3 L 不可分性の問題

ユニタリ群を始め、GL_n 以外の簡約群の上の保型形式では L 不可分性という奇妙な現象が起きるため、定理 2.3 の拡張は複雑になる。ここでは L 不可分性の問題をもっとも単純な 2 変数ユニタリ群の場合を例にとって解説する。

3.1 2 変数ユニタリ群の内視的保型表現

代数体の二次拡大 E/F を止め、$\delta \in E^\times$ で $\mathrm{Tr}_{E/F}(\delta) = 0$ となるものを取る。$\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元を c と書く。F のアデール環を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ として非自明な指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^1$ を取っておく。また類体論で E/F に対応する二次指標を $\omega_{E/F} : \mathbb{A}^\times/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ と書く。E のイデール類指標 $\eta, \mu : \mathbb{A}_E^\times/E^\times \to \mathbb{C}^1$ であってその $\mathbb{A}^\times$ への制限がそれぞれ $\mathbb{1}_{\mathbb{A}^\times}, \omega_{E/F}$ に一致するものを取る。E 上のエルミート空間 $(V, (\, , \,))$ を

$$V = E^{\oplus 2}, \quad (v, v') = \frac{1}{2\delta} {}^t c(v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v'$$

と定め、そのユニタリ群を G とする。すなわち任意の可換 F 代数 R に対して

$$G(R) = \left\{ g \in \mathrm{End}_{E \otimes_F R}(V \otimes_F R) \;\middle|\; {}^t c_R(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

である。ただし $c_R := c \otimes \mathrm{id}_R$ と略記している。GL_n の場合と同様に $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分函数の空間 $\mathcal{L}(G)$ の既約部分商表現を $G(\mathbb{A})$ の保型表現という。

F の素点 v に対して $E_v := E \otimes_F F_v$ と書く。E_v 上の歪エルミート空間 $(W_v, \langle \, , \, \rangle_v)$ を

$$W_v = E_v, \quad \langle z, z' \rangle_v = -2\beta_v \delta z c(z'), \quad (\beta_v \in F_v^\times)$$

として、そのユニタリ群を $G_{W_v} \simeq \ker[\mathrm{Res}_{E_v/F_v} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\mathrm{N}_{E_v/F_v}} \mathbb{G}_m]$ と書く。$\mu : \mathbb{A}_E^\times/E^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \to \mathbb{C}^1$ の v 成分 $\mu_v : E_v^\times \to \mathbb{C}^1$ に付随して $G(F_v) \times G_{W_v}(F_v)$ の Weil 表現 $(\omega_{V_v, W_v, \mu_v}, \mathcal{S}(E_v))$ が定まる。ここで $\mathcal{S}(E_v)$ は E_v 上の ψ_v 標準 Schwartz-Bruhat 函数の空間 ([Wei74] 参照) であり、$\omega_{V_v, W_v, \mu_v} = \omega_{V_v, \mathbb{1}_{E_v^\times}} \times \omega_{W_v, \mu_v}$ は次の明示公式で特徴づけられる。

$$\begin{aligned}
\omega_{W_v,\mu_v}\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c(a)^{-1} \end{pmatrix}\Big)\phi(z) &= \mu_v(a)|a|_{E_v}^{1/2}\phi(az), \quad z \in E_v^\times, \\
\omega_{W_v,\mu_v}\Big(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\phi(z) &= \psi_v(\beta_v \mathrm{N}_{E_v/F_v}(z) b)\phi(z), \quad b \in F_v, \\
\omega_{W_v,\mu_v}\Big(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big)\phi(z) &= \frac{\omega_{E_v/F_v}(\beta_v)}{\lambda(E_v/F_v, \psi_v)} \int_{E_v} \phi(z')\psi_{E_v}(-\beta_v z c(z'))\, dz', \\
\omega_{V, \mathbb{1}_{E_v^\times}}(g')\phi(z) &= \phi(z.g'), \quad g' \in G_{W_v}(F_v).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし $\lambda(E_v/F_v,\psi_v)=\varepsilon(1/2,\omega_{E_v/F_v},\psi_v)$ は Langlands の λ 因子と呼ばれる 1 の 4 乗根で、$\psi_{E_v}:=\psi_v\circ\mathrm{Tr}_{E_v/F_v}$ である。E_v 上の測度は双対性 $(z,z')\mapsto\psi_{E_v}(\beta_v zc(z'))$ に関する自己双対測度を採用している。

