4 Langlands-Arthur の予想とベースチェンジ

ここでは前節の例を踏まえて一般の連結簡約群上の保型形式の記述の期待される形を述べておこう [Art89]。

4.1 局所予想

この節では F を標数 0 の局所体とする。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定し、$\bar{F}/F$ の Galois 群を Γ, Weil 群を W_F と書く。局所 Langlands 群 $\mathcal{L}_F$ を 3.2 節の通りに定義する。

G を F 上定義された連結簡約線型代数群とする。連結簡約 F 代数群 G^* と同型 $\eta_G : G_{\bar{F}} \to G^*_{\bar{F}}$ で

- 任意の $\sigma \in \Gamma$ に対してある $u(\sigma) \in G^*(\bar{F})$ があって $\eta_G \circ \sigma \circ \eta_G^{-1} \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Ad}(u(\sigma))$.
- G^* は準分裂 (*quasisplit*)、すなわち F 上定義された Borel 部分群 B_0 を持つ。

を満たすものがある (G の準分裂内部ひねり)。

例 **4.1.** F 上の n^2 次元中心的単純環 B の乗法群 $B^\times$ を F 代数群と見たもの: $B^\times(R) = (B \otimes_F R)^\times$, ($R$ は可換 F 代数) は GL_n の内部形式である。従って同型 $\eta_{B^\times} : B^\times_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_{n,\bar{F}}$ で任意の σ に対して

$$\eta_{B^\times} \circ \sigma \circ \eta_{B^\times}^{-1} \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Ad}(u(\sigma))$$

となる $u(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\bar{F})$ がある。定義から $\partial u(\sigma,\tau) := u(\sigma)\sigma(u(\tau))u(\sigma\tau)^{-1} \in Z(\mathrm{GL}_n)(\bar{F}) = \bar{F}^\times$ だが、この 2 コサイクル ∂u の Galois コホモロジー群 $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$ でのクラスが B の Brauer 群での不変量であった。 □

G^* の B_0 に含まれる極大トーラス T_0 を止め、その指標格子を $X^*(T_0) = \mathrm{Hom}(T_0, \mathbb{G}_m)$ で表す。T_0 の B_0 での (正の) ルートの集合を $R(B_0, T_0) \subset X^*(T_0)$, その中の単純ルートの集合を $\Delta(B_0, T_0)$ と書く。$\alpha \in \Delta(B_0, T_0)$ に対するコルートの集合を $\Delta^\vee(B_0, T_0) \subset X_*(T_0)$ で表す。ただし $X_*(T_0) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_0)$ は T_0 の余指標格子である。G の (B_0, T_0) についての基底付きルートデータとは、四つ組 $RD(B_0, T_0) = (X^*(T_0), \Delta(B_0, T_0), X_*(T_0), \Delta^\vee(B_0, T_0))$ のこととする。これには Γ が作用している。(B_0, T_0) を取り替えても Γ 作用付きのルートデータの同型類は不変である。G または G^* の L 群とは、半直積 ${}^LG = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ であって

- $\widehat{G}$ は $\mathbb{C}$ 上の連結簡約線型代数群 (の $\mathbb{C}$ 値点の群) でその Borel 部分群と極大トーラスの対 $\mathcal{B} \supset \mathcal{T}$ に対して、ルートデータの同型 $RD(\mathcal{B}, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} RD(B_0, T_0)^\vee$ があるもの。ただし $RD(B_0, T_0)^\vee = (X_*(T_0), \Delta^\vee(B_0, T_0), X^*(T_0), \Delta(B_0, T_0))$ は $RD(B_0, T_0)$ の双対ルートデータである。
- Γ 作用 $\rho_G : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\widehat{G})$ はある $(\mathcal{B}, \mathcal{T})$ を保ち、それが引き起こす $RD(\mathcal{B}, \mathcal{T})$ への Γ 作用は上の同型で $RD(B_0, T_0)$ への Γ 作用の双対になっているもの。

を満たすものとする。

例 **4.2.** E/F を二次拡大としてその Galois 群の生成元を c と書く。E/F に付随する n 変数のユニタリ群 G に対する G^* は

$$G^*(R) = \{g \in \mathbb{M}_n(R \otimes_F E) \,|\, \theta_n(g) = c_R(g)\}, \quad (R \text{ は可換 } F \text{ 代数})$$

で与えられる。ただし

$$\theta_n(g) = \mathrm{Ad}(I_n)^t g^{-1}, \quad I_n := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{n-1} & & & \end{pmatrix}$$

であり、$c_R = c \otimes_F \mathrm{id}_R$ と略記している。実際、G^* の上三角元からなる Borel 部分群 B_0 と対角極大トーラス T_0 は c で保たれる。その L 群 ${}^L G = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ は (3 節参照) $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho_G(w) = \begin{cases} \mathrm{id} & w \in W_E \text{ のとき} \\ \theta_n & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で与えられる。$(\mathcal{B}, \mathcal{T})$ としては上三角 Borel 部分群と対角極大トーラスが取れる。 □

G の Galois コホモロジーと ${}^L G$ の間の関係としては Tate-中山射が基本的である [Kot86, 定理 1.2]。G の導来群の単連結被覆を G_{sc} として (点付き集合の) 完全列

$$\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G) \xrightarrow{\alpha_G} \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \xrightarrow{N^*} \pi_0(Z(\widehat{G}))^D$$

