5 Clozel-Labesse のベースチェンジ

前節の予想は未だ解決されていない。特に一般線型群以外の群の保型形式 (やそれを含む L パケット) の記述はないので、それらの間のベースチェンジリフトを記述できるわけではない。しかし、CM 拡大 E/F に対するある種の非等方ユニタリ群 G の場合に限り、$G(\mathbb{A})$ のコホモロジー的保型表現を含む A パケットに対して、そのベースチェンジリフトであるべき $G(\mathbb{A}_E)$ の保型表現を構成できる。それが Clozel-Labesse のベースチェンジである。

5.1 ベースチェンジの設定と跡公式

まずはベースチェンジリフトがどのような跡公式の比較から得られるかを見ておこう。

非等方ユニタリ群 F を d 次の総実代数体とする。その総虚二次拡大 E/F を取り、$\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元を σ と書く。E 上の n^2 次元中心的斜体 B が第二種対合、つまり反同型 $\ddagger : B \to B^{\mathrm{op}}$ で $\ddagger^2 = \mathrm{id}$ かつ $\ddagger|_E = \sigma$ を満たすものを持つとする。F 上の簡約線型代数群

$$G(R) = G_\ddagger(R) := \{g \in B \otimes_F R \,|\, g^{\ddagger_R} g = 1\}, \quad (R \text{ は可換 } F \text{ 代数})$$

は例 4.2 の n 変数準分裂ユニタリ群 $G^* = G_n^*$

$$G^*(R) = \{g \in \mathbb{M}_n(E) \otimes_F R \,|\, \mathrm{Ad}(I_n)^t\sigma(g)g = 1\}$$

の内部形式である。($\ddagger_R = \ddagger \otimes \mathrm{id}_R$ と書いていた。) 時折、志村多様体を考えるために $\mathbb{Q}$ 代数群

$$\widetilde{G}(R) = \widetilde{G}_\ddagger(R) := \{g \in B \otimes_{\mathbb{Q}} R \,|\, g^{\ddagger_R} g = \nu(g),\, \exists \nu(g) \in R^\times\}, \quad (R \text{ は可換 } \mathbb{Q} \text{ 代数})$$

も必要である。

$B \otimes_F E \xrightarrow{\sim} B^{\oplus 2}$ から、F 代数 R に対して同型 $B \otimes_F (R \otimes_F E) \xrightarrow{\sim} (B \otimes_F R)^{\oplus 2}$ が引き起こされる。その $\mathrm{Res}_{E/F}\, G(R)$ への制限は、$(b^\ddagger)^{-1}$ を $b^{-\ddagger}$ と略記することにして

$$\mathrm{Res}_{E/F}\, G(R) \xrightarrow{\sim} \{(g, g^{-\ddagger}) \in (B \otimes_F R)^2 \,|\, g \in (B \otimes_F R)^\times\} \simeq (B \otimes_F R)^\times$$

となる。すなわち $L := \mathrm{Res}_{E/F}\, G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{E/F}\, B^\times$ で、G の F 構造により σ に対応する L の F 自己同型 $\tilde{\sigma}$ は $\mathrm{Res}_{E/F}\, B^\times$ では $-\ddagger$ となる。我々の目標は $G(\mathbb{A}_F)$ の保型表現から $L(\mathbb{A}_F) = B^\times(\mathbb{A}_E)$ のそれへのベースチェンジリフトを構成することである。それには $(L, \tilde{\sigma})$ のひねり付き跡公式 (2.3 節参照) が必要である。

$(L,\tilde{\sigma})$ のひねり付き跡公式　2.3 節と同様に $L(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash L(\mathbb{A}_F)=B^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)$ 上の二乗可積分函数の空間を $\mathcal{L}(B^\times)$ と書く。$L(\mathbb{A}_F)=B^\times(\mathbb{A}_E)$ 上の滑らかなコンパクト台付き函数の空間を $C_c^\infty(B^\times(\mathbb{A}_E))$ で表し、$f_E\in C_c^\infty(B^\times(\mathbb{A}_E))$ に対して

$$\bar{f}_E(g):=\int_{\mathbb{R}_+^\times} f_E(zg)\,dz$$

とおく。$\mathbb{R}_+^\times$ の Lie 環での $1-\tilde{\sigma}$ の Jacobi 行列式を $J_Z(\sigma):=|\det(1-\tilde{\sigma}|_{\mathrm{Lie}\,\mathbb{R}_+^\times})|=2$ として、

$$\bar{f}_E(g)=J_Z(\sigma)\int_{\mathbb{R}_+^\times} f_E(z^{-1}g\sigma(z))\,dz \tag{5.1}$$

と書けることに注意する。例によって $\tilde{\sigma}$ に付随する作用素 $R(\sigma)\phi(x):=\phi(\sigma(x))$, $(\phi\in\mathcal{L}(B^\times))$ を導入し、作用素

$$\begin{aligned}R(f_E)R(\sigma)\phi(x)&=\int_{B^\times(\mathbb{A}_E)} f_E(y)\phi(\sigma(xy))\,dy=\int_{B^\times(\mathbb{A}_E)/\mathbb{R}_+^\times}\bar{f}_E(y)\phi(\sigma(xy))\,dy\\&=\int_{B^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)} K_\sigma(x,y)\phi(y)\,dy\end{aligned}$$

を考える。ただし積分核 K_σ は

$$K_\sigma(x,y)=\sum_{\delta\in B^\times}\bar{f}_E(x^{-1}\delta\sigma(y))$$

で与えられる。今の場合 $B^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)$ はコンパクトだから、この積分核は対角部分集合上で可積分である。$B^\times$ 内の σ 共役類 (2.3 節参照) の集合を $\Gamma_\sigma(B^\times)$ と書けば、その積分は

$$\begin{aligned}T^{L,\sigma}(f_E)&:=\int_{B^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)} K_\sigma(x,x)\,dx\\&=\int_{B^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)}\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_\sigma(B^\times)}\sum_{\gamma\in I_{\delta,\sigma}(F)\backslash B^\times}\bar{f}_E(x^{-1}\gamma^{-1}\delta\sigma(\gamma x))\,dx\\&=\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_\sigma(B^\times)}\int_{I_{\delta,\sigma}(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)}\bar{f}_E(x^{-1}\delta\sigma(x))\,dx\\&\overset{(5.1)}{=}\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_\sigma(B^\times)}J_Z(\sigma)\int_{I_{\delta,\sigma}(F)\backslash B^\times(\mathbb{A}_E)} f_E(x^{-1}\delta\sigma(x))\,dx\\&=\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_\sigma(B^\times)}J_Z(\sigma)\tau(I_{\delta,\sigma})O_{\delta,\sigma}(f_E)\end{aligned}\tag{5.2}$$

となる。ここで $I_{\delta,\sigma}$ は L の $\mathrm{Ad}(\delta)\circ\tilde{\sigma}$ 不変元からなる部分群 (δ の σ 中心化群) であり、$\tau(I_{\delta,\sigma})=\mathrm{vol}(I_{\delta,\sigma}(F)\backslash I_{\delta,\sigma}(\mathbb{A}_F))$ は $I_{\delta,\sigma}$ の玉河数を表す。$O_{\delta,\sigma}(f_E)$ は 2.3 節で定義された f_E の δ での σ 軌道積分である。

一方、$\mathcal{L}(B^\times)$ 上の $B^\times(\mathbb{A}_E)$ の右正則表現は既約ユニタリ表現の可算直和に分解する:

$$\mathcal{L}(B^\times)=\widehat{\bigoplus_{\Pi\in\Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))}}\Pi^{\oplus m(\Pi)}.$$

この場合には各既約ユニタリ表現 $\mathit{\Pi} \in \Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))$ の重複度 $m(\mathit{\Pi})$ は高々1であることが A.I. Badulescu により証明されている [Bad08]。$\mathit{\Pi} \in \Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))$ が σ 安定とは $\sigma(\mathit{\Pi}) := \mathit{\Pi} \circ \sigma \simeq \mathit{\Pi}$ なることとする。$\Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))$ 内の σ 安定な元の集合を $\Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma$ と書く。$\mathit{\Pi} \in \Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma$ の $\mathcal{L}(B^\times)$ での等型部分空間 $\mathcal{L}(B^\times)_{\mathit{\Pi}}$ は $R(\sigma)$ で保たれ、その上の絡作用素 $\mathit{\Pi}(\sigma) : \sigma(\mathit{\Pi}) \xrightarrow{\sim} \mathit{\Pi}$ を与える。このとき積分 (5.2) のスペクトル展開は

$$T^{L,\sigma}(f_E) = \sum_{\mathit{\Pi} \in \Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma} m(\mathit{\Pi}) \mathrm{tr}(\mathit{\Pi}(f_E) \circ \mathit{\Pi}(\sigma)) \tag{5.3}$$

となる。(5.2) と (5.3) の間の等式が $(L, \tilde{\sigma})$ のひねり付き (Selberg) 跡公式である。同様に G の Selberg 跡公式

$$T^G(f) = \sum_{\{\gamma\} \in \mathit{\Gamma}(G)} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f) = \sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \mathrm{tr}\pi(f) \tag{5.4}$$