$\eta:\mathbb{A}_E^\times/E^\times\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}^1$ の v 成分 $\eta_v:E_v^\times/F_v^\times\to\mathbb{C}^1$ は $G_{W_v}(F_v)$ の指標 $\eta_{W_v}:G_{W_v}(F_v)\ni z/c(z)\longmapsto\eta_v(z)\in\mathbb{C}^1$ を与える。($G_{W_v}(F_v)=\mathrm{ker}\mathrm{N}_{E_v/F_v}$ の元は $E_v^\times$ 値 $\mathrm{Gal}(E_v/F_v)$-1 コサイクルだから、Hilbert90 定理により $z/c(z)$, $(\exists z\in E_v^\times)$ の形である。) E_v/F_v が非アルキメデス局所体の二次拡大のとき、$(\omega_{V,\mathbb{1}_{E_v^\times}},\mathcal{S}(E_v))$ の η_{W_v} 等型商

$$\Theta_{\mu_v}(\eta_{W_v},V_v)=\mathcal{S}(E_v)_{\eta_{W_v}}:=\left\{\phi_{\eta_{W_v}}(z):=\int_{G_{W_v}(F_v)}\phi(z.g')\overline{\eta_{W_v}(g')}\,dg'\;\middle|\;\phi\in\mathcal{S}(E_v)\right\}$$

は $G(F_v)$ の既約許容表現になる。それ以外の場合も $(\omega_{V,\mathbb{1}_{E_v^\times}},\mathcal{S}(E_v))$ の η_{W_v} 等型商 $\Theta_{\mu_v}(\eta_{W_v},V_v)$ は $G(F_v)$ 既約許容表現になる。いずれの場合も $\Theta_{\mu_v}(\eta_{W_v},V_v)$ の同型類は β_v の $F_v^\times/\mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times)$ での像のみで決まる。そこでこれを $\pi(\mu_v,\mu_v/\eta_v)^{\omega_{E_v/F_v}(\beta_v)}$ と書くことにする。特に

- E で分解している v では $G(F_v)=\mathrm{GL}_2(F_v)$, $\pi(\mu_v,\mu_v/\eta_v)^+\simeq I_{B_2}^{G_2}(\mu_v\otimes\mu_v\eta_v^{-1})$ で $\pi(\mu_v,\mu_v/\eta_v)^-$ は存在しない。

- E_v/F_v が不分岐二次拡大で η_v,μ_v が不分岐 (従って $\eta_v=\mathbb{1}_{E_v^\times}$), ψ_v の位数が 0 の場合には $\pi(\mu_v,\mu_v)^\pm$ は $G(F_v)$ の上三角 Borel 部分群の指標

$$\mu_v:B(F_v)\ni\begin{pmatrix}a&b\\0&c(a)^{-1}\end{pmatrix}\longmapsto\mu(a)\in\mathbb{C}^1$$

  からの放物型誘導表現 $I_B^G(\mu_v)$ の二つの既約成分であり、$\pi(\mu_v,\mu_v)^+$ のみが不分岐、つまり超スペシャル極大コンパクト部分群 $G(F_v)\cap\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_{E_v})$ で不変なベクトルを持つ。

今、$(\beta_v)_v\in\mathbb{A}^\times$ がある $\beta\in F^\times$ から来ている: $(\beta_v)_v\in\beta\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ とする。歪エルミート空間 $(W_v,\langle\,,\,\rangle_v)$ たちは E 上の歪エルミート空間

$$(W=E,\quad\langle z,z'\rangle=-2\beta\delta zc(z'))$$

の F_v への係数拡大にほかならない。上と同様に $G(\mathbb{A})\times G_W(\mathbb{A})$ の Weil 表現 $(\omega_{V,W,\mu}=\omega_{W,\mu}\times\omega_{V,\mathbb{1}_{\mathbb{A}_E^\times}},\mathcal{S}(\mathbb{A}_E))$ がある。$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_E)$ に対するテータ級数を

$$\theta_{\mu,\phi}(g,g'):=\sum_{\gamma\in E}\omega_{W,\mu}(g)\omega_{V,\mathbb{1}_{\mathbb{A}_E^\times}}(g')\phi(\gamma),\quad g\in G(\mathbb{A}),\,g'\in G_W(\mathbb{A})$$