がある。ただし位相群 H に対して $\pi_0(H)$ はその連結成分の群、H^D は Pontrjagin 双対群を表す。$N : Z(\widehat{G}) \to Z(\widehat{G})^\Gamma$ はノルム準同型である。準同型 α_G は像が正規部分群であるような準同型に関しては函手的である。さらに次の性質が成り立つ。

- G がトーラス T のときには $\alpha_T : \mathrm{H}^1(F, T) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D$ は Tate-中山双対性が与える同型[5]に一致している。

- F が非アルキメデス的なときには $\alpha_G : \mathrm{H}^1(F, G) \to \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D$ は同型である。

- G の任意の極大トーラス T に対して次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1(F, T) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(F, G) \\ {\scriptstyle \alpha_T}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_G} \\ \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D & \xrightarrow{\text{制限}} & \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \end{array}$$

[5] T の指標格子を $X^*(T)$ として $X^*(T) \times T \ni (\chi, t) \mapsto \chi(t) \in \mathbb{G}_m$ に付随するカップ積は完全双対性

$$\mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \times \mathrm{H}^1(F, T) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathbb{C}^1$$

を与える。それに完全列 $0 \to X^*(T) \to X^*(T) \otimes \mathbb{C} \to \widehat{T} \to 0$ の Γ コホモロジー列から得られる同型 $\mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \simeq \pi_0(\widehat{T})^\Gamma$ を代入したものがここで言う Tate-中山双対性である。

$\widehat{G}$ の随伴群を $\widehat{G}_{\mathrm{ad}}$, 導来群の単連結被覆を $\widehat{G}_{\mathrm{sc}}$ と書く。G の随伴群 $G_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Int}(G)$ の L 群は $\widehat{G}_{\mathrm{sc}} \rtimes_{\rho_G} W_F$ となる。G^* に対して、連結簡約 F 代数群 G と内部ひねり $\eta_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ の対 (G, η_G) の同型類の集合を $\mathcal{G}$ と書けば、写像

$$\mathcal{G} \ni (G, \eta_G) \longmapsto [\{u(\sigma)\}_\sigma \text{ のクラス}] \in \mathrm{H}^1(F, G^*_{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\alpha_{G^*_{\mathrm{ad}}}} (Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D \tag{4.1}$$

が定まる。これは F が非アルキメデス的なら全単射になるが、一般には全射でも単射でもない。

例 **4.3.** $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ に付随する n 変数ユニタリ群はある分割 $n = p + q$ に対する

$$G_{p,q}(R) := \{g \in \mathrm{GL}_n(R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \,|\, g I_{p,q}{}^t c_R(g) = I_{p,q}\}, \quad I_{p,q} := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & \\ & -\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$$

に同型であった。$\mathcal{G} = \{G_{p,q} \,|\, 0 \le q \le [n/2]\}$ ($[*]$ は Gauss 記号) で $q_* := [n/2]$, $p_* := n - q_*$ として $G^* = G_{p_*,q_*}$ である。このとき (4.1) の左の全単射は

$$\mathcal{G} \ni G_{p,q} \longmapsto u_{p,q}(c) := I_{p,q} I_{p_*,q_*}^{-1} \in \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p_*} & & \\ & -\mathbf{1}_r & \\ & & \mathbf{1}_{q_*-r} \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, 0 \le r \le q_* \right\}$$

となる。一方 $Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma$ は $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) = \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{C})$ の $c(z) = z^{-1}$ の固定点だから、n が偶数のとき $\{\pm 1\}$, 奇数のとき $\{1\}$ である。さらに (4.1) の右の射は

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{p_*,q_*}) \ni u_{p,q}(c) \longmapsto \det u_{p,q}(c) \in \{\pm 1\}/\det(\pm \mathbf{1}_n) \simeq \pi_0(Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D$$

となるから、この場合 (4.1) は内部形式 $G_{p,q}$ たちの情報をほとんど失ってしまう。 □

さて、G の L パラメタおよびそれらの間の同値は 3.2 節と同様に定義される。L パラメタ $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^L G$ に対して、$S_\varphi := \mathrm{Cent}(\varphi, \widehat{G})$ の $\widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ での像 $S_{\varphi,\mathrm{ad}}$ の $\widehat{G}_{\mathrm{sc}} \to \widehat{G} \twoheadrightarrow \widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ による逆像を $S_{\phi,\mathrm{sc}}$ と書いており、その連結成分の群 $\mathcal{S}_\varphi := \pi_0(S_{\varphi,\mathrm{sc}})$ が φ の S 群であった。L パラメタ φ は $\mathrm{im}\varphi$ の $\widehat{G}$ への射影が相対コンパクトなとき緩増加 (*tempered*) と呼ばれる。緩増加 L パラメタが離散的 (*discrete*) とは $S_{\varphi,\mathrm{ad}}$ が離散的、つまり $S_\varphi^0 \subset Z(\widehat{G})^\Gamma$ であることとする。一方、$G(F)$ の既約許容表現 (アルキメデス的な場合には既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群) が緩増加とはそれが $L^2(G(F))$ の既約部分商であることであった。次の予想は局所 Langlands 対応の Vogan (と Arthur) による精密化である。