も得られる。

跡公式の安定化と比較　一般線型群のベースチェンジリフトは $(\mathrm{GL}_{n,E}, \tilde{\sigma})$ の跡公式と $\mathrm{GL}_{n,E}$ の跡公式を比較して得られた。対する今の場合の比較は一気に複雑になる。

$(L, \tilde{\sigma})$ の楕円的内視データ (8 ページ参照) の同型類は次の (H_m, s_m, ξ_m), $(0 \le m \le n)$ からなる [Kon02, 補遺]。すなわち

$$H_m = G_m^* \times G_{n-m}^*, \quad s_m := \left(\mathbf{1}_n, \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & \\ & -\mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix}\right) \in \widehat{L}$$

であり、$\xi_m : {}^L H_m \hookrightarrow {}^L L$ は

$$\begin{aligned} \xi_m(h, h') &= \left(\begin{pmatrix} h & \\ & h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta_{n-m}(h') & \\ & \theta_m(h) \end{pmatrix}\right), \quad (h, h') \in \widehat{H}_m, \\ \xi_m|_{W_E} &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & \\ & \mu \mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mathbf{1}_{n-m} & \\ & \mathbf{1}_m \end{pmatrix}\right) \times \mathrm{id}_{W_E} \\ \xi_m(w_\sigma) &= \left(\begin{pmatrix} & \mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_{n-m} & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -\mathbf{1}_{n-m} \\ \mathbf{1}_m & \end{pmatrix}\right) \rtimes_{\rho_L} w_\sigma. \end{aligned}$$

で定まる準同型である。μ は $\mathbb{A}_F^\times$ への制限が $\omega_{E/F} : \mathbb{A}_F^\times/(F)^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ に等しい $\mathbb{A}_E^\times/E^\times$ の指標で、w_σ は $W_F \setminus W_E$ の元である。上の内視データの同型類は後者二つのデータによらない。特に $m = n$ の場合が 4.2 節で考えた $(G^* = G_n^*, 1, b_{E/F})$ となっている。ベースチェンジリフトのためのあと公式の比較にはまず $(L, \tilde{\sigma})$ のひねり付き跡公式の安定化 (*stabilization*) が必要である。すなわち上で得られた跡公式 $T^{L,\sigma}(f_E)$ を H_m の安定跡公式 $ST^{H_m}(f^{H_m})$ で

$$T^{L,\sigma}(f_E) = \sum_{m=0}^{n} a(L, \sigma, H_m) ST^{H_m}(f^{H_m}) \tag{5.5}$$

と展開しなくてはならない。一方、G の楕円的内視データの同型類は $(H_m, s_m^G, \xi_m^G), (0 \leq m \leq n)$

$$s_m^G = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & \\ & -\mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\xi_m^G(h,h') := \begin{pmatrix} h & \\ & h' \end{pmatrix} \in \widehat{G}, \quad (h,h') \in \widehat{H}_m,$$

$$\xi_m^G|_{W_E} = \begin{pmatrix} \mu^{n-m}\mathbf{1}_m & \\ & \mu^m\mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix} \times \mathrm{id}_{W_E}, \quad \xi_m^G(w_\sigma) = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_{n-m} & \end{pmatrix} \rtimes w_\sigma$$

からなる。G の跡公式の安定化とは $T^G(f)$ の H_m たちの安定跡公式による展開

$$T^G(f) = \sum_{m=0}^{n} a(G, H_m) ST^{H_m}(f^{H_m}) \tag{5.6}$$

である。ベースチェンジリフトは (5.5) と (5.6) の右辺を比較することで構成されるはずである。つまり比較は右辺の安定跡公式を経由することでのみ可能であり、まずは跡公式を安定化しなくてはならないのである[8]。安定化の出発点は $T^{L,\sigma}(f_E)$ $(T^G(f))$ の幾何サイドの項の添字集合である $L(F) = B^\times$ 内の σ 共役類 ($G(F)$ 内の共役類) から H_m 内の共役類へのノルム写像である。

ノルム写像　一般線型群の場合の (2.10), (2.10$_\sigma$) はそのまま一般の連結簡約群に拡張する。例えば現在の状況であれば $T \subset G$ を F 極大トーラス、$T_L := \mathrm{Cent}(T, L)$ をその L での中心化群 (L の $\tilde\sigma$ 不変な極大トーラスになる) として、全単射

$$\mathcal{C}\ell_{ss}(G) \ni C \longmapsto C \cap T \in T/\Omega(G,T), \tag{5.7}$$

$$\mathcal{C}\ell_{\sigma\text{-}ss}(L) \ni C \longmapsto C \cap T_L \in (T_L)_{\tilde\sigma}/\Omega(G,T) \overset{\mathrm{N}_{E/F}}{\xrightarrow{\sim}} T/\Omega(G,T) \tag{5.7$_\sigma$}$$

が得られる。$\Omega(L, T_L)$ の $\tilde\sigma$ 不変部分 $\Omega(G,T)$ は T_L の σ 不変商 $(T_L)_{\tilde\sigma}$ に作用していることに注意せよ。内視データ $(H, s, \xi) = (H_m, s_m, \xi_m)$ に対しても H の極大トーラス T_H を固定すれば、類似の全単射 $\mathcal{C}\ell_{ss}(H) \xrightarrow{\sim} T_H/\Omega(H, T_H)$ ができる。$\xi : {}^L H \hookrightarrow {}^L L$ は $\widehat{H}, \widehat{L}$ それぞれの極大トーラス $\mathcal{T}_H, \mathcal{T}_L$ の間の準同型に制限され、同型 $\xi : \mathcal{T}_H \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_L^{\tilde\sigma}$ を与える。$\mathcal{T}_H$, $\mathcal{T}_L^{\tilde\sigma}$ はそれぞれ $T_H, (T_L)_{\tilde\sigma}$ の Langlands 双対トーラスと見なせるから、写像

$$\mathcal{A}_{H/L} : \mathcal{C}\ell_{ss}(H) \overset{(5.7)}{\xrightarrow{\sim}} T_H/\Omega(H, T_H) \xrightarrow{(\xi^*)^{-1}} (T_L)_{\tilde\sigma}/\Omega(G,T) \overset{5.7_\sigma}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{C}\ell_{\sigma\text{-}ss}(L)$$

が得られる。写像 $\mathcal{A}_{H/L}$ は F 上定義されている [KS99, 定理 3.3.A]。

さて F 値点のレベルでのノルム写像を定義するに当たっての困難は次の二点にある。

(i) F 上定義された共役類の F 値点の集合 (幾何的共役類) と F 値点の群での共役類 (F 共役類) は異なる。

[8] これは Clozel が当初誤解していた論点の一つである。

(ii) F 上定義された共役類は必ずしも F 値点を持たない。

まず前者の問題は内視論の出発点である。σ 半単純な $\delta, \delta' \in L(F)$ が σ 安定共役とは、次を満たす $g \in L(\bar{F})$ が存在することとする。

- $g^{-1}\delta\tilde{\sigma}(g) = \delta'$. 特に $\tau \in \Gamma$ に対して
$$g\tau(g)^{-1}\delta\tilde{\sigma}(g\tau(g)^{-1})^{-1} = g\tau(g^{-1}\delta\tilde{\sigma}(g))\tilde{\sigma}(g)^{-1} = g\delta'\tilde{\sigma}(g)^{-1} = \delta$$
だから $\partial g_\tau := g\tau(g)^{-1}$, $(\tau \in \Gamma)$ は δ の $\tilde{\sigma}$ 中心化群 $L^{\delta,\sigma}(\bar{F})$ に属する。
- ∂g_τ は $L^{\delta,\sigma}(\bar{F})$ の単位元の連結成分 (連結 $\tilde{\sigma}$ 中心化群) $I_{\delta,\sigma}(\bar{F})$ に属する。

今の場合、二つ目の条件は常に成り立つから δ の σ 安定共役類は δ の (多様体としての) $\tilde{\sigma}$ 共役類 $C_{\delta,\sigma}$ の F 値点の集合 $C_{\delta,\sigma}(F)$ に一致する。容易にわかるように

$$\begin{gathered} C_{\delta,\sigma}(F)/\mathrm{Ad}_\sigma(L(F)) \ni g^{-1}\delta\tilde{\sigma}(g) \longmapsto [\partial g \text{ のクラス}] \in \mathfrak{D}(I_{\delta,\sigma}, L; F), \\ \mathfrak{D}(I_{\delta,\sigma}, L; F) := \ker[\mathrm{H}^1(F, I_{\delta,\sigma}) \to \mathrm{H}^1(F, L)] \end{gathered} \tag{5.8}$$

は全単射である。この $\mathfrak{D}(I, L; F)$ は群にならないため、内視論では代わりに

$$\mathfrak{E}(I, L; F) := \ker[\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(F, I) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(F, L)]$$

を使う。今の場合は $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(F, I)$ は I の余中心 $D_I := I/I_{\mathrm{der}}$ の Galois コホモロジー群 $\mathrm{H}^1(F, D_I)$ に一致し (L の方も同様である)、自然な全射

$$\mathfrak{D}(I_{\delta,\sigma}, L; F) \twoheadrightarrow \mathfrak{E}(I, L; F)$$

