GL_2 上の保型形式と L 函数
第 1 部 古典的保型形式から保型表現へ

今野拓也

takuya@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院数理学研究院

第 1 部のメニュー

第１部のメニュー

- 楕円保型形式の復習 (群論的構造を中心に)

第 1 部のメニュー

- 楕円保型形式の復習 (群論的構造を中心に)
- 上半平面からアデール群へ

第 1 部のメニュー

- 楕円保型形式の復習 (群論的構造を中心に)
- 上半平面からアデール群へ
- GL_2 のアデール群上の保型形式の定義

第 1 部のメニュー

- 楕円保型形式の復習 (群論的構造を中心に)
- 上半平面からアデール群へ
- GL_2 のアデール群上の保型形式の定義
- Fourier 展開、定数項、カスプ形式

第 1 部のメニュー

- 楕円保型形式の復習 (群論的構造を中心に)
- 上半平面からアデール群へ
- GL_2 のアデール群上の保型形式の定義
- Fourier 展開、定数項、カスプ形式
- Petersson 内積、L^2 保型形式への移行

1. 楕円保型形式

射影直線上の線束

1. 楕円保型形式

射影直線上の線束

$B'(\mathbb{C}) = T'(\mathbb{C})U(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; 上三角 Borel 部分群

$$T'(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^\times \right\}, \ U(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\},$$

1. 楕円保型形式

射影直線上の線束

$B'(\mathbb{C}) = T'(\mathbb{C})U(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; 上三角 Borel 部分群

$$T'(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C}^\times \right\}, \; U(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{C} \right\},$$

$\Longrightarrow$

$$SL_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \ni gU(\mathbb{C}) \longmapsto g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \text{ ; 解析同相}$$

1. 楕円保型形式

射影直線上の線束

$B'(\mathbb{C}) = T'(\mathbb{C})U(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; 上三角 Borel 部分群

$$T'(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^\times \right\}, \ U(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\},$$

$\Longrightarrow$

$$SL_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \ni gU(\mathbb{C}) \longmapsto g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \text{ ; 解析同相}$$

- 行列 g の第 1 列を取る写像。
- $T'(\mathbb{C}) \ni t = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ の右作用 $g \mapsto gt$ は右辺では a 倍！

1. 楕円保型形式

射影直線上の線束

$B'(\mathbb{C}) = T'(\mathbb{C})U(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; 上三角 Borel 部分群

$$T'(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^\times \right\},\ U(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\},$$

$\Longrightarrow$

$$SL_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \ni gU(\mathbb{C}) \longmapsto g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$; 解析同相

$T'(\mathbb{C}) \ni t = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ の右作用 $g \mapsto gt$ は右辺では a 倍だから

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{解析同相}} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{解析同相}} & \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

1. 楕円保型形式 (2)

$\chi_k : T(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$; 有理指標 ($k \in \mathbb{N}$)

1. 楕円保型形式 (2)

$\chi_k : T(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$; 有理指標 ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} L_k :=& \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times_{T'(\mathbb{C}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \\ =& \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}\right) \Big/ (gt, z) \sim (g, \chi_k(t)^{-1} z) \end{aligned}$$

1. 楕円保型形式 (2)

$\chi_k : T(\mathbb{C}) \ni \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \longmapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$; 有理指標 ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} L_k :=& \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times_{T'(\mathbb{C}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \\ =& \Big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}\Big) \Big/ (gt, z) \sim (g, \chi_k(t)^{-1} z) \end{aligned}$$

$L_k \ni (g, z) \longmapsto gB'(\mathbb{C}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 同変線束

1. 楕円保型形式 (2)

$\chi_k : T(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$; 有理指標 ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} L_k :=& \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times_{T'(\mathbb{C}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \\ =& \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}\right) \Big/ (gt, z) \sim (g, \chi_k(t)^{-1} z) \end{aligned}$$

$L_k \ni (g, z) \longmapsto gB'(\mathbb{C}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 同変線束

$\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) = \mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}^- \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$; $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 軌道分解。

$$\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}, \quad \mathfrak{H}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$$

1. 楕円保型形式 (2)

$\chi_k : T(\mathbb{C}) \ni \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \longmapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$; 有理指標 ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} L_k :=& \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times_{T'(\mathbb{C}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \\ =& \big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}\big) \Big/ (gt, z) \sim (g, \chi_k(t)^{-1} z) \end{aligned}$$

$L_k \ni (g, z) \longmapsto gB'(\mathbb{C}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 同変線束

$\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) = \mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}^- \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$; $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 軌道分解。

$$\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z > 0\}, \quad \mathfrak{H}^- := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \ni g\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \longmapsto g.i \in \mathfrak{H} \text{ ; 解析同相}$$

$$L_k|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathfrak{H}$$

1. 楕円保型形式 (2)

$\chi_k : T(\mathbb{C}) \ni \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \longmapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$; 有理指標 ($k \in \mathbb{N}$)

$$L_k := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times_{T'(\mathbb{C}),\chi_k^\vee} \mathbb{C}$$
$$= \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}\right) \Big/ (gt, z) \sim (g, \chi_k(t)^{-1} z)$$

$L_k \ni (g, z) \longmapsto gB'(\mathbb{C}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 同変線束

$\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) = \mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}^- \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$; $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 軌道分解。

$$\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}, \quad \mathfrak{H}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \ni g\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \longmapsto g.i \in \mathfrak{H} \text{ ; 解析同相}$$

$$L_k|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathfrak{H},$$

$$\chi_k : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longmapsto e^{ik\theta} \in \mathbb{C}^1$$

1. 楕円保型形式 (3)

保型線束と保型形式

1. 楕円保型形式 (3)

保型線束と保型形式

$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 第 1 種 Fuchs 群 (余測度有限離散部分群)。

1. 楕円保型形式 (3)

保型線束と保型形式

$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 第 1 種 Fuchs 群 (余測度有限離散部分群)。

$\Longrightarrow$

$X_\Gamma := \left(\Gamma\backslash\mathfrak{H} \simeq \Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\right) \cup \{\Gamma$ のカスプ $\}$; cpt. Riemann 面

1. 楕円保型形式 (3)

保型線束と保型形式

$\mathit{\Gamma} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 第 1 種 Fuchs 群 (余測度有限離散部分群)。

$\Longrightarrow$

$X_{\mathit{\Gamma}} := \left(\mathit{\Gamma}\backslash\mathfrak{H} \simeq \mathit{\Gamma}\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\right) \cup \{\mathit{\Gamma}$ のカスプ $\}$; cpt. Riemann 面

$L_{k,\mathit{\Gamma}} \xrightarrow{\pi} X_{\mathit{\Gamma}}$; $\left(\mathit{\Gamma}\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \to \mathit{\Gamma}\backslash\mathfrak{H}\right)$ の $X_{\mathit{\Gamma}}$ への延長。

ウェイト k の保型線束

1. 楕円保型形式 (3)

保型線束と保型形式

$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 第 1 種 Fuchs 群 (余測度有限離散部分群)。

$\Longrightarrow$

$X_\Gamma := \left(\Gamma\backslash\mathfrak{H} \simeq \Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\right) \cup \{\Gamma$ のカスプ $\}$; cpt. Riemann 面

$L_{k,\Gamma} \xrightarrow{\pi} X_\Gamma$; $\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \to \Gamma\backslash\mathfrak{H}\right)$ の X_Γ への延長。

ウェイト k の保型線束

定義. $\pi : L_{k,\Gamma} \to X_\Gamma$ の正則切断 φ:

$$\varphi : X_\Gamma \to L_{k,\Gamma} \text{ 正則写像 s.t. } \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_{X_\Gamma}$$

をウェイト k, レベル Γ の保型形式という。

1. 楕円保型形式 (4)

古典的な定義との関係

1. 楕円保型形式 (4)

古典的な定義との関係

$p : \mathfrak{H} \twoheadrightarrow \mathit{\Gamma}\backslash\mathfrak{H}$ (自然な射影) による $L_{k,\mathit{\Gamma}} \xrightarrow{\pi} X_{\mathit{\Gamma}}$ の引き戻し

$$p^* L_{k,\mathit{\Gamma}} := \{(z,\ell) \in \mathfrak{H} \times L_{k,\mathit{\Gamma}} \mid p_{\mathit{\Gamma}}(z) = \pi(\ell)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{H}$$

は自明な線束に同型:

1. 楕円保型形式 (4)

古典的な定義との関係

$p : \mathfrak{H} \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ (自然な射影) による $L_{k,\Gamma} \xrightarrow{\pi} X_\Gamma$ の引き戻し

$$p^* L_{k,\Gamma} := \{(z,\ell) \in \mathfrak{H} \times L_{k,\Gamma} \mid p_\Gamma(z) = \pi(\ell)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{H}$$

は自明な線束に同型:

$$i : p^* L_{k,\Gamma} \ni \left(z, \left(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\right)\right) \xmapsto{\sim} (z,u) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$$