予想 **4.4** **([Art06]).** (i) 緩増加 L パラメタ $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^L G$ と $G \in \mathcal{G}$ に対して、$G(F)$ の既約緩増加表現の同型類の有限集合 (L パケット) $\Pi_\varphi(G)$ が定まる。さらに $G(F)$ の既約緩増加表現の同型類の集合は緩増加 L パラメタの同値類についての $\Pi_\varphi(G)$ たちの直和に分解する。
(ii) (4.1) による G の像を $\zeta_G \in (Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D$ として、それを拡張する指標 $\widetilde{\zeta}_G : Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}}) \to \mathbb{C}^1$ の族 $\widetilde{\zeta}_{\mathcal{G}} = (\widetilde{\zeta}_G)_{G \in \mathcal{G}}$ を取る。函数 $\langle\, ,\, \rangle = \langle\, ,\, \rangle_{\widetilde{\zeta}_{\mathcal{G}}} : \mathcal{S}_\varphi \times \coprod_{G \in \mathcal{G}} \Pi_\varphi(G) \to \mathbb{C}$ であって、

$$\Pi_\varphi(G) \ni \pi \longmapsto \langle \cdot, \pi \rangle \in \Pi(\mathcal{S}_\varphi)_{\widetilde{\zeta}_G}$$

が全単射であるものがある。ただし $\Pi(\mathcal{S}_\varphi)_{\widetilde{\zeta}_G}$ は $Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})$ 上 $\widetilde{\zeta}_G$ である $\mathcal{S}_\varphi$ の既約指標の集合である。

この予想はアルキメデス的な場合、$\mathcal{G}$ が一般線型群の内部形式からなる場合、それに3次以下のユニタリ群の場合などには解決されている。また非アルキメデス的な場合で表現のレベルを parahoric に限った場合も知られている。非アルキメデス局所体上の古典群の場合には Arthur のプロジェクトの帰結を仮定した証明が Mœglin によって与えられている。18 ページの脚注でも触れたように、(ii) のペアリングは内視群からの指標のリフティングが確立できれば、それを用いて一意に決めることができるはずである。その詳細を解説するには軌道積分の移行因子が必要となるため省略したが、興味のある読者は [Art06] を参照されればよい。

例 **4.5.** F が非アルキメデス的で $\mathcal{G}$ が $G = \mathrm{GL}_n$ の内部形式からなる場合を見てみよう。
(i) 局所 Langlands 対応 [Hen00], [HT01] により、W_F の半単純な既約 m 次元表現 $\varphi_0 : W_F \to {}^L\mathrm{GL}_m$ には $\mathrm{GL}_m(F)$ の既約超カスプ表現 π_0 が対応する: $\Pi_{\varphi_0}(\mathrm{GL}_n) = \{\pi_0\}$.
(ii) GL_n の L パラメタ $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^L\mathrm{GL}_n$ が離散的であることは、その像が有界で $\mathcal{L}_F$ の表現として既約であることに同値である。よってそのような φ はある因子分解 $n = dm$ に対して、W_F の m 次元既約表現 φ_0 と $\mathrm{SU}_2(\mathbb{R})$ の d 次元既約表現 ρ_d のテンソル積に書ける: $\varphi \simeq \varphi_0 \otimes_{\mathbb{C}} \rho_d$. この φ には放物型誘導表現

$$I^{\mathrm{GL}_n}_{P_{(m^d)}}(\pi_0|\det|_F^{(d-1)/2} \otimes \pi_0|\det|_F^{(d-3)/2} \otimes \cdots \otimes \pi_0|\det|_F^{(1-d)/2})$$

のただ一つの既約部分表現 $\mathrm{Sp}_d(\pi_0)$ が対応する。このとき π_0 はユニタリな中心指標を持ち、$\mathrm{Sp}_d(\pi_0)$ は離散系列表現 (行列成分が二乗可積分な表現) である。
(iii) GL_n の任意の緩増加 L パラメタ φ は (ii) のタイプのパラメタ $\varphi_i = \varphi_{i,0} \otimes \rho_{d_i}$ たちの直和に分解する: $\varphi \simeq \bigoplus_{i=1}^r \varphi_i$. このとき放物型誘導表現

$$\mathop{\boxplus}_{i=1}^{r} \mathrm{St}_{d_i}(\pi_{i,0}) := I^{\mathrm{GL}_n}_{P_{(n_i)_i}}(\mathrm{Sp}_{d_1}(\pi_{1,0}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sp}_{d_r}(\pi_{r,0}))$$

は既約であり、これが φ に対応する表現である: $\Pi_\varphi(\mathrm{GL}_n) = \{\boxplus_{i=1}^r \mathrm{St}_{d_i}(\pi_{i,0})\}$.
(iv) (iii) の緩増加 L パラメタの既約分解を $\varphi \simeq \bigoplus_{i=1}^r \varphi_i^{\oplus m_i}$, $(\varphi_i \not\simeq \varphi_j, (1 \le i \ne j \le r)$ と書き直す。$n_i := \dim \varphi_i$, $(1 \le i \le r)$ の最大公約数を $d := \mathrm{GCD}(n_i)_{i=1}^r$ とすれば、$S_\varphi \simeq \prod_{i=1}^r \mathbf{1}_{n_i} \otimes \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})$,

$$S_{\varphi,\mathrm{sc}} \simeq \left\{ (\mathbf{1}_{n_i} \otimes g_i) \in \prod_{i=1}^r \mathbf{1}_{n_i} \otimes \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C}) \,\middle|\, \prod_{i=1}^r \det g_i^{n_i} = 1 \right\},$$
$$\mathcal{S}_\varphi \simeq Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})/(Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}}) \cap S_{\varphi,\mathrm{sc}}) = \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{C})/\boldsymbol{\mu}_{n/d}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

が示せる。他方で Tate-中山射は今の場合

$$Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^D \simeq \mathrm{H}^1(F, \mathrm{PGL}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$$