がある。内視データ (H, s, ξ) の $s \in \widehat{L}$ の $\pi_0(Z(\widehat{I})^\Gamma)$ での像は Tate-中山射 β_I により

$$\mathfrak{E}(I, L; \mathbb{A}/F) = \mathrm{cok}[\mathfrak{E}(I, L; F) \to \mathfrak{E}(I, L; \mathbb{A})] \tag{5.9}$$

の指標を与える。このことから推察されるとおり、内視データは $L(\mathbb{A})$ 共役と $L(F)$ 共役の差を量るものである。$\tilde{\sigma}$ を恒等写像で置き換えて $H(F)$ での安定共役も同様に定義される。

後者の問題については次の事実が知られている。

命題 5.1 ([Kot82] 定理 4.1)**.** 導来群が単連結で F 上準分裂な簡約代数群の F 上定義された共役類は F 値点を持つ。

内視群 H はこの仮定を満たすが L は準分裂ではないから、今の場合、ノルムは次のように定義するほかない。

定義 5.2. 半単純な $\gamma_H \in H(F)$ の安定共役類 $C_{\gamma_H}(F)$ の $\mathcal{A}_{H/L}$ による像が $L(F)$ の元 δ を含むとき、$C_{\gamma_H}(F)$ を $C_{\delta,\sigma}(F)$ のノルムという。$\mathcal{A}_{H/L}(C_{\gamma_H})$ が F 値点を持たないとき、γ_H はノルムでないという。

G に対しても同様に写像 $\mathcal{A}_{H/G} : \mathcal{C}\ell_{ss}(H) \to \mathcal{C}\ell(G)$ が定まる。やはり G は命題 5.1 の仮定を満たさないので、F 値点のレベルでは次の定義を使う。

定義 5.3. 半単純な $\gamma_H \in H(F)$ に対して $\mathcal{A}_{H/G}(C_{\gamma_H})$ が F 値点 γ を持つとき、$C_{\gamma_H}(F)$ を $C_\gamma(F)$ の像という。$\mathcal{A}_{H/G}(C_{\gamma_H})$ が F 値点を持たなければ γ_H は $G(F)$ の像でないという。

軌道積分の移行の問題　さて、定義 5.2, 5.3 で与えた安定共役類の対応による (5.5), (5.6) の構成には軌道積分の移行が必要である。

簡単のため F の非アルキメデス素点 v での局所的な状況を考える。すると $\mathfrak{D}(I_{\delta,\sigma}, L; F_v) \simeq \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; F_v)$ である。$L(F_v) \ni \delta$ の $G^* = H_n$ でのノルム γ_{G^*} が正則半単純な場合、δ での σ 軌道積分

$$O_{\delta,\sigma}(f_{E_v}) := \int_{I_{\delta,\sigma}(F_v)\backslash L(F_v)} f_{E_v}(g_v^{-1}\delta\sigma(g_v))\, dg_v$$

が考えられる。一方、内視群 $H(F_v)$ の正則半単純元 γ_H での安定軌道積分を

$$SO_{\gamma_H}(f^{H_v}) := \sum_{\gamma'_H \in C_{\gamma_H}(F_v)/\mathrm{Ad}(H(F_v))} O_{\gamma'_H}(f^{H_v}) = \int_{(I_{\gamma_H}\backslash H)(F_v)} f^{H_v}(h_v \gamma_H h_v^{-1})\, dh_v$$

と定める。右辺の積分範囲の違いに注意せよ。上のような (γ_H, δ) に対して移行因子と呼ばれる函数 $\Delta_{H_v/L_v}(\gamma_H, \delta)$ が定義される [KS99, 4 章]。これは γ_H の安定共役類および δ の共役類のみに依存する函数で、γ_H が δ のノルムでないときは消えている。さらに Tate-中山双対性により内視データの $s \in \widehat{L}$ は $\mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; F_v)$ の指標 $\langle s, \cdot\rangle$ を定めるが、そのとき

$$\Delta_{H_v/L_v}(\gamma_H, g^{-1}\delta\sigma(g)) = c(H_v, L_v, \gamma_H)\langle s, [\partial g \text{ のクラス}]\rangle, \quad \exists c(H_v, L_v, \gamma_H) \in \mathbb{C}$$

と書ける。

予想 5.4 (軌道積分の移行予想)**.** 任意の $f_{E_v} \in C_c^\infty(L(F_v))$ に対して $f^{H_v} \in C_c^\infty(H(F_v))$ で次を満たすものが存在する。

$$SO_{\gamma_H}(f^{H_v}) = \sum_{\delta \in L(F_v)/\mathrm{Ad}_\sigma(L(F_v))} \Delta_{H_v/L_v}(\gamma_H, \delta) O_{\delta,\sigma}(f_{E_v}).$$

この問題は一見簡単そうに見えるが、実は非常に難しい。というのも軌道積分 $O_{\delta,\sigma}(f_{E_v})$ は正則でない δ では特異点を持つからである。上を示すには δ, 従ってそのノルム γ_H が非正則な半単純元に近づくときに両辺の特異挙動が一致することを見なくてはならない。実は移行因子 $\Delta_{H_v/L_v}(\gamma_H, \delta)$ は両辺の特異点での漸近展開の初項が一致するように定義されている。しかし特異挙動全体が一致するかどうかは、非常に非自明な問題である。

G と H に対しても同様の軌道積分の移行予想がある。つまり任意の $f_v \in C_c^\infty(G(F_v))$ に対して次を満たす $f^{H_v} \in C_c^\infty(H(F_v))$ があることを期待する。

$$SO_{\gamma_H}(f^{H_v}) = \sum_{\gamma \in G(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v))} \Delta_{H_v/G_v}(\gamma_H, \gamma) O_\gamma(f_v).$$

さて、$L_v, H_v, E_v/F_v$ が不分岐な v では不分岐 Hecke 環 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v)), \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{H,v}}(H(F_v))$ がある。内視データにあった L 群の埋め込み $\xi : {}^L H_v \hookrightarrow {}^L L_v$ と佐武同型から 13 ページと同様にして、準同型

$$\xi : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v)) \longrightarrow \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{H,v}}(H(F_v))$$

が定まる。次の予想は大域的な状況では十分多くのテスト函数に対して軌道積分の移行が成り立つことを保証しようというものである。

予想 5.5 (基本補題). (i) $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v)), \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{H,v}}(H(F_v))$ の単位元 $1_{\boldsymbol{K}_{L,v}}, 1_{\boldsymbol{K}_{H,v}}$ は予想 5.4 を満たす。
(ii) より一般に $f_{E_v} \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v))$ のとき、$f^{H_v} := \xi(f_{E_v})$ は予想 5.4 を満たす。

同様に (G,H) に対する基本補題も定式化される。

注意 5.6. (G,H) のような通常の内視論での予想 5.4, 5.5 については近年次のような大きな進展があった。
(i) 基本補題 5.5 とその Lie 環での類似から移行予想 5.4 が従う [Wal97]。
(ii) 基本補題は Lie 環での基本補題から従う [Wal08]。
(iii) 一方、我々の必要とする混標数での基本補題は十分に大きい等標数 $p > 0$ の場合の基本補題から従うことが、やはり Waldspurger により証明されている [Wal06]。
(iv) この等標数の場合の基本補題は幾何的に定式化され、Laumon, Ngo により証明された [LN04], [Ngo08]。
跡公式の安定化にはさらにウェイト付き軌道積分に対する基本補題が必要なのだが、こちらについても Chaudouard-Laumon や Ngo によるプロジェクトがあるようである [CL]。これらを仮定しての跡公式の安定化のプロセスはすでに Arthur により解決されている [Art02], [Art01], [Art03]。
ベースチェンジの場合 (予想 5.5) も含めたひねり付き内視論における類似の問題は non-standard lemma と呼ばれる主張に帰着され [Wal08]、それはやはり Ngo のアプローチにより証明できるとされている。 □

これらの予想を用いた跡公式の安定化の過程については Kottwitz の論文 [Kot86] や拙文 [今野 c] を参照されたい。ひねり付き跡公式の安定化には非可換 Galois コホモロジーが 1 次しかないことから来る独自の困難があり、それはベースチェンジの場合には [Lab99], 一般の場合には [Lab04] で解決されている。以下ではその代わりに特殊なテスト函数を取ることで、安定化の困難をバイパスするトリックを用いる。

5.2 コホモロジー的 A パケットと Euler-Poincaré函数

まず跡公式の単純化のカギとなるのが無限素点での特別なテスト函数である。ここではそのテスト函数とそれにまつわる既約表現の族を見ておこう。

コホモロジー的 A パケット　ここではアルキメデス局所的な状況を考える。$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ に付随する n 変数ユニタリ群 $G_{p,q}$, $(p+q=n,\ 0 \le q \le [n/2])$ とその L 群 ${}^LG = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_{\mathbb{R}}$ を思い出す (例 4.2)。$G_{p,q}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の Lie 環を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{p,q}$ と書き、極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_{p,q} \subset G_{p,q}(\mathbb{R})$ およびその極大トーラス T を例 4.7 の通りとする。T の上三角 Borel 部分群 $B_{p,q}$ について支配的なウェイト $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n)$ を取り、

$$\theta_n(\lambda) = (-\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \dots, -\lambda_1)$$