1. 楕円保型形式 (4)

古典的な定義との関係

$p : \mathfrak{H} \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ (自然な射影) による $L_{k,\Gamma} \xrightarrow{\pi} X_\Gamma$ の引き戻し

$$p^* L_{k,\Gamma} := \{(z,\ell) \in \mathfrak{H} \times L_{k,\Gamma} \,|\, p_\Gamma(z) = \pi(\ell)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{H}$$

は自明な線束に同型:

$$i : p^* L_{k,\Gamma} \ni \left(z, \left(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\right)\right) \overset{\sim}{\longmapsto} (z,u) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$$

左辺の $\mathfrak{H}$ への $\Gamma \ni \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の作用を右辺に移すと、

$$\gamma.(z,u) = i\left(\gamma.z, \left(\gamma.\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\right)\right) = i\left(\gamma.z, \left(\begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix}, u\right)\right)$$

$$= i\left(\gamma.z, \left(\begin{pmatrix} \gamma.z \\ 1 \end{pmatrix}, (cz+d)^{-k} u\right)\right) = (\gamma.z, j(\gamma,z)^k u)$$

ただし、$j(\gamma,z) := \dfrac{1}{cz+d}$; 保型因子

1. 楕円保型形式 (4)

古典的な定義との関係

$p : \mathfrak{H} \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ (自然な射影) による $L_{k,\Gamma} \xrightarrow{\pi} X_\Gamma$ の引き戻し

$$p^*L_{k,\Gamma} := \{(z,\ell) \in \mathfrak{H} \times L_{k,\Gamma} \mid p_\Gamma(z) = \pi(\ell)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{H}$$

は自明な線束に同型:

$$i : p^*L_{k,\Gamma} \ni \left(z, \left(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\right)\right) \overset{\sim}{\longmapsto} (z,u) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$$

左辺の $\mathfrak{H}$ への $\Gamma \ni \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の作用は右辺では

$$\gamma.(z,u) = (\gamma.z, j(\gamma,z)^k u), \quad j(\gamma,z) := \frac{1}{cz+d}\ ;\text{保型因子}$$

1. 楕円保型形式 (4)

古典的な定義との関係

$p : \mathfrak{H} \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ (自然な射影) による $L_{k,\Gamma} \xrightarrow{\pi} X_\Gamma$ の引き戻し

$$p^* L_{k,\Gamma} := \{(z,\ell) \in \mathfrak{H} \times L_{k,\Gamma} \mid p_\Gamma(z) = \pi(\ell)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{H}$$

は自明な線束に同型:

$$i : p^* L_{k,\Gamma} \ni \left(z, \left(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\right)\right) \overset{\sim}{\longmapsto} (z,u) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$$

左辺の $\mathfrak{H}$ への $\Gamma \ni \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の作用は右辺では

$$\gamma.(z,u) = (\gamma.z, j(\gamma,z)^k u), \quad j(\gamma,z) := \frac{1}{cz+d}\ ;\text{保型因子}$$

$\varphi : \mathfrak{H} \to (p^* L_{k,\Gamma})^\Gamma$; 保型形式に対して、$i(\varphi(z)) = (z, f(z))$ と書けば、

$$\boxed{\varphi : \mathfrak{H} \to p^* L_{k,\Gamma} \text{ が } \Gamma \text{ 不変}} \iff \boxed{f(\gamma.z)j(\gamma,z)^k = f(z),\ \gamma \in \Gamma}$$

2. 両側剰余類空間

$G := \mathrm{GL}_2$. (*i.e.* R に対して $G(R) = \mathbb{M}_2(R)^{\times}$.)

2. 両側剰余類空間

$G := \mathrm{GL}_2$. (*i.e.* R に対して $G(R) = \mathbb{M}_2(R)^\times$.)

$$\mathbb{A}(S) := \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p \quad (S \text{ は素数の有限集合})$$

$$\mathbb{A} := \varinjlim_{S} \mathbb{A}(S) = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \quad (\mathbb{Q} \text{ のアデール環})$$

2. 両側剰余類空間

$G := \mathrm{GL}_2$. (*i.e.* R に対して $G(R) = \mathbb{M}_2(R)^\times$.)

$$\mathbb{A}(S) := \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p \quad (S \text{ は素数の有限集合})$$

$$\mathbb{A} := \varinjlim_{S} \mathbb{A}(S) = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \quad (\mathbb{Q} \text{ のアデール環})$$

$$G(\mathbb{A}(S)) := G(\mathbb{R}) \times \prod_{p \in S} G(\mathbb{Q}_p) \times \prod_{p \notin S} \boldsymbol{K}_p, \quad \boldsymbol{K}_p := G(\mathbb{Z}_p)$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} G(\mathbb{A}(S)) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \quad (\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}} \text{ のアデール群})$$

2. 両側剰余類空間

$G := \mathrm{GL}_2$. (*i.e.* R に対して $G(R) = \mathbb{M}_2(R)^\times$.)

$$\mathbb{A}(S) := \mathbb{R} \times \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p \quad (S \text{ は素数の有限集合})$$

$$\mathbb{A} := \varinjlim_{S} \mathbb{A}(S) = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \quad (\mathbb{Q} \text{ のアデール環})$$

$$G(\mathbb{A}(S)) := G(\mathbb{R}) \times \prod_{p\in S} G(\mathbb{Q}_p) \times \prod_{p\notin S} \boldsymbol{K}_p, \quad \boldsymbol{K}_p := G(\mathbb{Z}_p)$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} G(\mathbb{A}(S)) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \quad (\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}} \text{ のアデール群})$$

$B = TU \subset G$; 上三角 Borel 部分群

2. 両側剰余類空間

$G := \mathrm{GL}_2$. (*i.e.* R に対して $G(R) = \mathbb{M}_2(R)^\times$.)

$$\mathbb{A}(S) := \mathbb{R} \times \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p \quad (S \text{ は素数の有限集合})$$

$$\mathbb{A} := \varinjlim_{S} \mathbb{A}(S) = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \quad (\mathbb{Q} \text{ のアデール環})$$

$$G(\mathbb{A}(S)) := G(\mathbb{R}) \times \prod_{p\in S} G(\mathbb{Q}_p) \times \prod_{p\notin S} \boldsymbol{K}_p, \quad \boldsymbol{K}_p := G(\mathbb{Z}_p)$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} G(\mathbb{A}(S)) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \quad (\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}} \text{ のアデール群})$$

$B = TU \subset G$; 上三角 Borel 部分群
$\boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}} := \prod_{p\ \text{素数}} \boldsymbol{K}_p$, $\boldsymbol{K} := \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}} \subset G(\mathbb{A})$; 極大 cpt. 部分群

2. 両側剰余類空間

$G := \mathrm{GL}_2$. (*i.e.* R に対して $G(R) = \mathbb{M}_2(R)^\times$.)

$$\mathbb{A}(S) := \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p \quad (S \text{ は素数の有限集合})$$

$$\mathbb{A} := \varinjlim_{S} \mathbb{A}(S) = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \quad (\mathbb{Q} \text{ のアデール環})$$

$$G(\mathbb{A}(S)) := G(\mathbb{R}) \times \prod_{p \in S} G(\mathbb{Q}_p) \times \prod_{p \notin S} \boldsymbol{K}_p, \quad \boldsymbol{K}_p := G(\mathbb{Z}_p)$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} G(\mathbb{A}(S)) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \quad (\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}} \text{ のアデール群})$$

$B = TU \subset G$; 上三角 Borel 部分群
$\boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}} := \prod_{p\ \text{素数}} \boldsymbol{K}_p$, $\boldsymbol{K} := \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}} \subset G(\mathbb{A})$; 極大 cpt. 部分群

$$G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A})\boldsymbol{K} \quad (\text{岩澤分解})$$

2. 両側剰余類空間 (2)

命題 1.1. $\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_{p\ \text{素数}} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.

- $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$; 開コンパクト部分群 s.t. $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$.
- $\mathit{\Gamma} := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 対応する数論的部分群。

$\Longrightarrow$

$$\mathit{\Gamma}\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni \mathit{\Gamma} \cdot g \overset{\sim}{\longmapsto} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^{\times} gK \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^{\times}\backslash G(\mathbb{A})/K \quad \text{解析同相}$$

2. 両側剰余類空間 (2)

命題 1.1. $\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_{p\ \text{素数}} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.

- $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$; 開コンパクト部分群 s.t. $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.
- $\mathit{\Gamma} := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 対応する数論的部分群。

$\Longrightarrow$

$$\mathit{\Gamma}\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni \mathit{\Gamma} \cdot g \overset{\sim}{\longmapsto} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})/K \quad \text{解析同相}$$

[証明] 全射性だけが問題。それは次の２点から従う。

2. 両側剰余類空間 (2)

命題 1.1. $\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_{p\ \text{素数}} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.

