, V) ; $T(F)$ の有限次元表現

$\rightsquigarrow (I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群：

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は右 } \boldsymbol{K} \text{ 有限} \end{array} \right\}$$

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類

(τ, V) ; $T(F)$ の有限次元表現

$\rightsquigarrow (I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群：

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は右 } \boldsymbol{K} \text{ 有限} \end{array} \right\},$$

$$I_B^G(\tau, X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g \exp tX)\Big|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g},$$

$$I_B^G(\tau, k)\phi(g) := \phi(gk), \quad k \in \boldsymbol{K}.$$

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類

(τ, V) ; $T(F)$ の有限次元表現

$\rightsquigarrow (I_B^G(\tau), I_B^G(V))$; 放物的誘導 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群：

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\, t \in T(F),\, g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は右 } \boldsymbol{K} \text{ 有限} \end{array} \right\},$$

$$I_B^G(\tau, X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g \exp tX)\Big|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g},$$

$$I_B^G(\tau, k)\phi(g) := \phi(gk), \quad k \in \boldsymbol{K}.$$

事実 2.17. (Casselman の部分表現定理)

$$\forall \pi \in \operatorname{Irr} G(F), \exists \chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr} F^\times \text{ s.t. } \pi \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2).$$

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (2)

$F = \mathbb{R}$ の場合

- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \mathrm{span}\{f_n \,|\, n \in \epsilon + 2\mathbb{Z}\}$:

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (2)

$F = \mathbb{R}$ の場合

- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \mathrm{span}\{f_n \mid n \in \epsilon + 2\mathbb{Z}\}$:
  - $\chi_1\chi_2^{-1} = |\ |_{\mathbb{R}}^s \mathrm{sgn}^\epsilon$, ($s \in \mathbb{C}$, $\epsilon = 0$ or 1).
  - $f_n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{R}}^{1/2} e^{in\theta}$.

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (2)

$F = \mathbb{R}$ の場合

- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \mathrm{span}\{f_n \,|\, n \in \epsilon + 2\mathbb{Z}\}$:
  - $\chi_1\chi_2^{-1} = |\,|_{\mathbb{R}}^s \mathrm{sgn}^\epsilon$, ($s \in \mathbb{C}$, $\epsilon = 0$ or 1).
  - $f_n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{R}}^{1/2} e^{in\theta}$.
- $U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $Y := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$.

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (2)

$F = \mathbb{R}$ の場合

- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \mathrm{span}\{f_n \,|\, n \in \epsilon + 2\mathbb{Z}\}$:
  - $\chi_1\chi_2^{-1} = |\ |_{\mathbb{R}}^s \mathrm{sgn}^\epsilon$, ($s \in \mathbb{C}$, $\epsilon = 0$ or 1).
  - $f_n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\dfrac{a}{d}\right|_{\mathbb{R}}^{1/2} e^{in\theta}$.
- $U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $Y := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$.

$\Longrightarrow$

$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, X) f_n = \frac{s+1+n}{2} f_{n+2},$$
$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, Y) f_n = \frac{s+1-n}{2} f_{n-2},$$
$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, U) f_n = in\varphi_n.$$

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (3)

命題 2.18. (i) $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\,|^n \mathrm{sgn}^{n+1}$, ($\forall n \neq 0, \in \mathbb{Z}$) のとき

$$\pi(\chi_1, \chi_2) := I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \text{ は既約。}$$

(ii) $\chi_1\chi_2^{-1} = |\,|^{k-1}\mathrm{sgn}^k$, ($k \geq 2 \in \mathbb{N}$) のとき

$$0 \longrightarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \longrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|^{1/2}\rho_{k-1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|^{1/2}\rho_{k-1} \longrightarrow I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1) \longrightarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \longrightarrow 0$$

- $\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\chi_2(a) = a^{\lambda+(1-k)/2}$, ($a \in \mathbb{R}_+^\times$);
- $\omega_\lambda^{k-1}(z) := (z/\bar{z})^{(k-1)/2}(z\bar{z})^\lambda \rightsquigarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1})$; 既約二面体型表現
- $(\rho_n, S^{n-1}[X, Y])$; $n-1$ 次斉次多項式の空間上の表現：

$$\rho_n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) f(X, Y) := f(aX + cY, bX + dY).$$

(iii) 上のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1)$ のみ。

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類(4)

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (4)

- $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ の中心指標は $|\ |^{2\lambda}\mathrm{sgn}^k$.

  $\pi(\omega_\lambda^{k-1})|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ はウェイト $\pm k$ の離散系列表現の直和。

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (4)

- $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ の中心指標は $|\,|^{2\lambda}\mathrm{sgn}^k$.

  $\pi(\omega_\lambda^{k-1})|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ はウェイト $\pm k$ の離散系列表現の直和。
- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \hookleftarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \hookrightarrow I_B^G(\chi_1\mathrm{sgn} \boxtimes \chi_2\mathrm{sgn})$.

  i.e., 命題 2.8 (iii)の類似は成り立たない。

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (4)

- $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ の中心指標は $|\ |^{2\lambda}\mathrm{sgn}^k$.