を $B_{p,q}$ 最高ウェイトに持つ $G_{p,q}$ の既約有限次元表現を $\xi = \xi_{\theta_n(\lambda)}$ と書く。すると既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q})$ 加群 π の ξ 係数 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q})$ コホモロジー群

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q}; \pi \otimes \xi) := \bigoplus_{k=0}^{2pq} \mathrm{H}^k(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q}; \pi \otimes \xi)$$

が考えられる [BW00, I.5]。(交代和にはなっていないことに注意せよ。この記法は標準的ではないが、以下に解説するコホモロジーの記述 (命題 5.8) にはこの方が都合がよい。)

$G_{p,q}$ の A パラメタとは、準同型 $\phi : W_{\mathbb{R}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L G$ で

- 合成 $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\phi} {}^L G \overset{\mathrm{pr}_2}{\twoheadrightarrow} W_{\mathbb{R}}$ は恒等写像。
- $\phi|_{W_{\mathbb{R}}}$ は緩増加 L パラメタ。
- $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は解析的。

を満たすものである。Arthur の予想によれば、L パラメタと同様に A パラメタに対しても A パケットと呼ばれる $G_{p,q}(\mathbb{R})$ の既約表現の有限集合 $\Pi_\phi(G_{p,q})$ があって種々の内視論的な指標等式を満たすはずである。このアルキメデス的な場合には、Arthur の予想についても [ABV92] など多くの結果が知られている。中でも $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q}; \pi \otimes \xi) \neq 0$ となる π たちからなる A パケットについては Adams-Johnson による簡潔な記述がある [AJ87]。

$B_{p,q}$ に関して標準的な放物型部分群は n の分割と一対一に対応する[9]。分割 $(\underline{n})$ に対応する標準放物型部分群 $Q_{(\underline{n})} = L_{(\underline{n})} V_{(\underline{n})}$ は $\mathbb{R}$ 上定義されていないが、$L_{(\underline{n})} \subset G_{p,q}$ は $\mathbb{R}$ 部分群である。コホモロジー的 A パラメタは λ と

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n_1};\ \lambda_{n_1+1} = \cdots = \lambda_{n_1+n_2};\ \ldots;\ \lambda_{n-n_r+1} = \cdots = \lambda_n \tag{5.10}$$

を満たす分割 $(\underline{n}) = (n_1, \ldots, n_r)$ に対する Levi 部分群 $L = L_{(\underline{n})}$ で定まる。具体的に書くと (少々複雑だが) $n_j^\wedge := \sum_{j<i\le r} n_i$, $n_j^\vee := \sum_{1\le i<j} n_i$ として

$$\phi_{L,\xi}(z,g) = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\lambda_{n_i^\vee+1} + (n_i^\wedge - n_i^\vee)/2} \rho_{n_i}(g)\right) \times z, \quad (z \in W_{\mathbb{C}},\ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}));$$

$$\phi_{L,\xi}(w_\sigma) = \begin{pmatrix} & & & \mathbf{1}_{n_r} \\ & & \iddots & \\ & (-1)^{n_2^\wedge}\mathbf{1}_{n_2} & & \\ (-1)^{n_1^\wedge}\mathbf{1}_{n_1} & & & \end{pmatrix} \rtimes w_\sigma \tag{5.11}$$

となる。一行目は $W_{\mathbb{C}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現としての既約分解を表しており、ρ_d は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約 d 次元表現である。なおこのパラメタの S 群は

$$S_\phi := \mathrm{Cent}(\phi, \widehat{G}) = Z(\widehat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 \mathbf{1}_{n_1} & & & \\ & \epsilon_2 \mathbf{1}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon_r \mathbf{1}_{n_r} \end{pmatrix} \,\middle|\, \epsilon_i = \pm 1 \right\}$$

[9] ここでは正整数の列 $(\underline{n}) = (n_1, \ldots, n_r)$ で $\sum_{i=1}^r n_i = n$ となるものを n の分割と呼んでおり、n_j が単調減少であることは要求していない。

となる。

対応する A パケットは導来函手加群として構成される [Vog81]。Weyl 群についての 4.7 の記号を思い出そう。$w \in \Omega(G,T)$ に対して $L_w := n(w)^{-1}Ln(w)$ は w の $\mathrm{Norm}(T,G)$ での代表元 $n(w)$ の取り方によらず定まる。$n(w)\sigma(n(w))^{-1} \in T(\mathbb{C}) \subset L(\mathbb{C})$ だから、$\mathrm{Ad}(n(w)) : L_w \xrightarrow{\sim} L$ は内部ひねりである。また $Q_w := n(w)^{-1}Q_{(\underline{n})}n(w) \subset G_{p,q}$ は θ 安定放物型部分群である。このとき $i(w) := \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{K}_{p,q}/\boldsymbol{K}_{p,q} \cap L_w(\mathbb{R}))/2$ として

$$\pi_{L_w}(\xi) := A_{\mathfrak{q}_w}(w^{-1}(\lambda)_{L_w}) = \mathcal{R}^{i(w)}_{\mathfrak{q}_w}(w^{-1}(\lambda)_{L_w})$$

とおく。右辺の導来函手加群の定義については [Vog81] を参照せよ。これはユニタリ化可能な既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q})$ 加群で [Vog84]、$\pi_{L_w}(\xi) \simeq \pi_{L_{w'}}(\xi)$ であるためには $w' \in \Omega(L,T)wW(G_{p,q},T)$ であることが必要十分である [AJ87]。Adams-Johnson は $\phi_{L,\xi}$ に付随する A パケットを

$$\Pi_{\phi_{L,\xi}}(G_{p,q}) := \{\pi_{L_w}(\xi) \,|\, w \in \Omega(L,T)\backslash\Omega(G,T)/W(G_{p,q},T)\}$$

と定義した。

注意 5.7. L, L' が (条件 (5.10) を満たす) 異なる Levi 部分群であっても $\Pi_{\phi_{L,\xi}}(G_{p,q})$ と $\Pi_{\phi_{L',\xi}}(G_{p,q})$ が交わることもある。例えば $L = T$ のとき $\Pi_{\phi_{T,\lambda}}(G_{p,q})$ は例 4.7 で扱った離散系列表現の L パケットになるが、$L \neq T$ であっても L_w がコンパクトである場合には $\pi_{L_w}(\xi) \in \Pi_{\phi_{L,\xi}}(G_{p,q})$ は離散系列表現、つまり $\Pi_{\phi_{T,\lambda}}(G_{p,q})$ の元になる。

この記述のメリットは $\pi_{L_w}(\xi)$ たちの $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q})$ コホモロジーがわかりよいことである。

$$V(\phi_{L,\xi}) = V^{G_{p,q}}(\phi_{L,\xi}) := \bigoplus_{\pi \in \Pi_{\phi_{L,\xi}}(G_{p,q})} \mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}_{p,q}; \pi \otimes \xi)$$

とおく。志村多様体を構成するときのように

$$h : \mathbb{C}^\times \ni z \longmapsto \begin{pmatrix} z\mathbf{1}_p & \\ & \bar{z}\mathbf{1}_q \end{pmatrix} \in G_{p,q}(\mathbb{R})$$

とおき、それに付随する $G_{p,q}$ のコウェイト $\mu_h : \mathbb{G}_m \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t\mathbf{1}_p & \\ & \mathbf{1}_q \end{pmatrix} \in G_{p,q}$ を取る。これは T を経由し、その Langlands 双対トーラス $\widehat{T} \subset \widehat{G}$ のウェイト

$$\mu_h : \widehat{T} \ni \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix} \longmapsto t_1 t_2 \cdots t_p \in \mathbb{C}^\times$$

と同一視される。この μ_h を最高ウェイトに持つ $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約有限次元表現 r_h は p 階交代テンソル積表現 $\wedge^p$ にほかならない。

命題 5.8 ([Art89], 命題 9.1)**.** $V(\phi_{L,\xi})$ の Lefschetz 分解における $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 作用は (表現として) $r_h \circ \phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \simeq \wedge^p(\bigoplus_{i=1}^r \rho_{n_i})$ に同型になる。

これと松島・村上の公式 (の Borel による拡張) を組み合わせて、$\Pi_{\phi_{L,\xi}}(G_{p,q})$ に無限成分を持つ保型表現が適切な志村多様体のコホモロジーのどの次数に寄与するかは $r_h \circ \phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ のウェイトから決まることがわかる。

Euler-Poincaré 函数　さて、一時的に G を $\mathbb{R}$ 上定義された一般の連結簡約線型代数群、θ をその位数が有限な自己同型としよう。$G(\mathbb{C})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ と書き、$G(\mathbb{R})$ の θ 不変な極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}$ を固定する。やはり $G(\mathbb{R})$ の既約有限次元表現 ξ に対して ξ 係数 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ コホモロジー群 $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi \otimes \xi)$ が定まる。以下では簡単のために係数表現 ξ が自明な場合のみを解説する。

θ は $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ コホモロジー群 $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi)$ に作用するからその *Lefschetz* 数

$$\mathrm{ep}_\theta(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi) := \sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\theta | \mathrm{H}^i(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi))$$

が考えられる。特に θ が恒等射のとき、Lefschetz 数は Euler-Poincaré 標数 $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi)$ である。