- $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$; 開コンパクト部分群 s.t. $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.
- $\mathit{\Gamma} := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 対応する数論的部分群。

$\Longrightarrow$

$$\mathit{\Gamma}\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni \mathit{\Gamma}\cdot g \stackrel{\sim}{\longmapsto} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K \quad \text{解析同相}$$

[証明] 全射性だけが問題。それは次の 2 点から従う。

- SL_2 は単連結なので強近似定理が成立：

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times (K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))\bigr).$$

2. 両側剰余類空間 (2)

命題 1.1. $\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_{p\text{ 素数}} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.

- $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$; 開コンパクト部分群 s.t. $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.
- $\Gamma := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; 対応する数論的部分群。

$\Longrightarrow$

$$\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni \Gamma \cdot g \overset{\sim}{\longmapsto} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K \quad \text{解析同相}$$

[証明] 全射性だけが問題。それは次の 2 点から従う。

- SL_2 は単連結なので強近似定理が成立：

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times (K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))\big).$$

- 仮定から $G(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})\Big(\begin{pmatrix} \mathbb{R}^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K\Big)$ なので

$$G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})\big(\mathbb{R}_+^\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times K\big).$$

2. 両側剰余類空間 (3)

例.

2. 両側剰余類空間 (3)

例. (1) $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$K_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) \,\middle|\, c \in N\widehat{\mathbb{Z}} \right\} \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}),$$

$$\mathit{\Gamma}_0(N) := K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \quad \text{(レベル } N \text{ の Hecke 部分群)}$$

は命題の仮定を満たす: $\mathit{\Gamma}_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K_0(N)$.

2. 両側剰余類空間 (3)

例. (1) $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$K_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) \,\middle|\, c \in N\widehat{\mathbb{Z}} \right\} \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}),$$

$$\Gamma_0(N) := K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \quad (\text{レベル } N \text{ の Hecke 部分群})$$

は命題の仮定を満たす: $\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K_0(N)$.
(2) レベル $N \geq 2$ の主合同部分群 $\Gamma(N)$ に対応する

$$K(N) := \mathbf{1}_2 + N\mathbb{M}_n(\widehat{\mathbb{Z}}) \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$$

は $\det K(N) \subset 1 + N\widehat{\mathbb{Z}}$ となって仮定を満たさない。

2. 両側剰余類空間 (3)

例. (1) $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$K_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) \,\middle|\, c \in N\widehat{\mathbb{Z}} \right\} \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}),$$

$$\mathit{\Gamma}_0(N) := K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \quad (\text{レベル } N \text{ の Hecke 部分群})$$

は命題の仮定を満たす: $\mathit{\Gamma}_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K_0(N)$.

(2) レベル $N \geq 2$ の主合同部分群 $\mathit{\Gamma}(N)$ に対応する

$$K(N) := \mathbf{1}_2 + N\mathbb{M}_n(\widehat{\mathbb{Z}}) \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$$

は $\det K(N) \subset 1 + N\widehat{\mathbb{Z}}$ となって仮定を満たさない。

$$\coprod_{i=1}^{r} \mathit{\Gamma}_i\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\ \sim\ } G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K(N) \quad (\text{有限合併からの解析同相})$$

3. 上半平面から $G(\mathbb{A})$ へ

$\mathcal{A}(G;k,K)$; 次を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間：

3. 上半平面から $G(\mathbb{A})$ へ

$\mathcal{A}(G;k,K)$; 次を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ の空間：

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g), \gamma \in G(\mathbb{Q}), a \in \mathbb{R}_{+}^{\times}$.

3. 上半平面から $G(\mathbb{A})$ へ

$\mathcal{A}(G;k,K)$; 次を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間：

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g), \gamma \in G(\mathbb{Q}), a \in \mathbb{R}_+^\times.$
2. $\phi\left(g, \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) = e^{ik\theta}\phi(g), (h \in K).$

3. 上半平面から $G(\mathbb{A})$ へ

$\mathcal{A}(G;k,K)$; 次を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間：

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g), \gamma \in G(\mathbb{Q}), a \in \mathbb{R}_+^\times$.
2. $\phi\left(g, \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) = e^{ik\theta}\phi(g), (h \in K)$.
3. $\Delta\phi = -\dfrac{k(k-2)}{4}\phi$, ただし

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad Y := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

として

$$\Delta := -\frac{1}{2}\left(XY + YX - \frac{U^2}{2}\right)$$

は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の Laplace-Beltrami 作用素。

3. 上半平面から $G(\mathbb{A})$ へ

$\mathcal{A}(G;k,K)$; 次を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間：

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, $a \in \mathbb{R}_+^\times$.
2. $\phi\left(g, \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) = e^{ik\theta}\phi(g)$, $(h \in K)$.
3. $\Delta\phi = -\dfrac{k(k-2)}{4}\phi$, ただし Δ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の Laplace-Beltrami 作用素。
4. ϕ は $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ 上緩増加。

   $\forall \Omega \subset G(\mathbb{A})$; コンパクト集合、$\exists C > 0$, $r \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \le C|a|_\infty^r, \quad \forall g \in \Omega,\ a \ge 1.$$

3.1. 保型形式の $G(\mathbb{A})$ への持ち上げ

命題 1.4. 命題 1.1 の状況で次は定義可能な単射。

$$M_k(\Gamma) \ni f \longmapsto \left(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k \right) \in \mathcal{A}(G;k,K)$$

3.1. 保型形式の $G(\mathbb{A})$ への持ち上げ

命題 1.4. 命題 1.1 の状況で次は定義可能な単射。

$$M_k(\Gamma) \ni f \longmapsto \left(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k \right) \in \mathcal{A}(G;k,K)$$

[証明] $\mathcal{A}(G;k,K)$ の条件 1–4 を確かめる。4 は明らか。

3.1. 保型形式の $G(\mathbb{A})$ への持ち上げ

命題 1.4. 命題 1.1 の状況で次は定義可能な単射。

$$M_k(\varGamma) \ni f \longmapsto \left(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k \right) \in \mathcal{A}(G;k,K)$$

[証明] $\mathcal{A}(G;k,K)$ の条件 1–4 を確かめる。4 は明らか。

1. 保型性から ϕ_f は $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ 上の函数。

3.1. 保型形式の $G(\mathbb{A})$ への持ち上げ

命題 1.4. 命題 1.1 の状況で次は定義可能な単射。

$$M_k(\varGamma) \ni f \longmapsto \left(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k \right) \in \mathcal{A}(G;k,K)$$

[証明] $\mathcal{A}(G;k,K)$ の条件 1–4 を確かめる。4 は明らか。

1. 保型性から ϕ_f は $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ 上の函数。
2. $\phi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = e^{2ki\theta}y^k f(x+yi)$ から。

3.1. 保型形式の $G(\mathbb{A})$ への持ち上げ

命題 1.4. 命題 1.1 の状況で次は定義可能な単射。

$$M_k(\varGamma) \ni f \longmapsto \left(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k \right) \in \mathcal{A}(G;k,K)$$

[証明] $\mathcal{A}(G;k,K)$ の条件 1–4 を確かめる。4 は明らか。

1. 保型性から ϕ_f は $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ 上の函数。

2. $\phi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = e^{2ki\theta}y^k f(x+yi)$ から。

3. 2. の座標で計算すると

$$\Delta\phi_f(g) = \left(-e^{ik\theta}y^{k/2+2}\Delta + 2kie^{ik\theta}y^{k/2+1}\bar{\partial}\right)f(z) - \frac{k(k-2)}{4}\phi_f(g)$$

上半平面の Laplacian　　Cauchy-Riemann 作用素

3.1. 保型形式の $G(\mathbb{A})$ への持ち上げ

命題 1.4. 命題 1.1 の状況で次は定義可能な単射。

$$M_k(\Gamma) \ni f \longmapsto \left(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k\right) \in \mathcal{A}(G;k,K)$$

[証明] $\mathcal{A}(G;k,K)$ の条件 1–4 を確かめる。4 は明らか。

1. 保型性から ϕ_f は $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ 上の函数。
2. $\phi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = e^{2ki\theta}y^k f(x+yi)$ から。
3. 2. の座標で計算すると

$$\begin{aligned}\Delta\phi_f(g) &= \left(-e^{ik\theta}y^{k/2+2}\Delta + 2kie^{ik\theta}y^{k/2+1}\bar{\partial}\right)f(z) - \frac{k(k-2)}{4}\phi_f(g) \\ &= -\frac{k(k-2)}{4}\phi_f(g)\end{aligned}$$

例 1.5. 正則 Eisenstein 級数

例 1.5. 正則 Eisenstein 級数

$K = \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}, \mathit{\Gamma} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), k \geq 2, \in \mathbb{Z}$ として

$$f_{2k}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) := \left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{k} e^{2ki\theta}, \quad (h \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}})$$