  $\pi(\omega_\lambda^{k-1})|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ はウェイト $\pm k$ の離散系列表現の直和。
- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \hookleftarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \hookrightarrow I_B^G(\chi_1\mathrm{sgn} \boxtimes \chi_2\mathrm{sgn})$.

  i.e., 命題 2.8 (iii)の類似は成り立たない。

$F = \mathbb{C}$ の場合

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (4)

- $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ の中心指標は $|\ |^{2\lambda}\mathrm{sgn}^k$.

  $\pi(\omega_\lambda^{k-1})|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ はウェイト $\pm k$ の離散系列表現の直和。
- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \hookleftarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \hookrightarrow I_B^G(\chi_1\mathrm{sgn} \boxtimes \chi_2\mathrm{sgn})$.

  i.e., 命題 2.8 (iii)の類似は成り立たない。

$F = \mathbb{C}$ の場合

- $\mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| \, z\bar{z} + w\bar{w} = 1 \right\} \subset \boldsymbol{K} = \mathrm{U}_2(\mathbb{R})$.

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (4)

- $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ の中心指標は $|\ |^{2\lambda}\mathrm{sgn}^k$.

  $\pi(\omega_\lambda^{k-1})|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ はウェイト $\pm k$ の離散系列表現の直和。

- $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \hookleftarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \hookrightarrow I_B^G(\chi_1\mathrm{sgn} \boxtimes \chi_2\mathrm{sgn})$.

  i.e., 命題 2.8 (iii)の類似は成り立たない。

$F = \mathbb{C}$ の場合

- $\mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| z\bar{z} + w\bar{w} = 1 \right\} \subset \boldsymbol{K} = \mathrm{U}_2(\mathbb{R})$.

$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_n] := \left\{ f \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \middle| \begin{array}{l} \mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) \ni k \mapsto f(gk) \in \mathbb{C} \\ \text{は } \rho_n|_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{R})} \text{ の行列成分} \end{array} \right\}.$$

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (5)

$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \bigoplus_{n \in |k|+1+2\mathbb{N}} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_n].$$

4.2. 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の分類 (5)

$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \bigoplus_{n \in |k|+1+2\mathbb{N}} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_n].$$

命題 2.20. (i) $\chi_1\chi_2^{-1}(z) \neq z^p \bar{z}^q$, $(\forall p,\ q \in \mathbb{Z}, pq > 0)$ のとき

$$\pi(\chi_1, \chi_2) := I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \text{ は既約。}$$

(ii)$\chi_1\chi_2^{-1}(z) = z^p \bar{z}^q$, $(p,\ q \in \mathbb{Z}_{>0})$ のとき

$$0 \longrightarrow \sigma(\chi_1, \chi_2) \longrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|_{\mathbb{C}}^{1/2} \rho_p \otimes \bar{\rho}_q \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|_{\mathbb{C}}^{1/2} \rho_p \otimes \bar{\rho}_q \longrightarrow I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1) \longrightarrow \sigma(\chi_1, \chi_2) \longrightarrow 0.$$

- $\sigma(\chi_1, \chi_2) := \bigoplus_{k \in p+q+1+2\mathbb{N}} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_k]$; 既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群。

(iii) 上のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1)$, $\sigma(\chi_1, \chi_2) \simeq \sigma(\chi_2, \chi_1)$ のみ。

4.3. 既約ユニタリ表現の分類

命題 2.21. (i) $\Pi(G(\mathbb{R}))$ は次の 4 タイプの $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群からなる。

緩増加	離散系列	$\pi(\omega_\lambda^{k-1}), (\lambda \in i\mathbb{R}, k \geq 2, \in \mathbb{Z})$
	主系列	$\pi(\chi_1, \chi_2), (\chi_1, \chi_2 \in \Pi(\mathbb{R}^\times))$
非緩増加		$\chi(\det), (\chi \in \Pi(\mathbb{R}^\times))$
	補系列	$\pi(\chi\lvert\,\rvert_{\mathbb{C}}^{s}, \chi\lvert\,\rvert_{\mathbb{C}}^{-s}), \begin{pmatrix} \chi \in \Pi(\mathbb{R}^\times) \\ 0 < s < 1/2 \end{pmatrix}$

(ii) $\Pi(G(\mathbb{C}))$ は次の $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群からなる。

緩増加	主系列	$\pi(\chi_1, \chi_2), (\chi_1, \chi_2 \in \Pi(\mathbb{C}^\times))$
非緩増加		$\chi(\det), (\chi \in \Pi(\mathbb{C}^\times))$
	補系列	$\pi(\chi\lvert\,\rvert_{\mathbb{C}}^{s}, \chi\lvert\,\rvert_{\mathbb{C}}^{-s}), \begin{pmatrix} \chi \in \Pi(\mathbb{C}^\times) \\ 0 < s < 1/2 \end{pmatrix}$