を与える。$\zeta \in \Pi(\mathcal{S}_\varphi)$ はその $Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})$ への制限で決まるが、それは $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$ の元でその位数 $d(\zeta)$ が d を割るものと見なされる。このとき ζ には例 4.1 により F 上の $d(\zeta)^2$ 次元中心的斜体上の $n/d(\zeta)$ 次行列環 B_ζ が対応する。(iii) の $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現 $\pi = \boxplus_{i=1}^r \mathrm{St}_{d_i}(\pi_{i,0})$ の $B_\zeta^\times$ での Jacquet-Langlands 対応を π_ζ と書けば、予想 4.4 (ii) の対応は $\pi_\zeta \mapsto \zeta$ で与えられる。 □

例 **4.6.** 今度は $F=\mathbb{R}$ で $\mathcal{G}$ がやはり GL_n の内部形式からなる場合を見てみよう。
(i) $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{R}}$ の緩増加 L パラメタ $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$ の既約分解は

$$\varphi \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{ind}_{W_{\mathbb{C}}}^{W_{\mathbb{R}}} \omega_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \chi_j$$

と書ける。ここで ω_i, χ_j はそれぞれ $\mathbb{C}^{\times}$, $\mathbb{R}^{\times}$ の指標で、$\overline{\omega}_i \neq \omega_i$ を満たすものである。$\mathrm{ind}_{W_{\mathbb{C}}}^{W_{\mathbb{R}}} \omega_i$ には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現 $\pi(\omega_i)$ ([今野 a, 命題 2.18] 参照) が対応する。このとき φ には放物型誘導表現 (既約になる)

$$\boxplus_{i=1}^{r} \pi(\omega_i) \boxplus \boxplus_{j=1}^{s} \chi_j := I_{P_{(2^r,1^s)}}^{\mathrm{GL}_n}\big(\pi(\omega_1) \otimes \cdots \otimes \pi(\omega_r) \otimes \chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_s\big)$$

が対応する: $\Pi_{\varphi}(\mathrm{GL}_n) = \boxplus_{i=1}^{r} \pi(\omega_i) \boxplus \boxplus_{j=1}^{s} \chi_j$.
(ii) この φ に対する S 群の計算は例 4.5 と同じで、

$$\mathcal{S}_{\varphi} = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{C})/\boldsymbol{\mu}_{n/2}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & s=0 \text{ のとき} \\ \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{C})/\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{C}) = \{1\} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

となる。前者の場合には $\mathcal{S}_{\varphi}$ の自明指標には $\boxplus_{i=1}^{n/2} \pi(\omega_i)$ が、符号指標には内部形式 $\mathrm{GL}_{n/2}(\mathbb{H})$ ($\mathbb{H}$ は Hamilton の四元数体) での Jacquet-Langlands 対応表現 $\boxplus_{i=1}^{n/2} \pi^{\mathbb{H}}(\omega_i)$ が対応する。ここで $\omega_i(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{s_i}(z/\bar{z})^{m_i/2}$ として $\pi^{\mathbb{H}}(\omega_i) = \nu_{\mathbb{H}}^{s_i+(1-m_i)/2}\rho_{m_i}$, ($\rho_{m_i}$ の定義については [今野 a, 命題 2.18] 参照、$\nu_{\mathbb{H}}$ は $\mathbb{H}/\mathbb{R}$ の被約ノルム) である。後者の場合、φ に対応する L パケットは $\Pi_{\varphi}(\mathrm{GL}_n)$ のみである。 □

最後にもう一つ、実ユニタリ群の例を見ておこう。

例 **4.7.** (i) $\mathcal{G}$ が $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ に付随する n 変数ユニタリ群 $G_{p,q}$, $(p+q=n)$ たちからなる場合を考える。その離散的 L パラメタ $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^{L}G$ は $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (n+1+2\mathbb{Z})^n$, $(\lambda_i > \lambda_j, i<j)$ を使って、

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} (z/\bar{z})^{\lambda_1/2} & & & \\ & (z/\bar{z})^{\lambda_2/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (z/\bar{z})^{\lambda_n/2} \end{pmatrix} \times z, \quad z \in W_{\mathbb{C}},$$

$$\varphi(w_c) = I_n \rtimes w_c$$

と書ける。その S 群は

$$\mathcal{S}_{\varphi} = S_{\varphi,\mathrm{sc}} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & \\ & \epsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \epsilon_i = \pm 1 \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \end{array} \right\} \simeq \{\pm 1\}^{n-1}$$

である。
(ii) φ に付随する $G_{p,q}$ の L パケットを記述しよう。$G_{p,q}$ の対角元からなる極大トーラスを T と書く。T の $G_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\simeq \mathrm{GL}_{n,\mathbb{C}}$ での Weyl 群 $\Omega(G,T)$ はもちろん対称群 $\mathfrak{S}_n$ である。一方 $G_{p,q}(\mathbb{R})$ の $T(\mathbb{R})$ を含む極大コンパクト部分群を $\boldsymbol{K}_{p,q}=K_{p,q}(\mathbb{R})=\mathrm{Cent}(I_{p,q},G_{p,q}(\mathbb{R}))\simeq \mathrm{U}_p(\mathbb{R})\times\mathrm{U}_q(\mathbb{R})$ と選べば、T の $G_{p,q}$ での相対 Weyl 群 $W(G_{p,q},T)=\mathrm{Norm}(T,G_{p,q}(\mathbb{R}))/T(\mathbb{R})$ は $K_{p,q}$ での Weyl 群 $\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q$ に一致する。Harish-Chandra の結果によれば、剰余類 $s\in\Omega(G,T)/W(G_{p,q},T)$ を与えるごとに、

$$s(\lambda)=(\lambda_{s^{-1}(1)},\dots,\lambda_{s^{-1}(p)};\lambda_{s^{-1}(p+1)},\dots,\lambda_{s^{-1}(n)})$$