例 1.5. 正則 Eisenstein 級数

$K = \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}, \mathit{\Gamma} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), k \geq 2, \in \mathbb{Z}$ として

$$f_{2k}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) := \left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{k} e^{2ki\theta}, \quad (h \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}),$$

$$E_{2k}(g) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} f_{2k}(\gamma g) \in \mathcal{A}(G, 2k; \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}).$$

例 1.5. 正則 Eisenstein 級数

$K=\boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}, \varGamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), k\geq 2, \in\mathbb{Z}$ として

$$f_{2k}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, h\right)\right) := \left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{k} e^{2ki\theta}, \quad (h\in\boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}),$$

$$E_{2k}(g) := \sum_{\gamma\in B(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} f_{2k}(\gamma g)\in\mathcal{A}(G,2k;\boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}).$$

$g=\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), z:=g.i=x+iy\in\mathfrak{H}$ として

例 1.5. 正則 Eisenstein 級数

$K = \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}, \mathit{\Gamma} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), k \geq 2, \in \mathbb{Z}$ として

$$f_{2k}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) := \left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{k} e^{2ki\theta}, \quad (h \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}),$$

$$E_{2k}(g) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} f_{2k}(\gamma g) \in \mathcal{A}(G, 2k; \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}).$$

$g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), z := g.i = x + iy \in \mathfrak{H}$ として

$$\begin{aligned} f_{2k}(g) =& y^k e^{2ki\theta} = j\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, i\right)^{2k} j\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, i\right)^{2k} \\ =& j(g, i)^{2k} \end{aligned}$$

例 1.5. 正則 Eisenstein 級数

$K = \boldsymbol{K}_{\text{fin}}, \mathit{\Gamma} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), k \geq 2, \in \mathbb{Z}$ として

$$f_{2k}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\right)\right) := \left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{k} e^{2ki\theta}, \quad (h \in \boldsymbol{K}_{\text{fin}}),$$

$$E_{2k}(g) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} f_{2k}(\gamma g) \in \mathcal{A}(G, 2k; \boldsymbol{K}_{\text{fin}}).$$

$g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), z := g.i = x + iy \in \mathfrak{H}$ として

$$f_{2k}(g) = j(g, i)^{2k},$$

$$E_{2k}(g) = \sum_{\gamma \in \mathit{\Gamma}_\infty \backslash \mathit{\Gamma}} (j(\gamma, z) j(g, i))^{2k} = j(g, i)^{2k} G_{2k}(z),$$

$G_{2k}(z) := \displaystyle\sum_{(c,d) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \smallsetminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(cz + d)^{2k}}$ ウェイト $2k$ の正則 Eisenstein 級数

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

$$\mathit{\Gamma}_c := \mathrm{Stab}(c, \mathit{\Gamma}) = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad (\exists h > 0, \in \mathbb{Q}^\times).$$

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

$$\mathit{\Gamma}_c := \mathrm{Stab}(c, \mathit{\Gamma}) = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad (\exists h > 0, \in \mathbb{Q}^{\times}).$$

$f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ はカスプ c で Fourier 展開を持つ。

$$f(\gamma_c.z) j(\gamma_c, z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f, c) e^{2\pi i n z/h}$$

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

$$\mathit{\Gamma}_c := \mathrm{Stab}(c, \mathit{\Gamma}) = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad (\exists h > 0, \in \mathbb{Q}^\times).$$

$f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ はカスプ c で Fourier 展開を持つ。

$$f(\gamma_c.z) j(\gamma_c, z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f, c) e^{2\pi i n z/h}$$

$\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z} \ni (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}) + \mathbb{Z} \longmapsto e^{2\pi i x_\infty} \in \mathbb{C}^1$; 非自明指標。

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

$$\mathit{\Gamma}_c := \mathrm{Stab}(c, \mathit{\Gamma}) = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad (\exists h > 0, \in \mathbb{Q}^\times).$$

$f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ はカスプ c で Fourier 展開を持つ。

$$f(\gamma_c.z)j(\gamma_c, z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f, c) e^{2\pi i n z/h}$$

$\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z} \ni (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}) + \mathbb{Z} \longmapsto e^{2\pi i x_\infty} \in \mathbb{C}^1$; 非自明指標。

- $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の指標は $\psi^\xi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \ni x \longmapsto \psi(\xi x) \in \mathbb{C}^1$, $(\xi \in \mathbb{Q})$ の形。

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

$$\mathit{\Gamma}_c := \mathrm{Stab}(c, \mathit{\Gamma}) = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad (\exists h > 0, \in \mathbb{Q}^\times).$$

$f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ はカスプ c で Fourier 展開を持つ。

$$f(\gamma_c.z)j(\gamma_c, z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f, c)e^{2\pi i n z/h}$$

$\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z} \ni (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}) + \mathbb{Z} \longmapsto e^{2\pi i x_\infty} \in \mathbb{C}^1$; 非自明指標。

- $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の指標は $\psi^\xi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \ni x \longmapsto \psi(\xi x) \in \mathbb{C}^1$, $(\xi \in \mathbb{Q})$ の形。
- $\psi_U^\xi : U(\mathbb{A})/U(\mathbb{Q}) \ni \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \psi^\xi(b) \in \mathbb{C}^1$; 指標

3.2. Fourier 係数

$c = \gamma_c.\infty$, $(\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}))$; $\mathit{\Gamma}$ のカスプ。

$$\mathit{\Gamma}_c := \mathrm{Stab}(c, \mathit{\Gamma}) = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad (\exists h > 0, \in \mathbb{Q}^\times).$$

$f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ はカスプ c で Fourier 展開を持つ。

$$f(\gamma_c.z)j(\gamma_c, z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f, c)e^{2\pi inz/h}$$

$\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z} \ni (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}) + \mathbb{Z} \longmapsto e^{2\pi i x_\infty} \in \mathbb{C}^1$; 非自明指標。

- $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の指標は $\psi^\xi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \ni x \longmapsto \psi(\xi x) \in \mathbb{C}^1$, $(\xi \in \mathbb{Q})$ の形。
- $\psi^\xi_U : U(\mathbb{A})/U(\mathbb{Q}) \ni \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \psi^\xi(b) \in \mathbb{C}^1$; 指標

$N := \gamma_c^{-1} K \gamma_c \cap U(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ として

$$\mathbb{R}/h\mathbb{Z} \ni b \longmapsto U(\mathbb{Q}) \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N \in U(\mathbb{Q}) \backslash U(\mathbb{A})/N \text{ ; 解析同相。}$$

3.2. Fourier 係数 (2)

du ; $U(\mathbb{A})$ 上の不変測度 s.t. $\mathrm{vol}(U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})) = 1$.

$$
\begin{aligned}
a_n(f,c) =& \frac{e^{2\pi ny/h}}{h}\int_0^h f(\gamma_c.(z+b))j(\gamma_c, z+b)^k e^{-2\pi inb/h}\,dx \\
=& \frac{e^{2\pi ny/h}}{h}\int_{\mathbb{R}/h\mathbb{Z}} \phi_f\left(\gamma_c\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)j\left(\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}g, i\right)^{-k}\overline{\psi^{n/h}(b)}\,db \\
=& e^{2\pi ny/h}j(g,i)^{-k}\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})/N}\phi_f(\gamma_c ug)\overline{\psi_U^{n/h}(u)}\,du \\
=& e^{2\pi ny/h}j(g,i)^{-k}\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})}\phi_f(\gamma_c ug)\overline{\psi_U^{n/h}(u)}\,du \\
=& e^{2\pi ny/h}j(g,i)^{-k}\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})}\phi_f(ug)\overline{\psi_U^{n/h}(u)}\,du
\end{aligned}
$$

3.3. カスプ形式

$$\phi_B(g) := a_0(f, c)j(g, i)^k = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\, du \quad (\phi \text{ の定数項})$$

3.3. カスプ形式

$$\phi_B(g) := a_0(f,c)j(g,i)^k = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\,du \quad (\phi \text{ の定数項})$$

- $\phi \in \mathcal{A}(G;k,K)$ がカスプ形式 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\phi_B = 0.$

3.3. カスプ形式

$$\phi_B(g) := a_0(f,c)j(g,i)^k = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\,du \quad (\phi \text{ の定数項})$$

- $\phi \in \mathcal{A}(G;k,K)$ がカスプ形式 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\phi_B = 0$.
- $\mathcal{A}_0(G;k,K)$; ウェイト k, レベル K のカスプ形式の空間。

3.3. カスプ形式

$$\phi_B(g) := a_0(f, c)j(g, i)^k = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\, du \quad (\phi \text{ の定数項})$$

- $\phi \in \mathcal{A}(G; k, K)$ がカスプ形式 $\overset{\text{def}}{\iff} \phi_B = 0.$
- $\mathcal{A}_0(G; k, K)$; ウェイト k, レベル K のカスプ形式の空間。