と定めれば、これは $(G\times G_W)(F)\backslash(G\times G_W)(\mathbb{A})$ 上の保型形式になる。η は $G_W(\mathbb{A})/G_W(F)$ の指標 $\eta_W=\bigotimes_v\eta_{W_v}$ を与える。$\Theta_\mu(\eta_W,V)$ を

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})\ni g\longmapsto\int_{G_W(F)\backslash G_W(\mathbb{A})}\theta_{\mu,\phi}(g,g')\overline{\eta_W(g')}\,dg'\in\mathbb{C},\quad\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_E)$$

で張られる $\mathcal{L}(G)$ の閉部分空間とする。

命題 3.1. (i) $\Theta_\mu(\eta_W, V)$ は $G(\mathbb{A})$ の既約保型表現(特に 0 ではない)で、$\bigotimes_v \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^{\omega_{E_v/F_v}(\beta)}$ に同型である。
(ii) $\bigotimes_v \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^{\omega_{E_v/F_v}(\beta_v)}$ が保型表現、つまり $\mathcal{L}(G)$ の既約部分商として現れるためには、$(\beta_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ の $\mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ での像が 1 であることが必要十分。

(i) は本質的に Shalika-田中の結果 [ST69] である。(ii) は Labesse-Langlands [LL79] の議論で証明される [KK, 定理 9.8]。

$G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 $\bigotimes_v \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^{\omega_{E_v/F_v}(\beta_v)}$, $((\beta_v)_v \in \mathbb{A}^\times)$ たちの局所成分はほとんど至るところで $\pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^+$ であるから、これらは同じ佐武パラメタを共有している。実はさらにこれらの表現が分岐因子も含めて L 函数を共有することも示せる。すなわち定理 2.3 (ii) のように L 函数で保型表現を区別することができない。当然ながら強重複度一定理の類似も成り立たないわけだが、一番の問題点は同じ L 函数を共有する表現 $\bigotimes_v \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^{\omega_{E_v/F_v}(\beta_v)}$, $((\beta_v)_v \in \mathbb{A}^\times)$ たちの中に保型表現と保型表現でないものが混在することである。

3.2 Langlands の重複度公式

上の問題を Labesse-Langlands は以下で解説する記述により解決している [LL79], [KK]。原論文では内視群からの指標のリフティングを用いて書かれているが、ここでは局所Langlands 対応で説明する。期待すべき結論の形を理解する上ではその方がわかりよいし、何よりそうすることで、Langlands の第一近似的な記述の代わりに、Vogan, Arthur, 齋藤・平賀らのより精密化された定式化を紹介できる。

E_v/F_v が二次拡大である素点 v での状況を考える。E_v の代数閉包 $\bar{F}_v$ を止めて、$\bar{F}_v/F_v$ の Galois 群、Weil 群を各々Γ_v, W_{F_v} と書く。Weil-Deligne 群の変形として局所*Langlands* 群

$$\mathcal{L}_{F_v} := \begin{cases} W_{F_v} & v \text{ がアルキメデス的なとき} \\ W_{F_v} \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) & v \text{ が非アルキメデス的なとき} \end{cases}$$

を用意する。G_v の L 群 ${}^LG_v = \widehat{G} \rtimes_{\rho_{G_v}} W_{F_v}$ は $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の W_{F_v} 作用

$$\rho_G(w) = \begin{cases} \mathrm{id} & w \in W_{E_v} \text{ のとき} \\ \theta_2 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

による半直積である。ここで $\theta_2(g) := \mathrm{Ad}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right))^t g^{-1}$ と書いた。G_v の L パラメタとは、準同型 $\varphi : \mathcal{L}_{F_v} \to {}^LG_v$ であって

- $\varphi|_{W_{F_v}}$ は半単純で、$W_{F_v} \xrightarrow{\varphi} {}^LG_v \overset{\mathrm{pr}_2}{\twoheadrightarrow} W_{F_v}$ は恒等写像。
- $\mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \widehat{G}$ は解析的。