命題 5.9 ([Lab91] 命題 12)**.** $f^G_{\mathrm{EP},\theta} = f_{\mathrm{EP},\theta} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}))$ で次を満たすものがある。任意の既約 θ 不変 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 π に対して、ある $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 同型 $\pi(\theta) : \theta(\pi) \xrightarrow{\sim} \pi$ があって

$$\mathrm{tr}\big(\pi(f_{\mathrm{EP},\theta}) \circ \pi(\theta)\big) = \mathrm{ep}_\theta(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi)$$

が成り立つ。なお $G(\mathbb{R})$ が離散系列表現を持たないときには、任意の既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 π に対して $f_{\mathrm{EP,id}} = 0, \mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}; \pi) = 0$ である。

注意 5.10. (i) $f_{\mathrm{EP},\theta}$ は指標での値しか指定されていないので函数としては一意ではない。(ii) $\mathrm{tr}\big(\pi(f_{\mathrm{EP},\theta}) \circ \pi(\theta)\big)$ の定義に用いられる $G(\mathbb{R})$ 上の不変測度 dg の取り方にも依存している。ただし $f_{\mathrm{EP},\theta}(1)\, dg$ は G, θ のみから定まる。

命題の $f_{\mathrm{EP},\theta}$ を (G, θ) の *Lefschetz* 函数という。θ が恒等射のときは *Euler-Poincaré* 函数と呼ばれる。Euler-Poincaré 函数 $f_{\mathrm{EP}} = f_{\mathrm{EP,id}}$ の存在は Clozel-Delorme によって証明された [CD90, 定理 3]。非アルキメデス局所体上の Euler-Poincaré 函数の類似は Kottwitz によって構成され、玉河数についての Weil の予想の証明に用いられた [Kot88]。そこでカギとなったのは Euler-Poincaré 函数の任意の半単純元 γ での軌道積分が計算できることであった。すなわち p 進体 F 上の連結簡約群 G の Euler-Poincaré 函数を f_{EP} と書く。半単純な $\gamma \in G(F)$ の中心化群 $I_\gamma(F)$ 上の不変測度として Serre の Euler-Poincaré測度[10][Ser71] di を取れば、

$$O_\gamma(f_{\mathrm{EP}}) := \int_{I_\gamma(F)\backslash G(F)} f_{\mathrm{EP}}(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dg}{di} = 1$$

が成り立っている。

アルキメデス的な場合にも Lefschetz 函数の θ 半単純元での軌道積分が計算できる。$G(\mathbb{R})$ が離散系列表現を持たないときには全ては 0 であるから、そうでないとしてよい。Euler-Poincaré測度の代わりに、無限小指標が 0 である離散系列表現の形式次数が 1 となる標準不変測度 dg を採用すれば、

$$f_{\mathrm{EP}}(1) = (-1)^{q(G)} \frac{|\Omega(G, T)|}{|W(G, T)|} = (-1)^{q(G)} |\mathfrak{D}(T, G; \mathbb{R})| \tag{5.12}$$

[10] Euler-Poincaré測度は負値だったり恒等的に消えていることもある。

となる。ただし $q(G) := \dim_{\mathbb{R}}(G(\mathbb{R})/\boldsymbol{K})/2$ である。T は $\boldsymbol{K}$ に含まれる G の極大トーラスであり、$\Omega(G,T), W(G,T)$ はその Weyl 群および相対 Weyl 群を表す。

命題 5.11 ([CL99] 定理 A.1.1)**.** (i) $\delta \in G(\mathbb{R})$ を θ 半単純、すなわち $\mathrm{Ad}(\delta)\circ\theta$ が $\mathfrak{g}$ に半単純線型写像を引き起こす元とする。その θ 中心化群を $I_{\delta,\theta} := G^{\mathrm{Ad}(\delta)\circ\theta}$ と書くとき、

$$O_{\delta,\theta}(f_{\mathrm{EP},\theta}) := \int_{I_{\delta,\theta}(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})} f_{\mathrm{EP},\theta}(g^{-1}\delta\theta(g))\,dg = f_{\mathrm{EP}}^{I_{\delta,\theta}}(1)$$

が成り立つ。
(ii) 特に $I_{\delta,\sigma}(\mathbb{R})$ が離散系列表現を持たなければ $O_{\delta,\theta}(f_{\mathrm{EP},\theta}) = 0$ である。

5.3　安定跡公式の比較

さて 5.1 節の状況に戻る。特別なテスト函数を取ることで、様々な予想を仮定せずに跡公式の安定化 (5.5), (5.6) を著しく単純化できる。

跡公式の単純化　まずアルキメデス素点でのテスト函数を考える。$G(F_\infty) = \prod_{v|\infty} G_{p_v,q_v}(\mathbb{R})$, $(p_v+q_v = n)$, $L(F_\infty) = \prod_{v|\infty} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書けることに注意しよう。前節の結果を $(G(\mathbb{R}),\theta) = (L(F_\infty),\tilde{\sigma})$ に適用して、$f_{\mathrm{EP},\sigma}^L = f_{\mathrm{EP},\sigma} \in \mathcal{H}(L(F_\infty))$ を得る。σ 半単純な $\delta \in L(F_\infty)$ が σ 楕円的とは、$Z(I_{\delta,\sigma})(F_\infty)/Z(G)(F_\infty)$ がコンパクトなこととする。

(a) δ が σ 楕円的でなければ、$I_{\delta,\sigma}(F_\infty)$ は離散系列表現を持たないので $O_{\delta,\theta}(f_{\mathrm{EP},\sigma}) = 0$ である。

一方 δ が σ 楕円的なとき、その安定共役類の記述 (5.8) はこの局所的な状況でも成り立つ。やはり単射にはほど遠いが自然な全射

$$\mathfrak{D}(I_{\delta,\sigma}, L; F_\infty) \simeq \prod_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, I_{\delta,\sigma}) \twoheadrightarrow \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; F_\infty) \simeq \prod_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{U}_1)$$

がある。右辺は群だからその指標 $\kappa \in \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; F_\infty)^D$ を使って、κ 軌道積分

$$O_{\delta,\sigma}^\kappa(f) := \sum_{[\partial x]\in\mathfrak{D}(I,L;F_\infty)} \kappa([\partial x])(-1)^{q(I^x)} O_{\delta^x,\sigma}(f)$$

が定義できる。ここでコサイクル $(\partial x)_\tau = x\tau(x)^{-1}$ の $\mathfrak{D}(I,L;F_\infty)$ でのクラスを $[\partial x]$ と書いており、$\delta^x := x^{-1}\delta\tilde{\sigma}(x)$, $I := I_{\delta,\sigma}$, $I^x := I_{\delta^x,\sigma}$ と略記している。特に $f = f_{\mathrm{EP},\sigma}$ とすると、

$$\begin{aligned} O_{\delta,\sigma}^\kappa(f_{\mathrm{EP},\sigma}) &= \sum_{[\partial x]\in\mathfrak{D}(I,L;F_\infty)} \kappa([\partial x])(-1)^{q(I^x)} f_{\mathrm{EP}}^{I^x}(1) \quad (\text{命題 5.11 から}) \\ &= \sum_{[\partial x]\in\mathfrak{D}(I,L;F_\infty)} \kappa([\partial x])|\mathfrak{D}(T^x, I^x; F_\infty)| \end{aligned}$$

である。ここで T^x は I^x の非等方極大トーラスである。必要なら x, T^x を取り替えて、∂x が T 値で $T^x = x^{-1}Tx$ であるとしてよい。$\eta_{L,T} : \prod_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, T) \to \prod_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, L)$ を自然な射とすると、任意の $[\partial x] \in \mathfrak{D}(I, L; F_\infty)$ に対して

$$\mathfrak{D}(T^x, I^x; F_\infty) \ni [\partial g] \longmapsto [\partial(xg)] \in \eta_{L,T}^{-1}([\partial x]) \subset \mathfrak{D}(T, L; F_\infty)$$

は全単射であり、

$$\mathfrak{D}(T, L; F_\infty) = \coprod_{[\partial x] \in \mathfrak{D}(I, L; F_\infty)} \eta_{L,T}^{-1}([\partial x])$$

である。以上から Lefschetz 函数の κ 積分は

$$O^\kappa_{\delta,\sigma}(f_{\mathrm{EP},\sigma}) = \sum_{[\partial x] \in \mathfrak{D}(T, L; F_\infty)} \kappa([\partial x]_L) \tag{5.13}$$

と書ける。ただし $[\partial x]_L$ は $[\partial x]$ の $\prod_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, L)$ での像を表し、今の場合には $\mathfrak{D}(T, L; F_\infty) = \prod_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, T)$ である。

例 5.12. 例えば $F = \mathbb{Q}$ で $\delta = 1$ の場合、$I = L^{\tilde{\sigma}}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}$ はある n 変数実ユニタリ群である。$L = \mathrm{GL}_{n,\mathbb{C}}$ だから I^x はすべての実ユニタリ群の同型類 $G_{p,q}, (p+q = n)$ たちを走る。このとき

$$\mathfrak{D}(T^x, I^x; \mathbb{R}) = \Omega(G, T)/W(G_{p,q}, T) \simeq \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$$