命題 1.6. $S_k(\mathit{\Gamma})$; ウェイト k、レベル $\mathit{\Gamma}$ のカスプ形式の空間。
命題 2.4 の単射は同型

$$S_k(\mathit{\Gamma}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_0(G; k, K)$$

に制限される。

3.3. カスプ形式

$$\phi_B(g) := a_0(f,c)j(g,i)^k = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\,du \quad (\phi \text{ の定数項})$$

- $\phi \in \mathcal{A}(G;k,K)$ がカスプ形式 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\phi_B = 0$.
- $\mathcal{A}_0(G;k,K)$; ウェイト k, レベル K のカスプ形式の空間。

命題 1.6. $S_k(\mathit{\Gamma})$; ウェイト k、レベル $\mathit{\Gamma}$ のカスプ形式の空間。
命題 2.4 の単射は同型

$$S_k(\mathit{\Gamma}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_0(G;k,K)$$

に制限される。

証明にはこれから概説するスペクトル解析が必要 (都築氏の講演)。

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

F ; 代数体。F_v ; 素点 v での完備化。$|\ |_v$; F_v のモジュラス。

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

F ; 代数体。F_v ; 素点 v での完備化。$|\ |_v$; F_v のモジュラス。

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} F_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \right) \quad (F \text{ のアデール環})$$

F_v の整数環 (v は非アルキメデス)

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

F ; 代数体。F_v ; 素点 v での完備化。$|\ |_v$; F_v のモジュラス。

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} F_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \right) \quad (F \text{ のアデール環})$$

$$= F_\infty \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}},$$

$$F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \text{ ; 有限アデール環}$$

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

F ; 代数体。F_v ; 素点 v での完備化。$|\ |_v$; F_v のモジュラス。

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} F_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \right) \quad (F \text{ のアデール環})$$
$$= F_\infty \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}},$$
$$F_\infty := \prod_{v | \infty} F_v, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \text{ ; 有限アデール環}$$

$\mathbb{A}^\times$; イデール群。$|\ |_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$; イデールノルム。

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

F ; 代数体。F_v ; 素点 v での完備化。$|\ |_v$; F_v のモジュラス。

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} F_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \right) \quad (F\text{ のアデール環})$$
$$= F_\infty \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}},$$

$$F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}\ ;\ \text{有限アデール環}$$

$\mathbb{A}^\times$; イデール群。$|\ |_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$; イデールノルム。
$\mathbb{R}_+^\times \hookrightarrow F_\infty^\times$; 対角埋め込み。その像を $\mathbb{R}_+^\times$ と同一視。$\mathbb{A}^1 := \ker |\ |_{\mathbb{A}}$.

4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.1. 設定

F ; 代数体。F_v ; 素点 v での完備化。$|\ |_v$; F_v のモジュラス。

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} F_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \right) \quad (F \text{ のアデール環})$$

$$= F_\infty \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}},$$

$$F_\infty := \prod_{v | \infty} F_v, \quad \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \text{ ; 有限アデール環}$$

$\mathbb{A}^\times$; イデール群。$|\ |_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$; イデールノルム。
$\mathbb{R}_+^\times \hookrightarrow F_\infty^\times$; 対角埋め込み。その像を $\mathbb{R}_+^\times$ と同一視。$\mathbb{A}^1 := \ker |\ |_{\mathbb{A}}$.
$\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1, \quad F^\times \subset \mathbb{A}^1 \text{ (Artin の積公式)}}$$

4.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造

$G = \mathrm{GL}_2 \supset B = TU$; 以前の通り。

4.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造

$G = \mathrm{GL}_2 \supset B = TU$; 以前の通り。

$$\boldsymbol{K}_v := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t g = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が実のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t \bar{g} = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が複素のとき} \\ \{g \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v) \mid \det g \in \mathcal{O}_v^\times\} & v \text{ が有限のとき} \end{cases}$$

4.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造

$G = \mathrm{GL}_2 \supset B = TU$; 以前の通り。

$$\boldsymbol{K}_v := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t g = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が実のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t \bar{g} = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が複素のとき} \\ \{g \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v) \mid \det g \in \mathcal{O}_v^\times\} & v \text{ が有限のとき} \end{cases}$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} \boldsymbol{K}_v \right) \text{ ; アデール群。}$$

4.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造

$G = \mathrm{GL}_2 \supset B = TU$; 以前の通り。

$$\boldsymbol{K}_v := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t g = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が実のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t \bar{g} = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が複素のとき} \\ \{g \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v) \mid \det g \in \mathcal{O}_v^\times\} & v \text{ が有限のとき} \end{cases}$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} \boldsymbol{K}_v \right) ; \text{アデール群。}$$

$\boldsymbol{K} := \prod_v \boldsymbol{K}_v \subset G(\mathbb{A})$; 極大コンパクト部分群

4.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造

$G = \mathrm{GL}_2 \supset B = TU$; 以前の通り。

$$\boldsymbol{K}_v := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t g = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が実のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \mid g^t \bar{g} = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が複素のとき} \\ \{g \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v) \mid \det g \in \mathcal{O}_v^\times\} & v \text{ が有限のとき} \end{cases}$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} \boldsymbol{K}_v \right) \text{ ; アデール群。}$$

$\boldsymbol{K} := \prod_v \boldsymbol{K}_v \subset G(\mathbb{A})$; 極大コンパクト部分群

$$T(\mathbb{A})^1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a,\, d \in \mathbb{A}^1 \right\}, \quad \mathfrak{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a,\, d \in \mathbb{R}_+^\times \right\}$$

4.2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造

$G = \mathrm{GL}_2 \supset B = TU$; 以前の通り。

$$\boldsymbol{K}_v := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \,|\, g^t g = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が実のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) = \{g \in G(F_v) \,|\, g^t \bar{g} = \mathbf{1}_2\} & v \text{ が複素のとき} \\ \{g \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v) \,|\, \det g \in \mathcal{O}_v^\times\} & v \text{ が有限のとき} \end{cases}$$

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S} \left(\prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} \boldsymbol{K}_v \right)$$; アデール群。

$\boldsymbol{K} := \prod_v \boldsymbol{K}_v \subset G(\mathbb{A})$; 極大コンパクト部分群

$$T(\mathbb{A})^1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a,\, d \in \mathbb{A}^1 \right\}, \quad \mathfrak{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a,\, d \in \mathbb{R}_+^\times \right\}$$

$\Longrightarrow$

$$G(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A})\mathfrak{A}T(\mathbb{A})^1\boldsymbol{K}, \quad (\text{岩澤分解})$$

4.3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造 (2)

$\left.\begin{array}{l} C_1 \subset \mathbb{A} \\ C_2 \subset \mathbb{A}^1 \end{array}\right.$; コンパクト集合 s.t. $\quad \mathbb{A} = F + C_1, \quad \mathbb{A}^1 = F^\times C_2.$

4.3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造 (2)

$$\left.\begin{matrix} C_1 \subset \mathbb{A} \\ C_2 \subset \mathbb{A}^1 \end{matrix}\right. \ ;\text{コンパクト集合 s.t.} \quad \mathbb{A} = F + C_1, \quad \mathbb{A}^1 = F^\times C_2.$$

$$\Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, b \in C_1 \right\}, \quad \Omega_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle|\, a, d \in C_2 \right\}.$$

4.3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造 (2)

$C_1 \subset \mathbb{A}$
$C_2 \subset \mathbb{A}^1$; コンパクト集合 s.t. $\mathbb{A} = F + C_1, \quad \mathbb{A}^1 = F^\times C_2.$

$$\Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in C_1 \right\}, \quad \Omega_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in C_2 \right\}.$$

$$U(\mathbb{A}) = U(F)\Omega_1, \quad T(\mathbb{A})^1 = T(F)\Omega_2$$

4.3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造 (2)

$C_1 \subset \mathbb{A}$
$C_2 \subset \mathbb{A}^1$; コンパクト集合 s.t. $\mathbb{A} = F + C_1, \quad \mathbb{A}^1 = F^\times C_2.$

$$\Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in C_1 \right\}, \quad \Omega_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in C_2 \right\}.$$

$$U(\mathbb{A}) = U(F)\Omega_1, \quad T(\mathbb{A})^1 = T(F)\Omega_2$$

$t > 0$ に対して $\mathfrak{A}(t) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{A} \, \middle| \, \frac{a}{d} > t \right\}$ とおく。

4.3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の構造 (2)

$\begin{matrix} C_1 \subset \mathbb{A} \\ C_2 \subset \mathbb{A}^1 \end{matrix}$; コンパクト集合 s.t. $\mathbb{A} = F + C_1, \quad \mathbb{A}^1 = F^\times C_2.$

$$\Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in C_1 \right\}, \quad \Omega_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in C_2 \right\}.$$