を *Harish-Chandra* パラメタに持つ $G_{p,q}(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現 $\pi_s(\lambda)$ が定まる。一方、$\Omega(G,T)/W(G_{p,q},T)\simeq\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q$ の代表系としては (p,q) に関するシャッフルの集合

$$\mathrm{Shuff}(p,q):=\{s\in\mathfrak{S}_n\,|\,s\text{ は }\{1,\dots,p\},\{p+1,\dots,n\}\text{ 上単調増加 }\}$$

が取れる。このとき問題の L パケットは $\Pi_\varphi(G_{p,q})=\{\pi_s(\lambda)\}_{s\in\mathrm{Shuff}(p,q)}$ で与えられる。濃度の関係は

$$\sum_{q=1}^{[n/2]}|\Pi_\varphi(G_{p,q})|=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}\binom{n}{q}=\frac{1}{2}(1+1)^n=2^{n-1}=|\Pi(\mathcal{S}_\varphi)|$$

となって勘定は合っている。
(iii) 以上のもとで (適当な正規化をすれば) 予想 4.4 (ii) の全単射は次のように書ける。$s\in\mathrm{Shuff}(p,q)$ に対して、$\kappa(s):=\sharp\{p<j\le n\,|\,s(j)\le p\}$ として s の台 $\mathrm{supp}(s)$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(s)_+&:=\{s(p+1),\dots,s(p+\kappa(s))\}\subset\{1,\dots,p\},\\ \mathrm{supp}(s)_-&:=\{s(p-\kappa(s)+1),\dots,s(p)\}\subset\{p+1,\dots,n\}\end{aligned}$$

の合併と定義する。つまり $\mathrm{supp}(s)$ は $\{1\le j\le p\,|\,s(j)\le p\}\sqcup\{p+1\le j\le n\,|\,p<s(j)\}$ の補集合である。このとき予想 4.4 (ii) のペアリングは

$$\langle\mathrm{diag}(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n),\pi_s(\lambda)\rangle=\prod_{j\in\mathrm{supp}(s)}\epsilon_j$$

で与えられる。(s はシャッフルの指数 (p,q) と $\mathrm{supp}(s)$ から一意に決まることに注意せよ。)
□

F を代数体とし、$\Gamma=\mathrm{Gal}(\bar F/F),W_F$ を 2.2 節の通りとする。ここでも予想を局所予想と並行する形にするためだけの目的で代数体 F の仮説的 Langlands 群 $\mathcal{L}_F$ を用いる。F の $\bar F$ 内にある有限次拡大 E についてのアデール環の帰納極限 $\varinjlim_E\mathbb{A}_E$ を $\bar{\mathbb{A}}$ と書く。

G を F 上定義された連結簡約線型代数群とし、その準分裂な内部ひねり $\eta_G:G_{\bar F}\xrightarrow{\sim}G^*_{\bar F}$ および L 群 ${}^LG=\widehat{G}\rtimes_{\rho_G}W_F$ を局所的な状況と同様に定義する。各素点 v で η_G の F_v への係数拡大 $\eta_{G_v}:G_{\bar F_v}\xrightarrow{\sim}G^*_{\bar F_v}$ は準分裂内部ひねりを与え、“制限” により準同型 ${}^LG\to$

${}^L G_v = \widehat{G} \rtimes_{\rho_{G_v}} W_{F_v}$ が引き起こされる。$Z(G)(F_\infty)$ 内の極大 $\mathbb{R}$ ベクトル部分群を $\mathfrak{A}_G$ として、$\mathcal{L}(G) := L^2(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$R(g)\phi(x) := \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}),\, \phi \in \mathcal{L}(G)$$

を考える。この節の目標は $\mathcal{L}(G)$ の離散スペクトル $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ の既約分解を記述する Arthur の予想を述べることである。

大域 L パラメタ　F トーラス T に対しては Tate 中山双対性

$$\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \times \mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathbb{C}^1$$

があった。21 ページの脚注と同様にして、これを函手的同型 $\beta_T : \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \to \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D$ と書くこともできる。連結簡約群 G に対してもこれを拡張する函手の射 β_G : $\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z(\bar{F})) \to \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D$ で

$$\mathrm{H}^1(F, G(\bar{F})/Z(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z(\bar{F})) \xrightarrow{\beta_G} \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \tag{4.2}$$

が完全列であるものがある [Kot86, 定理 2.2]。しかもこの自然変換は次の局所大域図式を可換にする [同、系 2.5]。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z(\bar{F})) & \xrightarrow{\beta_G} & \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \\
\big\downarrow & & & & \big\| \\
\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v) & \xrightarrow{\bigoplus_v \alpha_{G_v}} & \bigoplus_v \pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_v})^D & \xrightarrow{\prod_v} & \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D
\end{array} \tag{4.3}$$

局所予想を述べる際もそうであったように、大域的な状況でも緩増加 L パラメタの寄与のみを考察する。G の緩増加 L パラメタ $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^L G$ とは、像が有界な連続準同型で図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}_F & \longrightarrow & {}^L G \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\
W_F & = & W_F
\end{array}$$