は (p, q) に関するシャッフルの集合 $\mathrm{Shuff}(p, q)$ と同一視される。上の直和分解は例 4.7 の

$$\coprod_{p=0}^{n} \mathrm{Shuff}(p, q) \ni s \longmapsto \Big(\bigotimes_{j \in \mathrm{supp}(s)} \mathrm{sgn} \otimes \bigotimes_{j \notin \mathrm{supp}(s)} \mathbb{1} \Big) \in \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D \cong \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, T)$$

にほかならない。 □

Schur の直交関係と (5.13) から次の帰結を得る。

(b) 非自明な κ に対しては $O^\kappa_{\delta,\sigma}(f_{\mathrm{EP},\sigma}) = 0$. すなわち $f_{\mathrm{EP},\sigma}$ は安定的である。

(c) $\kappa = \mathbb{1}$ のとき、つまり σ 安定積分は $SO_{\delta,\sigma}(f_{\mathrm{EP},\sigma}) = |\mathfrak{D}(T, L; F_\infty)| = 2^n$ は δ によらない定数函数である。

さて $T^{L,\sigma}(f_E)$ の幾何展開 (5.2) を安定共役類ごとにまとめて書くと次のようになる。

$$T^{L,\sigma}(f_E) = \sum_{\{\delta\} \in B^\times/\mathrm{Ad}_\sigma(L(\bar{F}))} J_Z(\sigma) \sum_{\delta' \in C_\delta(F)/\mathrm{Ad}_\sigma(L(F))} \tau(I_{\delta',\sigma}) O_{\delta',\sigma}(f_E)$$

$I_{\delta,\sigma}, I_{\delta',\sigma}$ は互いの内部形式なので玉河数を共有するから

$$= \sum_{\{\delta\} \in B^\times/\mathrm{Ad}_\sigma(L(\bar{F}))} J_Z(\sigma)\tau(I_{\delta,\sigma}) \sum_{[\partial x] \in \mathfrak{D}(I_{\delta,\sigma}, L; F)} O_{\delta^x,\sigma}(f_E)$$

$$= \sum_{\{\delta\} \in B^\times/\mathrm{Ad}_\sigma(L(\bar{F}))} J_Z(\sigma)\tau(I_{\delta,\sigma}) \frac{1}{|\mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F)|} \sum_{\kappa \in \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F)^D} O^\kappa_{\delta,\sigma}(f_E).$$

上で有限アーベル群 $\mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F)$ (5.9) 上の Plancherel 公式[11]を使った。$I := I_{\delta,\sigma} \subset L$ と略記する。今の状況では完全列からなる可換図式

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{E}(I, L; F) & \longrightarrow & \mathfrak{E}(I, L; \mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathfrak{E}(I, L; \mathbb{A}/F) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(F, I) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}, I) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, I) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(F, L) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}, L) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, L)
\end{array}
$$

がある [Lab99, p.43] から、$\mathfrak{E}(I, L; \mathbb{A}/F) = \ker[\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, I) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, L)]$ である。$L = \mathrm{Res}_{E/F}\, B^\times$ であるから最下列の項は全て消えていることに注意する。また $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, G)$ の定義はしないが、Kottwitz の Tate-中山射 (4.2) の改良版として全単射 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, G) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D$ があること ([Lab99, 命題 1.7.3]) が重要である[12]。玉河数についての Weil の予想と相対玉河数についての小野・Sansuc の結果 ([今野 b] とその引用文献を参照) から

$$
\tau(I) = \frac{|\pi_0(Z(\widehat{I})^\Gamma)|}{Ш^1(\Gamma, Z(\widehat{I}))} = |\mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, I)| = |\mathfrak{E}(I, L; \mathbb{A}/F)|
$$

を得る。よって

$$
T^{L,\sigma}(f_E) = \sum_{\{\delta\} \in B^\times/\mathrm{Ad}_\sigma(L(\bar{F}))} J_Z(\sigma) \sum_{\kappa \in \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F)^D} O^\kappa_{\delta,\sigma}(f_E) \tag{5.14}
$$

である。

さてここでテスト函数を $f_E = f_{\mathrm{EP},\sigma} \otimes f_{E,\mathrm{fin}}$, $(f_{E,\mathrm{fin}} \in \mathcal{H}(L(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})))$ の形のものに取る。Lefschetz 函数の性質 (a) から、上で $L(F_\infty)$ の元として σ 楕円的でない δ の項は全て消える。次に $L(F_\infty)$ で σ 楕円的な δ を考えよう。すると $I = I_{\delta,\sigma}$ は E/F に関するユニタリ群 (の内部形式) の直積となり、その余中心 D_I は 1 変数ユニタリ群 U_1 の直積である: $D_I \simeq \mathrm{U}_1^m$. よって自然な射

$$
\mathfrak{E}(I, L; F_\infty) = \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(F_v, I) \to \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}) \to \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}/F, I)
$$

は $F_\infty^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E_\infty^\times) \twoheadrightarrow \mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ となって特に全射である。これは Pontrjagin 双対での単射 $\mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F)^D \hookrightarrow \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; F_\infty)^D$ を与え、特に非自明な $\kappa \in \mathfrak{E}(I_{\delta,\sigma}, L; \mathbb{A}/F)^D$ は $\mathfrak{E}(I, L; F_\infty)$ 上でも非自明だから、対する $O^\kappa_{\delta,\sigma}(f_E)$ のアルキメデス成分も (b) から消えている。結局 (5.14) は

$$
T^{L,\sigma}(f_E) = \sum_{\{\delta\} \in B^\times/\mathrm{Ad}_\sigma(L(\bar{F}))} J_Z(\sigma) SO_{\delta,\sigma}(f_E) \tag{5.15}
$$

[11]単位元での Dirac 分布の Fourier 変換が不変測度であるという式を Plancherel 公式という。

[12](4.2) は中心で割った $\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z(\bar{F}))$ を扱っている。共役作用は中心上自明だから通常の内視論の目的にはこれで十分であった。しかしひねり付き共役 $\mathrm{Ad}_\theta(g)x = gx\theta(g)^{-1}$ は $Z(G)$ 上非自明なので Labesse の全単射が (Tate-中山双対性の拡張としては不自然だが) 不可欠である。

と単純化する。

G の跡公式 (5.4) でも同様の議論を行う。すなわちテスト函数として $f = f_{\mathrm{EP}}^G \otimes f_{\mathrm{fin}}$, ($f_{\mathrm{fin}} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$) の形のものを取る。すると (5.4) の幾何サイドは

$$T^G(f) = \sum_{\{\gamma\} \in G(F)/\mathrm{Ad}(G(\bar{F}))} \tau(G) SO_\gamma(f) \tag{5.16}$$

となる。

跡公式の安定化と比較 跡公式 $T^{L,\sigma}(f_E)$ の安定化には軌道積分の移行についての予想5.4, 5.5 が必要であった。しかし単純化した (5.15) の場合には κ が自明、つまり $s = s_n = 1$ に対する内視データ $(H_n = G^*, 1, b_{E/F})$ の場合のみがあればよい。

命題 5.13 ([Lab99] 定理 3.3.1)**.** 非アルキメデス素点 v での $(L_v, \tilde{\sigma}, G_v^*)$ に対しては予想 5.4 は正しい。すなわち、任意の $f_{E_v} \in C_c^\infty(L(F_v))$ に対して $f_v^* \in C_c^\infty(G^*(F_v))$ で

$$SO_{\gamma_*}(f^*) = \begin{cases} SO_{\delta,\sigma}(f_{E_v}) & \gamma^* \text{ が } \delta \text{ のノルムのとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

を満たすものがある。

証明. (スケッチ) 証明の第一段階はひねり付きの場合の Harish-Chandra の降下である。σ 半単純元 δ を取り、$\theta := \mathrm{Ad}(\delta) \circ \tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}(L)$ とおく。$G(F_v)$ の元 g で $\mathrm{Ad}(g) \circ \theta$ が $\mathfrak{l}(\theta) := (1-\theta)\mathfrak{l}$ 上に固定点を持たないものの集合を $I_{\delta,\sigma}(F_v)'$ として、開稠密部分集合 $\Omega_\theta := \mathrm{Ad}_\theta(L(F_v)) I_{\delta,\sigma}(F_v)' \subset L(F_v)$ を導入する。すると全射線型写像 $C_c^\infty(L(F_v) \times I_{\delta,\sigma}(F_v)') \ni \alpha(g,m) \mapsto \varphi(x) \in C_c^\infty(\Omega_\theta)$ で

$$\int_{L(F_v)} \int_{G(F_v)} \alpha(g,m) \Phi(gm\theta(g)^{-1})\, dm\, dg = \int_{L(F_v)} \varphi(x)\Phi(x)\, dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty(L(F_v))$$

を満たすものがある。これは単射ではないが

$$\phi(m) := \int_{L(F_v)} \alpha(g,m)\, dg \in C_c^\infty(I_{\delta,\sigma}(F_v)')$$

は φ から一意に定まる。このとき Ω_θ 上の任意の θ 共役不変分布 T に対して、$I_{\delta,\sigma}(F_v)$ 上の (共役) 不変分布 σ_T で

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \sigma_T, \phi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega_\theta).$$