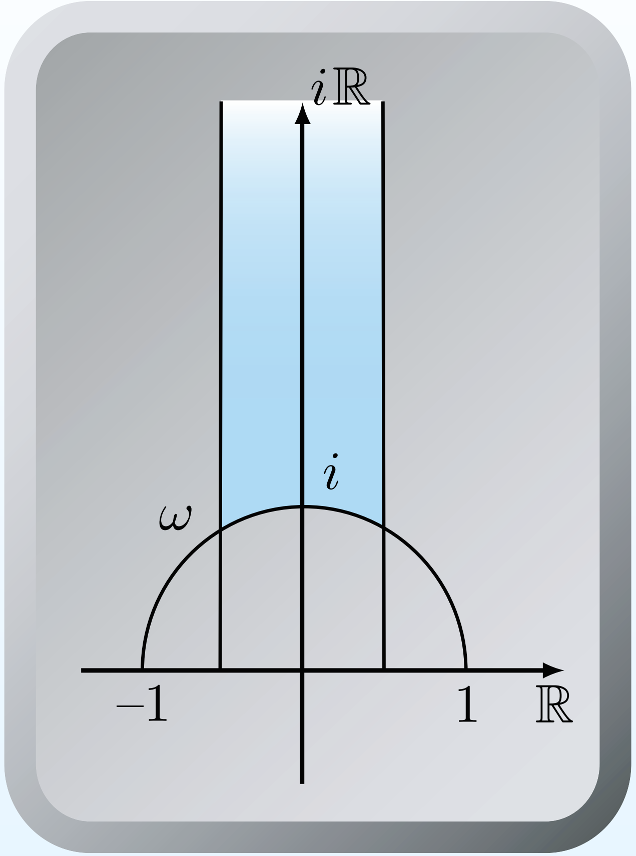
$$U(\mathbb{A}) = U(F)\Omega_1, \quad T(\mathbb{A})^1 = T(F)\Omega_2$$

$t > 0$ に対して $\mathfrak{A}(t) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{A} \middle| \frac{a}{d} > t \right\}$ とおく。

事実 1.7. $t_0 > 0$ を十分小さく取れば、$G(\mathbb{A}) = G(F)\mathfrak{S}(t_0)$. ただし

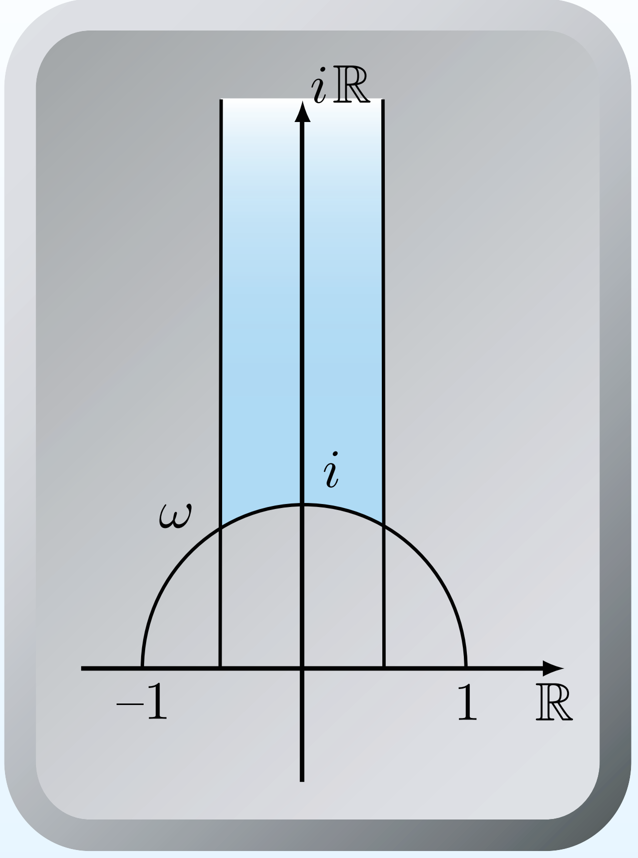
$$\mathfrak{S}(t_0) := \Omega_1\Omega_2\mathfrak{A}(t_0)\boldsymbol{K} \quad \text{(Siegel 領域)}$$

4.3.A. Siegel 領域のイメージ



$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ の基本領域

4.3.A. Siegel 領域のイメージ



$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ の基本領域

- 横幅が有限 $\Longleftrightarrow$ Ω_1 ; cpt.
- 虚部は $> t_0$.

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

$\mathfrak{g}_\infty := \mathbb{M}_2(F_\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; $G(F_\infty)$ の複素 Lie 環

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

$\mathfrak{g}_\infty := \mathbb{M}_2(F_\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; $G(F_\infty)$ の複素 Lie 環

$$\mathfrak{g}_\infty \curvearrowright C^\infty(G(F_\infty)) : \quad R(X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g\exp(tX))\Big|_{t=0}.$$

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

$\mathfrak{g}_\infty := \mathbb{M}_2(F_\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; $G(F_\infty)$ の複素 Lie 環

$$\mathfrak{g}_\infty \curvearrowright C^\infty(G(F_\infty)) : \quad R(X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g\exp(tX))\Big|_{t=0}.$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$; $\mathfrak{g}_\infty$ の普遍包絡環。$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$; $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ の中心。
これらも微分作用素の環として $C^\infty(G(F_\infty))$ に作用。

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

$\mathfrak{g}_\infty := \mathbb{M}_2(F_\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; $G(F_\infty)$ の複素 Lie 環

$$\mathfrak{g}_\infty \curvearrowright C^\infty(G(F_\infty)) : \quad R(X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g\exp(tX))\Big|_{t=0}.$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$; $\mathfrak{g}_\infty$ の普遍包絡環。$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$; $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ の中心。
これらも微分作用素の環として $C^\infty(G(F_\infty))$ に作用。

$$\|g\| := \prod_v \|g_v\|_v, \quad (g = (g_v)_v \in G(\mathbb{A})) \quad \text{(高さ函数)}$$

$$\|g\|_v := \max(|g_{i,j}|_v, |g_{i,j}/\det g|_v), \quad g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} \in G(F_v).$$

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (2)

$\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が**保型形式** (その空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (2)

$\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が保型形式 (その空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, ($\gamma \in G(F)$, $a \in \mathbb{R}_+^\times$).

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (2)

$\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が保型形式 (その空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, ($\gamma \in G(F)$, $a \in \mathbb{R}_+^\times$).
2. ϕ は $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで右 $\boldsymbol{K}$ 有限：

$$\dim \operatorname{span}\{R(k)\phi(\cdot) = \phi(\cdot k) \mid k \in \boldsymbol{K}\} < +\infty.$$

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (2)

$\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が保型形式 (その空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, ($\gamma \in G(F)$, $a \in \mathbb{R}_+^\times$).
2. ϕ は $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで右 $\boldsymbol{K}$ 有限：

$$\dim \operatorname{span}\{R(k)\phi(\cdot) = \phi(\cdot k) \mid k \in \boldsymbol{K}\} < +\infty.$$

3. ϕ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 有限：$\dim \operatorname{span}\{R(X)\phi \mid X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\} < +\infty.$

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (2)

$\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が保型形式 (その空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, ($\gamma \in G(F)$, $a \in \mathbb{R}_+^\times$).
2. ϕ は $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで右 $\boldsymbol{K}$ 有限：

$$\dim \operatorname{span}\{R(k)\phi(\cdot) = \phi(\cdot k) \mid k \in \boldsymbol{K}\} < +\infty.$$

3. ϕ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 有限：$\dim \operatorname{span}\{R(X)\phi \mid X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\} < +\infty.$
4. ϕ は $G(\mathbb{A})$ 上で緩増加：$\exists c, r > 0$ s.t. $|\phi(g)| < c\|g\|^r$, ($g \in G(\mathbb{A})$).

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (2)

$\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が保型形式 (その空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $(\gamma \in G(F),\ a \in \mathbb{R}_+^\times)$.
2. ϕ は $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで右 $\boldsymbol{K}$ 有限：
$$\dim \operatorname{span}\{R(k)\phi(\cdot) = \phi(\cdot k) \mid k \in \boldsymbol{K}\} < +\infty.$$
3. ϕ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 有限：$\dim \operatorname{span}\{R(X)\phi \mid X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\} < +\infty$.
4. ϕ は $G(\mathbb{A})$ 上で緩増加：$\exists c, r > 0$ s.t. $|\phi(g)| < c\|g\|^r$, $(g \in G(\mathbb{A}))$.

保型形式 ϕ がカスプ形式 (その空間を $\mathcal{A}_0(G)$ と書く。)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

5. 定数項 $\phi_B(g) := \displaystyle\int_{F\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx$ が消えている。

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (3)

注意 1.9.

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (3)

注意 **1.9.**

- $\phi \in \mathcal{A}(G)$ は緩増加なだけでなく一様緩増加：

  $\exists r > 0$ s.t.