を可換にするもののこととする[6]。そのような φ に対して

$$D_\varphi := \{g \in \widehat{G} \,|\, \partial_\varphi g(w) := g\mathrm{Ad}(\varphi(w))g^{-1} \in Z(\widehat{G}),\, w \in \mathcal{L}_F\}$$

とおく。Langlands 群は各素点 v での自然な射 $\mathcal{L}_{F_v} \to \mathcal{L}_F$ を備えているはずだから核 $\text{Ш}^1(\mathcal{L}_F, Z(\widehat{G})) := \ker[\mathrm{H}^1(\mathcal{L}_F, Z(\widehat{G})) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\mathcal{L}_{F_v}, Z(\widehat{G}))]$ が考えられる。これを使って

$$S_\varphi := \{g \in D_\varphi \,|\, \partial_\varphi g \in \text{Ш}^1(\mathcal{L}_F, Z(\widehat{G}))\}$$

[6] 本当はさらに "relevance" [Kot84, 10 節] を要求しなくてはいけないが、ここでは ${}^L G$ を L 群に持つ内部形式たちの L パラメタをまとめて考えるので不要である。

と定める。ユニタリ群など $\text{Ш}^1(\mathcal{L}_F, Z(\widehat{G}))$ が消えている G に対しては、$g \in S_\varphi$ に対して $z \in Z(\widehat{G})$ があって

$$g\mathrm{Ad}(\varphi(w))g^{-1} = z\rho_G(w)z^{-1} = z\mathrm{Ad}(\varphi(w))z^{-1}, \quad w \in \mathcal{L}_F$$

だから、$S_\varphi = \mathrm{Cent}(\varphi, \widehat{G})Z(\widehat{G})$ である。S_φ の $\widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ での像を $S_{\varphi,\mathrm{ad}}$ として、大域的な場合の S 群を $\mathcal{S}_\varphi := \pi_0(S_{\varphi,\mathrm{ad}})$ と定義する。L パラメタ φ は S_φ の単位元の連結成分 S_φ^0 が $Z(\widehat{G})$ に含まれるとき、楕円的 (*elliptic*) と呼ばれる。

各素点 v での $\mathcal{L}_{F_v} \to \mathcal{L}_F$ と φ の合成は局所 L パラメタ $\varphi_v : \mathcal{L}_{F_v} \to {}^L G_v$ を与え、付随する L パケット $\Pi_{\varphi_v}(G_v)$ および S 群 $\mathcal{S}_{\varphi_v}$ が得られる。局所 S 群と大域 S 群の間には次の関係がある。定義から $g \in S_\varphi$ に対する $\partial_\varphi g$ の $\mathrm{H}^1(\mathcal{L}_{F_v}, Z(\widehat{G}))$ での像は自明である:

$$\exists z_v \in Z(\widehat{G}), \quad g\mathrm{Ad}(\varphi(w))g^{-1} = z_v\mathrm{Ad}(\varphi(w))z_v^{-1}, \quad \forall w \in \mathcal{L}_{F_v}.$$

つまり $S_\varphi \subset S_{\varphi_v,\mathrm{ad}}$ だから、$S_{\varphi_v,\mathrm{ad}}$ の連結成分の群を $\mathcal{S}_{\varphi_v,\mathrm{ad}} := \pi_0(S_{\varphi_v,\mathrm{ad}})$ として自然な準同型 $\mathcal{S}_\varphi \to \mathcal{S}_{\varphi_v,\mathrm{ad}}$ がある。一方、$S_{\varphi_v,\mathrm{ad}} = S_{\varphi_v,\mathrm{sc}}/Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})$ から

$$\mathcal{S}_{\varphi_v,\mathrm{ad}} = \mathcal{S}_{\varphi_v}/\mathcal{Z}_{\varphi_v}, \quad \mathcal{Z}_{\varphi_v} := Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})/(Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}}) \cap S^0_{\varphi_v,\mathrm{sc}})$$

である。

大域 L パケットと重複度ペアリング　有限個を除く全ての非アルキメデス素点 v で係数拡大 G_v は不分岐[7]で φ_v も不分岐、つまり W_{F_v}/I_{F_v} を経由する。ここで $I_{F_v} \subset \Gamma_v := \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ は惰性群である。そのような v では $G(F_v)$ は超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_v$ を持ち [Tit79, 1.10]、$\Pi_{\varphi_v}(G_v)$ は不分岐、つまり $\boldsymbol{K}_v$ 不変ベクトルを持つ表現を含む。(超スペシャル部分群 $\boldsymbol{K}_v$ の取り方は $G(F_v)$ 共役を除いても複数あるが、$\boldsymbol{K}_v$ を止めればそれに関して不分岐な $\Pi_{\varphi_v}(G_v)$ の元はただ一つしかない。) φ に付随する大域 L パケット $\Pi_\varphi(G)$ とは、各素点 v での $\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}(G_v)$ たちの族で、ほとんど全ての v で不分岐であるようなものの制限テンソル積 $\pi := \bigotimes_v \pi_v$ からなる集合である (φ が G に対して “relevant” でない場合には $\Pi_\varphi(G) = \varnothing$ とする):

$$\Pi_\varphi(G) = \bigotimes_v \Pi_{\varphi_v}(G_v).$$

$Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^{\Gamma_v}$ の指標 ζ_{G_v} (予想 4.4 参照) の $Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})$ への拡張 $\widetilde{\zeta}_{G_v}$ をほとんど全ての素点 v では ($G_v \simeq G_v^*$ であるから) 自明で、$\prod_v \widetilde{\zeta}_{G_v}$ が自明となるように選ぶ。G^*_{ad} に対する (4.2):

$$\mathrm{H}^1(F, G^*_{\mathrm{ad}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{\mathbb{A}})) \xrightarrow{\beta_{G^*_{\mathrm{ad}}}} (Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D$$