を満たすものがある。

軌道積分の移行予想は正則でない σ 半単純元 δ のまわりの局所的なふるまいについての主張だが、この降下によりそれは $I_{\delta,\sigma}(F_v)$ 上の軌道積分の原点のまわりでの局所的なふるまいに帰着される。つまり δ のノルムである $\gamma_* \in G^*(F_v)$ を取って、$I_{\delta,\sigma}(F_v)$ と $I_{\gamma_*}(F_v) = \mathrm{Cent}(\gamma_*, G^*(F_v))$ 上の軌道積分の原点のまわりでの軌道積分のふるまいを比較すればよい。

ところが $I_{\delta,\sigma}$ と I_{γ_*} は互いの内部形式だから、同じ準分裂内部形式を I^* を共有する。注意 5.6 (i) で触れた Waldspurger の結果 [Wal97] により、自明な基本補題からこの場合の安定軌道積分の移行が従う。よって $I_{\delta,\sigma}(F_v)$ と $I_{\gamma_*}(F_v)$ 上の安定軌道積分の原点のまわりでの挙動は整合している。 □

命題 5.14. (i) $f_E = f_{\mathrm{EP},\sigma} \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_{E_v} \in \mathcal{H}(L(\mathbb{A}))$, $f^* = f_{\mathrm{EP}}^{G^*} \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_v^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ を、ほとんど全ての不分岐素点では $f_v^* = b_{E/F}(f_{E_v}^*)$, 残りの有限素点では命題 5.13 の通りに取れば

$$T^{L,\sigma}(f_E) = ST^{G^*}(f^*)$$

が成り立つ。
(ii) $f = f_{\mathrm{EP}}^G \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $f^* = f_{\mathrm{EP}}^{G^*} \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_v^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ を、不分岐素点では $f_v = f_v^*$, 残りの有限素点では移行予想が成り立つように取れば (注意 5.6 (i) からこれは可能である) 次が成り立つ。

$$T^G(f) = ST^{G^*}(f^*).$$

証明. (i) のみ証明する。(ii) はずっと簡単である。この場合の基本補題 5.5 は [Clo90], [Lab90] で証明されている。よって $f_E \in \mathcal{H}(L(\mathbb{A}))$, $f^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ を命題の通りに取れば

$$SO_{\gamma_*}(f^*) = \begin{cases} SO_{\delta,\sigma}(f_E) & \gamma_* \text{ が } \delta \in L(F) \text{ のノルムのとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

が成り立つ。しかも $f_{\mathrm{EP}}^{G^*}$ の性質 (a), (b) から、f^* に対する G^* の Arthur-Selberg 跡公式の幾何サイドは

$$T^{G^*}(f^*) = \sum_{\{\gamma\} \in G^*(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))} \tau(G^*) SO_{\gamma_*}(f^*)$$

と単純化する。最後にユニタリ群の玉河数 $\tau(G^*)$ は $2 = J_Z(\sigma)$ に等しいことに注意すれば主張が従う。 □

そこで $f_E = f_{\mathrm{EP},\sigma} \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_{E_v} \in \mathcal{H}(L(\mathbb{A}))$, $f = f_{\mathrm{EP}}^G \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を命題 5.14 で同じ $f^* = f_{\mathrm{EP}}^{G^*} \otimes \bigotimes_{v \nmid \infty} f_v^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ が付随するように取れば、

$$T^{L,\sigma}(f_E) = ST^{G^*}(f^*) = T^G(f) \tag{5.17}$$

が成り立つ。

5.4 Kottwitz の結果とベースチェンジ

いよいよ跡公式の等式 (5.17) からベースチェンジリフトを引き出す。問題は分岐素点でのテスト函数に強い制限が付いているために、そこでの表現の特定ができないことである。従ってこの手法では一般にリフトの不分岐成分だけが決まる、いわゆる弱いリフトしか得られない。

結果　$G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ の有限個を除く非アルキメデス素点 v での成分 π_v は不分岐である。特に E で分解しない v では次が成り立っている。

- E_v/F_v は不分岐で G_v は準分裂ユニタリ群 G^* に同型である。

- G^* の上三角 Borel 部分群を $B_0 = T_0 U_0$ として、不分岐擬指標

$$\underline{\chi} : T_0(F_v) \ni \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_{[n/2]}, *, \dots, *) \longmapsto \chi_1(t_1) \cdots \chi_{[n/2]}(t_{[n/2]}) \in \mathbb{C}^\times$$

  ($\chi_i : E_v^\times / \mathcal{O}_{E_v}^\times \to \mathbb{C}^\times$) で $|\chi_1(\varpi_v)| \leq |\chi_2(\varpi_v)| \leq \cdots \leq |\chi_{[n/2]}(\varpi_v)|$ を満たすものがあって、π_v は放物型誘導表現 $I_{B_0}^{G^*}(\underline{\chi})$ の $\boldsymbol{K}_v$ 不変ベクトルを持つ既約商である。

ここで $\mathcal{O}_{E_v} \subset E_v$ は整数環、ϖ_v はその素元である。このとき π_v を含む L パケットの L パラメタは

$$\varphi_{\underline{\chi}}|_{W_{E_v}} = \mathrm{diag}(\chi_1, \dots, \chi_{[n/2]}, 1^{n-2[n/2]}, \chi_{[n/2]}^{-1}, \dots, \chi_1^{-1}) \times \mathrm{id}_{W_{E_v}}$$
$$\varphi_{\underline{\chi}}(w_\sigma) = \mathrm{diag}(\chi_1(w_\sigma^2), \dots, \chi_{[n/2]}(w_\sigma^2), 1, \dots, 1) \rtimes w_\sigma$$

で与えられる。($\varphi_{\underline{\chi}}|_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{R})}$ は自明である。) χ_i たちは不分岐であるから、実は $\varphi_{\underline{\chi}}$ は $\varphi_{\underline{\chi}}(w_\sigma)$ だけで決まってしまうことに注意する。

定義 5.15. $L(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 $\mathit{\Pi} = \bigotimes_v \mathit{\Pi}_v$ が $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ の弱いベースチェンジリフトであるとは、次が成り立つこととする。
(a) 有限個を除く E で分解しない有限素点 v で $b_{E/F}(\varphi_{\underline{\chi}}(w_\sigma))$ と $t_{\mathit{\Pi}_v} \rtimes w_\sigma$ は $\widehat{L}$ 共役。
(b) 有限個を除く E で分解する有限素点 v で $\mathit{\Pi}_v \simeq \pi_v \otimes \sigma(\pi_v)^\vee$.

ここからは結果を述べるために係数表現を復活させよう (5.2 節参照)。各アルキメデス素点 v での B_{p_v,q_v} に関して支配的なウェイト $\lambda_v = (\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n}) \in \mathbb{Z}^n$ を固定し、$\theta_n(\lambda_v)$ を $B_{p,q}$ 最高ウェイトとする $L(F_v) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約有限次元表現を ξ_{E_v}、その $G(F_v) = \mathrm{U}_{p_v,q_v}(\mathbb{R})$ への制限を ξ_v で表す。$G(F_\infty)$, $L(F_\infty)$ それぞれの既約表現 $\xi := \bigotimes_{v|\infty} \xi_v$, $\xi_E := \bigotimes_{v|\infty} \xi_{E_v}$ を係数とするコホモロジー

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty \otimes \xi), \quad \mathrm{H}^*(\mathfrak{l}_\infty, \boldsymbol{K}_{L,\infty}; \mathit{\Pi}_\infty \otimes \xi_E)$$

が考えられる。$G(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_{\mathrm{fin}}$ が ξ コホモロジー的とは、$\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty \otimes \xi) \neq 0$ となることとする。同様の定義が $L(\mathbb{A}) = B_{\mathbb{A}_E}^\times$ の保型表現にも適用される。以上のもとでこの原稿の主定理は次のように述べられる。

定理 5.16. ある素点 v で $B_v = B \otimes_F F_v$ が斜体であるとする。$G(\mathbb{A})$ の ξ コホモロジー的保型表現 $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ に対して、$L(\mathbb{A}) = B_{\mathbb{A}_E}^\times$ の保型表現 $\mathit{\Pi} = \bigotimes_v \mathit{\Pi}_v$ で

(i) $\mathit{\Pi}$ は π の弱いベースチェンジリフトである。

(ii) $\mathit{\Pi}$ は ξ_E コホモロジー的である。

以下この節ではこの定理を証明する。ここでも (記号を準備していないので) 係数 ξ が自明な場合で説明する。

跡公式の適用　素点の有限集合 S を十分大きく取って、$v \notin S$ で π_v は不分岐であるようにできる。S の外で不分岐な $\pi' \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ に対して、$v \nmid \infty, \notin S$ では $G(F_v)$ の不分岐 Hecke 環からの $\mathbb{C}$ 代数準同型

$$\chi_{\pi'_v} : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G(F_v)) \ni h_v \longmapsto \mathrm{tr}\pi'_v(h_v) = h_v^\vee(\varphi_{\pi'_v}(w_\sigma)) \in \mathbb{C}$$