  $\forall X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty), \exists c_X > 0, |R(X)\phi(g)| \le c_X \|g\|^r, \quad g \in G(\mathbb{A}).$

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (3)

注意 **1.9.**

- $\phi \in \mathcal{A}(G)$ は緩増加なだけでなく一様緩増加：

  $\exists r > 0$ s.t.

  $\forall X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$, $\exists c_X > 0$, $|R(X)\phi(g)| \leq c_X \|g\|^r, \quad g \in G(\mathbb{A})$.

- F が総実体のときには $\mathcal{A}(G)$ は Hilbert 保型形式の空間を含む。

4.4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式 (3)

注意 **1.9.**

- $\phi \in \mathcal{A}(G)$ は緩増加なだけでなく一様緩増加：
  $$\exists r > 0 \text{ s.t.}$$
  $$\forall X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty), \exists c_X > 0, |R(X)\phi(g)| \le c_X \|g\|^r, \quad g \in G(\mathbb{A}).$$
- F が総実体のときには $\mathcal{A}(G)$ は Hilbert 保型形式の空間を含む。
- $F = \mathbb{Q}$ の場合であっても、上の保型形式の定義には Maaß wave form や実解析的 Eisenstein 級数など正則でない保型形式も含まれる。

5. Fourier 展開

5. Fourier 展開

$\psi : \mathbb{A}/F \longrightarrow \mathbb{C}^1$; 非自明な指標を固定。

5. Fourier 展開

$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^1$; 非自明な指標を固定。

$\Longrightarrow$

- $\mathbb{A}/F$ の指標は $\psi^\xi : \mathbb{A}/F \ni x \longmapsto \psi(\xi x) \in \mathbb{C}^1$, $(\xi \in F)$ の形。
- $\psi_U^\xi : U(\mathbb{A})/U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^\xi(b) \in \mathbb{C}^1$; 指標。

5. Fourier 展開

$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^1$; 非自明な指標を固定。

$\Longrightarrow$

- $\mathbb{A}/F$ の指標は $\psi^\xi : \mathbb{A}/F \ni x \longmapsto \psi(\xi x) \in \mathbb{C}^1$, ($\xi \in F$) の形。
- $\psi_U^\xi : U(\mathbb{A})/U(F) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^\xi(b) \in \mathbb{C}^1$; 指標。

$\phi \in \mathcal{A}(G)$ の ψ-Fourier 係数 (ψ_U-Whittaker 係数) を次で定義。

$$W_\psi(\phi; g) := \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\overline{\psi_U(u)}\,du$$
$$= \int_{\mathbb{A}/F} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\overline{\psi(x)}\,dx$$

du ; $\mathrm{vol}\,(U(F)\backslash U(\mathbb{A})) = 1$ となる $U(\mathbb{A})$ 上の不変測度。

5.1. Fourier 展開

$$\phi(g) = \phi_B(g) + \sum_{\xi \in F^\times} W_{\psi^\xi}(\phi; g) = \phi_B(g) + \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$$

5.1. Fourier 展開

$$\phi(g) = \phi_B(g) + \sum_{\xi \in F^\times} W_{\psi^\xi}(\phi; g) = \phi_B(g) + \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\left(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$$

[証明] 一つ目はコンパクト群 $U(F)\backslash U(\mathbb{A})$ 上の Fourier 展開。

5.1. Fourier 展開

$$\phi(g)=\phi_B(g)+\sum_{\xi\in F^\times}W_{\psi^\xi}(\phi;g)=\phi_B(g)+\sum_{\xi\in F^\times}W_\psi\Big(\phi;\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}g\Big)$$

[証明] 一つ目はコンパクト群 $U(F)\backslash U(\mathbb{A})$ 上の Fourier 展開。

$$\begin{aligned}W_\psi\Big(\phi;\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}g\Big)&=\int_{\mathbb{A}/F}\phi\Big(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}g\Big)\overline{\psi(x)}\,dx\\&=\int_{\mathbb{A}/F}\phi\Big(\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\xi^{-1}x\\0&1\end{pmatrix}g\Big)\overline{\psi(x)}\,dx\\&=\int_{\mathbb{A}/F}\phi\Big(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g\Big)\overline{\psi(\xi x)}\,dx=W_{\psi^\xi}(\phi;g).\end{aligned}$$

5.2. カスプ形式は急減少

5.2. カスプ形式は急減少

$\phi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が**急減少**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall R \in \mathbb{R}$, $\exists c > 0$ s.t.

$$|\phi(g)| \leq c\delta_B(g)^R, \quad \forall g \in \mathfrak{S}(t_0), \, |\det g|_{\mathbb{A}} = 1.$$

5.2. カスプ形式は急減少

$\phi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が急減少

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall R \in \mathbb{R}$, $\exists c > 0$ s.t.

$$|\phi(g)| \leq c\delta_B(g)^R, \quad \forall g \in \mathfrak{S}(t_0),\ |\det g|_{\mathbb{A}} = 1.$$

ただし、

$$\delta_B : G(\mathbb{A}) \ni uatk \longmapsto \frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}_+^\times,$$

$$(u \in U(\mathbb{A}),\ a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A},\ t \in T(\mathbb{A})^1,\ k \in \boldsymbol{K}).$$

5.2. カスプ形式は急減少

$\phi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が急減少
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall R \in \mathbb{R}$, $\exists c > 0$ s.t.

$$|\phi(g)| \leq c\delta_B(g)^R, \quad \forall g \in \mathfrak{S}(t_0), \, |\det g|_{\mathbb{A}} = 1.$$

ただし、

$$\delta_B : G(\mathbb{A}) \ni uatk \longmapsto \frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}_+^\times,$$

$$(u \in U(\mathbb{A}),\, a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{A},\, t \in T(\mathbb{A})^1,\, k \in \boldsymbol{K}).$$

命題 1.10. $\mathcal{A}(G) \ni \phi$ に対して、$\phi - \phi_B$ は急減少。特に $\phi \in \mathcal{A}_0(G)$ は急減少である。

6. Petersson 内積と $\mathcal{L}(G)$

岩澤分解の積分公式

$$\int_{G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times} \phi(g)\,dg = \int_{\boldsymbol{K}} \int_{T(\mathbb{A})^1} \int_{\mathbb{R}_+^\times} \int_{U(\mathbb{A})} \phi\Big(u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\Big) |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,du\,\frac{da}{a}\,dt\,dk$$

6. Petersson 内積と $\mathcal{L}(G)$

岩澤分解の積分公式

$$\int_{G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times} \phi(g)\,dg = \int_{\boldsymbol{K}} \int_{T(\mathbb{A})^1} \int_{\mathbb{R}_+^\times} \int_{U(\mathbb{A})} \phi\left(u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\right) |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,du\,\frac{da}{a}\,dt\,dk$$

事実 1.7. と併せて、

$$\int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\,dg \leq \int_{\boldsymbol{K}} \int_{\Omega_2} \int_t^\infty \int_{\Omega_1} \phi\left(u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\right) |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,du\,\frac{da}{a}\,dt\,dk.$$

6. Petersson 内積と $\mathcal{L}(G)$

岩澤分解の積分公式

$$\int_{G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times} \phi(g)\,dg = \int_{\boldsymbol{K}} \int_{T(\mathbb{A})^1} \int_{\mathbb{R}_+^\times} \int_{U(\mathbb{A})} \phi\left(u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\right) |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,du\,\frac{da}{a}\,dt\,dk$$

事実 1.7. と併せて、

$$\int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\,dg \le \int_{\boldsymbol{K}} \int_{\Omega_2} \int_t^\infty \int_{\Omega_1} \phi\left(u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\right) |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,du\,\frac{da}{a}\,dt\,dk.$$

補題 1.11. (i) $G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトではないが測度有限である。
(ii) 急減少な保型形式は $G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分である。

6.1. L^2 保型形式の空間

$\mathcal{L}(G) = L^2(G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}))$; 次を満たす可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間。

6.1. L^2 保型形式の空間

$\mathcal{L}(G) = L^2(G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A}))$; 次を満たす可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間。

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g), (\forall\gamma \in G(F), a \in \mathbb{R}_+^\times, g \in G(\mathbb{A}))$;
2. ϕ は $G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分。

6.1. L^2 保型形式の空間

$\mathcal{L}(G) = L^2(G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}))$; 次を満たす可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間。

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g), (\forall \gamma \in G(F), a \in \mathbb{R}_+^\times, g \in G(\mathbb{A}))$;
2. ϕ は $G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分。

$\mathcal{L}_0(G) := \{\phi \in \mathcal{L}(G) \mid \phi_B(g) = 0, \forall' g \in G(\mathbb{A})\} \subset \mathcal{L}(G)$; 閉部分空間

$\Longrightarrow$

6.1. L^2 保型形式の空間

$\mathcal{L}(G) = L^2(G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}))$; 次を満たす可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間。