と (4.3) から、G^* の大域内部形式 G に対する $\prod_v \zeta_{G_v} \in (Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D$ は自明であることに注意せよ。この $\widetilde{\zeta}_{G_v}$ たちに対する予想4.4 (ii) の局所ペアリングを $\langle\, , \,\rangle_v$ と書く。次に $s \in \mathcal{S}_\varphi$ の $S_{\varphi,\mathrm{ad}}$ での代表元の $\widehat{G}_{\mathrm{sc}} \to \widehat{G} \twoheadrightarrow \widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ による逆像 $\tilde{s}$ を取る。$S_\varphi \subset S_{\varphi_v,\mathrm{ad}}$ だったから $\tilde{s} \in S_{\varphi_v,\mathrm{sc}}$

[7] つまり $G_v \simeq_{F_v} G_v^*$ で F_v のある不分岐拡大上で分裂する。

であり、その $\mathcal{S}_{\varphi_v}$ での像 ${}^v\widetilde{s}$ が考えられる。大域 L パケット $\Pi_\varphi(G)$ の元 $\pi=\bigotimes_v \pi_v$ に対して重複度ペアリングを

$$\langle s,\pi\rangle := \prod_v \langle {}^v\widetilde{s},\pi_v\rangle_v$$

と定めれば、$\widetilde{\zeta}_{G_v}$ たちの取り方からこれは $\widetilde{s}$ の選び方によらず定義可能である。

Langlands-Arthur の重複度予想　さて $\widehat{G}$ の Lie 環を $\widehat{\mathfrak{g}}$ と書けば、随伴表現

$$\tau_\varphi : S_\varphi \times \mathcal{L}_F \ni (s,w) \longmapsto \mathrm{Ad}(s\varphi(w)) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\widehat{\mathfrak{g}})$$

が考えられる。その既約分解を $\tau_\varphi=\bigoplus_{i=1}^m \tau_i, \tau_i \simeq \mu_i\otimes\rho_i$, ($\mu_i$ は S_φ, ρ_i は $\mathcal{L}_F$ の既約表現) とする。$\dim\rho_i=d_i$ とすると ρ_i は $\mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現に対応するはずだから、その標準 L 函数 $L(s,\rho_i)$ と ϵ 函数 $\varepsilon(s,\rho_i)$ が定まる。既約成分 τ_i がスペシャルとは、

- τ_i は自己双対: $\tau_i^\vee \simeq \tau_i$. 特に $L(s,\rho_i)$ の函数等式は $L(s,\rho_i)=\varepsilon(s,\rho_i)L(1-s,\rho_i)$ となって $\varepsilon(1/2,\rho_i)=\pm 1$ である。
- $\varepsilon(1/2,\rho_i)=-1$.

であることとする。このとき一つ目の条件から $\det\mu_i$ は S_φ の符号指標である。

予想 4.8 ([Art89]). φ を G の緩増加 L パラメタとする。
(i) $\Pi_\varphi(G)$ が $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ の既約成分を含むためには、$\Pi_\varphi(G)\neq\varnothing$ で φ が楕円的であることが必要十分である。
(ii) φ が楕円的なとき、$\pi\in\Pi_\varphi(G)$ の $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ での重複度は

$$m(\pi)=\frac{1}{|\mathcal{S}_\varphi|}\sum_{s\in\mathcal{S}_\varphi}\epsilon_\varphi(s)\langle s,\pi\rangle$$

で与えられる。ただし ϵ_φ はスペシャルな τ_i についての $\det\mu_i$ たちの積である。

例 4.9. G を F 上の n^2 次元中心的単純環 B の乗法群とする: $G(R)=(B\otimes_F R)^\times$. G の L パラメタ $\varphi:\mathcal{L}_F\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times W_F$ に対する L パケット $\Pi_\varphi(G)=\bigotimes_v \Pi_{\varphi_v}(G_v)$ が空でないためには、各 $\Pi_{\varphi_v}(G_v)$ が空でないことが必要十分。つまり $B_v:=B\otimes_F F_v$ の不変量 $\mathrm{inv}\,B_v\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を d_v/n, φ_v の既約分解を $\varphi_v\simeq\bigoplus_{i=1}^r\varphi_{v,i}$ として、

$$d_v|\mathrm{GCD}(\dim\varphi_{v,i})_{1\le i\le r}$$

となることが必要十分である (例 4.5, 4.6)。また φ が楕円的であることはそれが既約表現であることに同値だから、そのとき $\mathcal{S}_\varphi=S_{\varphi,\mathrm{ad}}$ は自明である。よって上の予想は、$\Pi_\varphi(G^*)=\Pi_\varphi(\mathrm{GL}_n)$ の唯一の元 $\pi^*=\bigotimes_v\pi_v^*$ ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現) の各局所成分 π_v^* の $G(F_v)$ での局所 Jacquet-Langlands 対応が存在する: $\Pi_{\varphi_v}(G_v)\neq\varnothing$ ときには常に、大域 Jacquet-Langlands 対応 $\pi=\bigotimes_v\pi_v\in\Pi_\varphi(G)$ が存在し、その離散スペクトルでの重複度は 1 であることを主張している。この主張は A.I. Badulescu により証明された [Bad08]。　□