が定まる。ただし $h_v^\vee$ は h_v の佐武同型による像 (13 ページ参照) で $\varphi_{\pi'_v}$ は定義 5.15 の直前に用意した不分岐な π'_v の L パラメタである。そこで $\mathbb{C}$ 代数準同型 $\chi_{\pi'^S} : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}^S}(G(\mathbb{A}^S)) \to \mathbb{C}$ を $\bigotimes_{v \notin S} h_v \mapsto \prod_{v \notin S} \chi_{\pi'_v}(h_v)$ により定める。同様に S の外で不分岐で σ 不変な $\mathit{\Pi} \in \Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma = \Pi(L(\mathbb{A}))^\sigma$ に対しても

$$\chi_{\mathit{\Pi}_v,\sigma} : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v)) \ni h_{E_v} \longmapsto \mathrm{tr}\big(\mathit{\Pi}_v(h_{E_v}) \circ \mathit{\Pi}_v(\sigma)\big) \in \mathbb{C}$$

および $\chi_{\mathit{\Pi}^S,\sigma} : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_L^S}(L(\mathbb{A}^S)) \to \mathbb{C}$ が定まる。ここで $\mathit{\Pi}_v$ の実現 $(\mathit{\Pi}_v, \mathcal{V})$ 上の $L(F_v)$ 同型 $\mathit{\Pi}_v(\sigma) : (\sigma(\mathit{\Pi}_v), \mathcal{V}) \to (\mathit{\Pi}_v, \mathcal{V})$ は (定数倍を除いて一意な) $\boldsymbol{K}_{L,v}$ 不変ベクトルを自分自身に移すものに取っている。従って $h_{E_v} \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v))$ に対しては $\chi_{\mathit{\Pi}_v,\sigma}(h_{E_v}) = \mathrm{tr}\mathit{\Pi}_v(h_{E_v}) = h_{E_v}^\vee(t_{\mathit{\Pi}_v})$ となり、$\chi_{\mathit{\Pi}^S,\sigma}$ は $\mathbb{C}$ 代数準同型である。

S に含まれない v での $G(F_v)$ 不分岐表現 π'_v に対しては $L(F_v)$ へのベースチェンジ $\mathit{\Pi}_v$ が定義 5.15 の条件により定義される。これを $b_{E/F}(\pi'_v) := \mathit{\Pi}_v$ と書く。このときベースチェンジ射 $b_{E/F} : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L(F_v)) \to \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G(F_v))$ の定義 (13 ページ) から

$$\chi_{\pi'_v}(b_{E/F}(h_{E_v})) = \chi_{b_{E/F}(\pi'_v),\sigma}(h_{E_v}) \tag{5.18}$$

が成り立つ。

さて $f = f_{\mathrm{EP}} \otimes f_S \otimes h^S$, $(f_S \in \mathcal{H}(G(F_S))$, $h^S \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}^S}(G(\mathbb{A}^S))$ に対する跡公式 (5.4) のスペクトルサイドは

$$T^G(f) = \sum_{\substack{\pi' \in \Pi(G(\mathbb{A})) \\ S\text{ の外で不分岐}}} m(\pi')\mathrm{tr}\pi'_\infty(f_{\mathrm{EP}})\mathrm{tr}\pi'_S(f_S)\chi_{\pi'^S}(h^S)$$

となる。さらに開コンパクト部分群 $K_S \subset G(F_S)$ を十分小さく取って、$\pi_S^{K_S} \neq 0$ であるとしてよい。f_S として K_S の特性函数 1_{K_S} を取れば、上はさらに

$$T^G(f) = \sum_{\substack{\pi' \in \Pi(G(\mathbb{A})) \\ S\text{ の外で不分岐}}} m(\pi')\mathrm{ep}(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty) \dim \pi_S^{K_S} \cdot \chi_{\pi'^S}(h^S)$$

と書ける。

一方、K_S をさらに小さく取ることで $1_{K_S} \in \mathcal{H}(G(F_S))$ に付随する $f_S^* \in \mathcal{H}(G^*(F_S))$ と命題 5.13 で対応する $f_{E,S} \in \mathcal{H}(L(F_S))$ が存在するようにできる。そこで $f_E = f_{\mathrm{EP},\sigma} \otimes f_{E,S} \otimes$

$h_E^S, (h_E^S \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_L^S}(L(\mathbb{A}^S)))$ を取り、$h^S := b_{E/F}(f_E^S) \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}^S}(G(\mathbb{A}^S))$ とおけば、(5.17) から

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathit{\Pi}\in\Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma \\ S\text{ の外で不分岐}}} m(\mathit{\Pi})\mathrm{ep}_\theta(\mathfrak{l}_\infty, \boldsymbol{K}_{L,\infty}); \mathit{\Pi}_\infty)\mathrm{tr}\mathit{\Pi}_S(f_{E,S})\chi_{\mathit{\Pi}^S,\sigma}(h_E^S) = T^{L,\sigma}(f_E) \\
&= T^G(f) = \sum_{\substack{\pi'\in\Pi(G(\mathbb{A})) \\ S\text{ の外で不分岐}}} m(\pi')\mathrm{ep}(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty) \dim \pi_S^{K_S} \cdot \chi_{\pi'^S}(h^S) \\
&\overset{(5.18)}{=} \sum_{\substack{\pi'\in\Pi(G(\mathbb{A})) \\ S\text{ の外で不分岐}}} m(\pi')\mathrm{ep}(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty) \dim \pi_S^{K_S} \cdot \chi_{b_{E/F}(\pi'^S),\sigma}(h_E^S)
\end{aligned}$$

が従う。これが任意の $h_E^S \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_L^S}(L(\mathbb{A}^S))$ に対して成立するので、その作用で切り分けて

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathit{\Pi}\in\Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma \\ \mathit{\Pi}^S\simeq b_{E/F}(\pi^S)}} m(\mathit{\Pi})\mathrm{ep}_\theta(\mathfrak{l}_\infty, \boldsymbol{K}_{L,\infty}); \mathit{\Pi}_\infty)\mathrm{tr}\mathit{\Pi}_S(f_{E,S}) \\
&\qquad = \sum_{\substack{\pi'\in\Pi(G(\mathbb{A})) \\ b_{E/F}(\pi'^S)\simeq b_{E/F}(\pi^S)}} m(\pi')\mathrm{ep}(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty) \dim \pi_S^{K_S}
\end{aligned}$$

が得られる。後はこの右辺が消えていないことを保証すれば、左辺に寄与する任意の $\mathit{\Pi} \in \Pi(B^\times(\mathbb{A}_E))^\sigma$ が望む弱いベースチェンジリフトを与える。この右辺の非消滅を保証するのが、以下に解説する Kottwitz の結果である。

ℓ 進表現のウェイトのパリティ　$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi'_\infty)$ は $\dim \mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi'_\infty)$ の交代和だから、$b_{E/F}(\pi'^S) \simeq b_{E/F}(\pi^S)$ なる任意の保型表現 π' に対して、$\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi'_\infty)$ が消えない次数 i のパリティが一定であることを保証すればよい。実は命題 5.8 で見たとおり、一般にはこのパリティは一定していない。例えば $\mathrm{U}_{2,1}$ に付随する志村多様体である Picard モジュラー曲面の 1 次と 2 次の ℓ 進交叉コホモロジーに寄与する A パケットが存在する [LR92, 定理 B]。

ここで効くのが「ある素点 v で $B_v = B \otimes_F F_v$ が斜体である。」という条件である。E_v 上の中心的斜体で第二種対合を持つものは E_v 自身だけだから、この条件中の v は E で分解していることに注意する。

まず仮説的な理由を説明しよう。Arthur の予想によれば $G(\mathbb{A})$ の保型表現 π はある大域 A パラメタ $\phi : L_F \to {}^LG$ に付随する A パケット $\Pi_\phi(G)$ に属するはずである。ユニタリ群でも A パケット単位で見れば強重複度一定理が成り立つと期待されるため、$b_{E/F}(\pi'^S) \simeq b_{E/F}(\pi^S)$ となる保型表現 π' は全て同じ $\Pi_\phi(G)$ に属すると考えられる。$B_v = B \otimes_F F_v$ が斜体である v における局所パラメタ $\phi_v : \mathcal{L}_{F_v} \to \mathcal{L}_F \xrightarrow{\phi} {}^LG_v$ は、$\Pi_{\phi_v}(G_v) = \Pi_{\phi_v}(B_v^\times)$ が空でないことから $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の楕円的 A パラメタでなくてはならない。つまり ϕ_v は $L_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約 n 次元表現だから、$\phi = \varphi \otimes \rho_k$, ($\varphi$ は L_{F_v} の既約 m 次元表現、$n = mk$) と書ける。ところが A パラメタの SL_2 パートは局所と大域で一致しているから、$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \simeq \rho_k^{\oplus m}$ である。よって命題 5.8 から

$$V_\phi = \bigoplus_{\pi_\infty \in \Pi_{\phi_\infty}(G(F_\infty))} \mathrm{H}^*(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty; \pi_\infty)$$

に現れるコホモロジーの次数は、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現 $\bigotimes_{v|\infty} \wedge^{p_v} \rho_k^{\oplus m}$ のウェイトと $G(F_\infty)$ の対称空間の次元 $\sum_{v|\infty} p_v q_v$ (middle degree) の和に含まれる。特にそのパリティは

$$\sum_{v|\infty} p_v q_v + (k+1)\Big(\sum_{v|\infty} p_v\Big) \pmod 2$$

となって一定である。

実際にこの期待は Kottwitz により証明されており [Kot92, 定理 1]、これで Clozel-Labesse のベースチェンジの証明が完了する。