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, ($\forall \gamma \in G(F)$, $a \in \mathbb{R}_+^\times$, $g \in G(\mathbb{A})$);
2. ϕ は $G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分。

$\mathcal{L}_0(G) := \{\phi \in \mathcal{L}(G) \mid \phi_B(g) = 0, \forall' g \in G(\mathbb{A})\} \subset \mathcal{L}(G)$; 閉部分空間

$\Longrightarrow$

- $\mathcal{L}(G)$ は Petersson 内積

$$(\phi, \phi') := \int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\overline{\phi'(g)}\, dg$$

に関する Hilbert 空間。

6.1. L^2 保型形式の空間

$\mathcal{L}(G) = L^2(G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}))$; 次を満たす可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間。

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $(\forall \gamma \in G(F), a \in \mathbb{R}_+^\times, g \in G(\mathbb{A}))$;
2. ϕ は $G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分。

$\mathcal{L}_0(G) := \{\phi \in \mathcal{L}(G) \mid \phi_B(g) = 0, \forall' g \in G(\mathbb{A})\} \subset \mathcal{L}(G)$; 閉部分空間

$\Longrightarrow$

- $\mathcal{L}(G)$ は Petersson 内積

$$(\phi, \phi') := \int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\overline{\phi'(g)}\, dg$$

  に関する Hilbert 空間。
- $G(\mathbb{A})$ 作用 $\big(R(g)\phi\big)(x) := \phi(xg)$, $(g \in G(\mathbb{A}), \phi \in \mathcal{L}(G))$ に関して $\mathcal{L}(G)$ は $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現。

6.1. L^2 保型形式の空間

$\mathcal{L}(G) = L^2(G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A}))$; 次を満たす可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の空間。

1. $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $(\forall \gamma \in G(F), a \in \mathbb{R}_+^\times, g \in G(\mathbb{A}))$;
2. ϕ は $G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分。

$\mathcal{L}_0(G) := \{\phi \in \mathcal{L}(G) \mid \phi_B(g) = 0, \forall' g \in G(\mathbb{A})\} \subset \mathcal{L}(G)$; 閉部分空間

$\Longrightarrow$

- $\mathcal{L}(G)$ は Petersson 内積

$$(\phi, \phi') := \int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\overline{\phi'(g)}\, dg$$

  に関する Hilbert 空間。
- $G(\mathbb{A})$ 作用 $\big(R(g)\phi\big)(x) := \phi(xg)$, $(g \in G(\mathbb{A}), \phi \in \mathcal{L}(G))$ に関して $\mathcal{L}(G)$ は $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現。
- $\mathcal{A}_0(G) \subset \mathcal{L}_0(G)$; 稠密部分空間。

6.2. カスプスペクトルは離散的

6.2. カスプスペクトルは離散的

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$; $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。

$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$; コンパクト台付きで $G(F_\infty)$ 成分について滑らか、$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分について局所定数な函数の空間。

6.2. カスプスペクトルは離散的

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$; $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。

$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$; コンパクト台付きで $G(F_\infty)$ 成分について滑らか、$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分について局所定数な函数の空間。

事実 **1.** $(\rho, \mathcal{L})$; $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現で次を満たすもの。

6.2. カスプスペクトルは離散的

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$; $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。
$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$; コンパクト台付きで $G(F_\infty)$ 成分について滑らか、$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分について局所定数な函数の空間。

事実 1. $(\rho, \mathcal{L})$; $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現で次を満たすもの。
$\forall\Omega \subset G(\mathbb{A})$; 1 の近傍 $\exists f_\Omega \in C_c(\Omega)$ s.t.

(a) $\left(f_\Omega^\vee(g) := f_\Omega(g^{-1})\right) = f_\Omega(g), \quad \int_{G(\mathbb{A})} f_\Omega(g)\,dg = 1.$

(b) $\rho(f_\Omega) : \mathcal{L} \ni \xi \mapsto \int_G f_\Omega(g)\rho(g)\xi\,dg \in \mathcal{L}$ はコンパクト作用素。

6.2. カスプスペクトルは離散的

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$; $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。
$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$; コンパクト台付きで $G(F_\infty)$ 成分について滑らか、$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分について局所定数な函数の空間。

事実 1. $(\rho, \mathcal{L})$; $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現で次を満たすもの。
$\forall \Omega \subset G(\mathbb{A})$; 1 の近傍 $\exists f_\Omega \in C_c(\Omega)$ s.t.

(a) $\left(f_\Omega^\vee(g) := f_\Omega(g^{-1})\right) = f_\Omega(g), \quad \int_{G(\mathbb{A})} f_\Omega(g)\, dg = 1.$

(b) $\rho(f_\Omega) : \mathcal{L} \ni \xi \mapsto \int_G f_\Omega(g)\rho(g)\xi\, dg \in \mathcal{L}$ はコンパクト作用素。

$\Longrightarrow$

- $(\rho, \mathcal{L})$ は可算個の既約ユニタリ部分表現の Hilbert 直和。
- 各 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の ρ での重複度は有限。

6.2. カスプスペクトルは離散的

$\Pi(G(\mathbb{A})^1)$; $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合。
$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$; コンパクト台付きで $G(F_\infty)$ 成分について滑らか、$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分について局所定数な函数の空間。

事実 1. $(\rho,\mathcal{L})$; $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現で次を満たすもの。
$\forall\Omega\subset G(\mathbb{A})$; 1 の近傍 $\exists f_\Omega\in C_c(\Omega)$ s.t.

(a) $\left(f_\Omega^\vee(g):=f_\Omega(g^{-1})\right)=f_\Omega(g),\quad \displaystyle\int_{G(\mathbb{A})}f_\Omega(g)\,dg=1.$

(b) $\rho(f_\Omega):\mathcal{L}\ni\xi\mapsto\displaystyle\int_G f_\Omega(g)\rho(g)\xi\,dg\in\mathcal{L}$ はコンパクト作用素。

$\Longrightarrow$

- $(\rho,\mathcal{L})$ は可算個の既約ユニタリ部分表現の Hilbert 直和。
- 各 $\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の ρ での重複度は有限。

事実 2. $R(f)|\mathcal{L}_0(G)$, ($f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$) はコンパクト作用素。

5.2. カスプスペクトルは離散的 (2)

定理 1.13 (Piatetsky-Shapiro). (i) $(R, \mathcal{L}_0(G))$ は可算個の既約ユニタリ部分表現の Hilbert 直和に分解する。
(ii) 各 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の $\mathcal{L}^0(G)$ での重複度は有限である:

$$(R, \mathcal{L}_0(G)) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)}} \pi^{\oplus m(\pi)}, \quad m(\pi) \in \mathbb{N}.$$

第 1 部のまとめ

第 1 部のまとめ

- $\boxed{\mathcal{A}_0(G)\text{ を捉える}} \Longleftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(G)\text{ を捉える}}$

第1部のまとめ

- $\boxed{\mathcal{A}_0(G) \text{ を捉える}} \Longleftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(G) \text{ を捉える}}$

$\Longleftrightarrow$

1. $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の記述
2. $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対する重複度 $m(\pi)$ の決定

第1部のまとめ

- $\boxed{\mathcal{A}_0(G)\text{ を捉える}} \Longleftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(G)\text{ を捉える}}$

$\Longleftrightarrow$

1. $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の記述
2. $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対する重複度 $m(\pi)$ の決定

註. $\mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{A}_0(G)$ と $\mathcal{L}(G) \setminus \mathcal{L}_0(G)$ の間に直接の関係はない。

第 1 部のまとめ

- $\boxed{\mathcal{A}_0(G)\text{ を捉える}} \Longleftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(G)\text{ を捉える}}$

$\Longleftrightarrow$

1. $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の記述
2. $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対する重複度 $m(\pi)$ の決定

註. $\mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{A}_0(G)$ と $\mathcal{L}(G) \setminus \mathcal{L}_0(G)$ の間に直接の関係はない。

- 保型線束の連接コホモロジーに $\mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{A}_0(G)$ が寄与するか否かは不明だが、$\mathcal{L}(G) \setminus \mathcal{L}_0(G)$ は自然な寄与を持つ。

第1部のまとめ

- $\boxed{\mathcal{A}_0(G) \text{ を捉える}} \Longleftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(G) \text{ を捉える}}$

$\Longleftrightarrow$

1. $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の記述
2. $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対する重複度 $m(\pi)$ の決定

註. $\mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{A}_0(G)$ と $\mathcal{L}(G) \setminus \mathcal{L}_0(G)$ の間に直接の関係はない。

- 保型線束の連接コホモロジーに $\mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{A}_0(G)$ が寄与するか否かは不明だが、$\mathcal{L}(G) \setminus \mathcal{L}_0(G)$ は自然な寄与を持つ。
- $\mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{A}_0(G)$ の元はモジュラー多様体上の因子を作るときなどに役立つ。