注意 **4.10.** 一般の連結簡約代数群 G に対する Jacquet-Langlands 対応は同じ L パラメタ φ に対する G と G^* の L パケット $\Pi_\varphi(G), \Pi_\varphi(G^*)$ の間の対応として定式化される。例 4.7 で見たように局所 L パケットの位数 $|\Pi_{\varphi_v}(G_v)|, |\Pi_{\varphi_v}(G_v^*)|$ でさえも一致していないから、保型表現のレベルでの全単射は望むべくもない。 □

注意 **4.11** (緩増加でない保型表現について)**.** この 4 節ではずっと緩増加 L パラメタに付随する L パケットおよびその保型形式の空間への寄与だけを扱ってきた。そのような寄与は全ての局所成分が緩増加であるという意味で緩増加保型表現と呼ばれる。保型表現の緩増加性については一般化された Ramanujan 予想、すなわち「$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現は全て緩増加である。」という期待がある。一方、定数函数 (単位表現) のように明らかに緩増加ではない保型表現も存在する。実際、定理 2.3 (iii) から $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ のカスプ的でない保型表現は全て非緩増加である。このような非緩増加保型表現も含めた $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ の記述については Arthur による予想 4.8 の拡張 [Art89] がある。その予想では L パラメタの代わりに、その定義で $\mathcal{L}_F$ を $\mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ で置き換えた A パラメタを考える。A パラメタに対して A パケットと呼ばれる既約表現の族が定まり、予想 4.8 とほぼ平行な構成および主張が成り立つと期待されている。例えば GL_n の場合については期待される記述は 2.1 節で解説した通りである。しかし

- 緩増加 L パケットは互いに交わらないのに対し、A パケットは互いに交わりを持ちうる。
- 局所緩増加 L パケットたちの合併は既約緩増加許容表現の同型類の集合に一致するが、全ての A パケットの合併は「保型表現の局所成分に現れる既約ユニタリ化可能許容表現の同型類」という特定しづらい集合になるとされている。
- 予想 4.4 (ii) の類似の写像が全単射にならない。

など、A パケットやその保型表現への寄与については束縛条件に曖昧な点が多くてわかりにくい。この理由から、本題の Clozel-Labesse のベースチェンジは非緩増加保型表現も扱うにもかかわらず、基本的な予想についてはあえて緩増加表現に話を限っている。 □

4.2 ベースチェンジ

前節で述べた予想を用いてベースチェンジリフトを定式化しよう。E/F を代数体の有限次拡大とする。G の L パラメタ $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^LG$ に対して、その $\mathcal{L}_E$ への制限 $\varphi_E : \mathcal{L}_E \to \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_E = {}^LG_E$ は G_E の L パラメタである。このとき L パケット $\Pi_\varphi(G)$ に $\Pi_{\varphi_E}(G_E)$ を対応させるのがベースチェンジリフトである。もちろん $\Pi_\varphi(G), \Pi_{\varphi_E}(G_E)$ のいずれか、または双方が空集合である場合にはリフトは定義されない。(2.4 節の GL_n のように G, G_E とも準分裂内部形式 G^*, G_E^* の場合には、$\Pi_\varphi(G), \Pi_{\varphi_E}(G_E)$ は常に空でなくそうした問題は起きない。)

2.3 節で述べたとおり、大域 Langlands 対応予想 4.8 ではなく、Arthur-Selberg 跡公式を用いてベースチェンジリフトが構成できるのは E/F が有限次巡回拡大のときである。以下、

E/F を d 次巡回拡大としてその Galois 群の生成元 σ を取る。2.3 節に倣って $L := \operatorname{Res}_{E/F} G$ とおき、G の F 構造から σ に対して定まる L の F 自己同型を $\tilde{\sigma}$ と書く。$\operatorname{Gal}(E/F) \simeq W_F/W_E$ の W_F での代表系 $\{w_\tau\}_{\tau\in\operatorname{Gal}(E/F)}$ を止めれば、同節の通り ${}^LL = \widehat{L} \rtimes_{\rho_L} W_F$ は

$$\widehat{L} = \widehat{G}^{\operatorname{Gal}(E/F)} := \{(g_\tau)_{\tau\in\operatorname{Gal}(E/F)} \,|\, g_\tau \in \widehat{G}\},$$
$$\rho_L(ww_\nu)(g_\tau)_{\tau\in\operatorname{Gal}(E/F)} = (\rho_G(ww_\nu)g_{\tau\nu})_{\tau\in\operatorname{Gal}(E/F)}, \quad w \in W_E,\, \nu \in \operatorname{Gal}(E/F)$$

で与えられる。ベースチェンジ射

$$b_{E/F} : {}^LG \ni g \rtimes w \longmapsto (g, g, \dots, g) \rtimes w \in {}^LL$$

と併せた三つ組 $(G^*, 1, b_{E/F})$ は 2.3 節の意味での $(L, \tilde{\sigma})$ の内視データになっている。G から G^* への Jacquet-Langlands 対応 $\Pi_\varphi(G) \mapsto \Pi_\varphi(G^*)$ と G^* から $(L, \tilde{\sigma})$ への内視リフト $\Pi_\varphi(G^*) \mapsto \Pi_{b_{E/F}\circ\varphi}(L)$ が定義されているとき、それらの合成 $\Pi_\varphi(G) \mapsto \Pi_{b_{E/F}\circ\varphi}(L)$ が我々の望むベースチェンジリフトである。