を満たすもののこととする。二つの L パラメタが同値とはそれらが $\widehat{G}$ の元による内部自己同型で移り合うこととする。L パラメタに付随する L パケットの内部構造を記述するには次に導入する S 群が必要である。

$\widehat{G}$ の随伴群を $\widehat{G}_{\mathrm{ad}} := \widehat{G}/Z(\widehat{G}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, 導来群の単連結被覆を $\widehat{G}_{\mathrm{sc}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ と書く。G_v の L パラメタ φ に対して、その (像の) $\widehat{G}$ での中心化群を S_ϕ とする。その $\widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ での像 $S_{\phi,\mathrm{ad}}$ は $S_\phi/Z(\widehat{G})^\Gamma$ に同型であるが、その $\widehat{G}_{\mathrm{sc}} \to \widehat{G} \twoheadrightarrow \widehat{G}_{\mathrm{ad}}$ による逆像を $S_{\phi,\mathrm{sc}}$ と書く。さらにその連結成分の群を $\mathcal{S}_\phi := \pi_0(S_{\phi,\mathrm{sc}}) = S_{\phi,\mathrm{sc}}/S^0_{\phi,\mathrm{sc}}$ で表す。

さて、我々の例に必要な L パラメタは

$$\varphi_v(w) = \begin{pmatrix} \mu_v(w) & 0 \\ 0 & \mu_v\eta_v^{-1}(w) \end{pmatrix} \times w, \quad (w \in W_{E_v});$$
$$\varphi_v(w_c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rtimes w_c, \quad \varphi(\mathrm{SU}_2(\mathbb{R})) = \{1\}$$

で与えられる。ここで μ_v, η_v は局所類体論により W_{E_v} の指標と同一視されており、$w_c \in W_{F_v} \smallsetminus W_{E_v}$ である。φ_v の同値類は w_c の取り方によらない。すぐわかるように

$$S_{\varphi_v} = \begin{cases} \{\left(\begin{smallmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{smallmatrix}\right) \mid \epsilon_i = \pm 1\} & \eta_v \neq \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \\ \mathrm{O}_2(\mathbb{C}) & \eta_v = \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \end{cases}$$
$$S_{\varphi_v,\mathrm{sc}} = \begin{cases} \langle \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \rangle \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \eta_v \neq \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \\ \langle \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{C}^\times \rangle & \eta_v = \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \end{cases}$$
$$\therefore\ \mathcal{S}_{\varphi_v} = \begin{cases} \langle \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \rangle \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \eta_v \neq \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \\ [\widehat{G}_{\mathrm{sc}} \text{ の Weyl 群}] \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \eta_v = \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \end{cases}$$

である。このとき φ_v に付随する $G(F_v)$ の L パケットを $\Pi_{\varphi_v}(G_v) = \{\pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^\pm\}$ と定め、函数 $\langle\,,\,\rangle_v : \mathcal{S}_{\varphi_v} \times \Pi_{\varphi_v}(G_v) \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{cases} \langle \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{smallmatrix}\right), \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^\pm \rangle_v := z^{1\mp 1} & \eta_v \neq \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \\ \mathrm{sgn}_{\mathcal{S}_{\varphi_v}} & \eta_v = \mathbb{1}_{E_v^\times} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。ただし $\mathrm{sgn}_{\mathcal{S}_{\varphi_v}}$ は $\mathcal{S}_{\varphi_v} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の符号指標である。こうして L 因子を共有する既約表現の集合 $\Pi_{\varphi_v}(G_v)$ の内部構造が $\mathcal{S}_{\varphi_v}$ の既約指標を通して内視できる[4]。

E で分解する素点 v では $G_v \simeq \mathrm{GL}_2 = G_2$ だから ${}^LG_v = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times W_{F_v}$ (7 頁参照) であり、考える L パラメタは

$$\varphi_v : \mathcal{L}_{F_v} \twoheadrightarrow W_{F_v} \ni w \longmapsto \begin{pmatrix} \mu_v(w) & 0 \\ 0 & \mu_v\eta_v^{-1}(w) \end{pmatrix} \times w \in {}^LG_v$$

[4] 実は各 $s \in \mathcal{S}_\varphi$ に対して G_v の内視群 (または内視データ) と呼ばれる群 H_s が定まる。ペアリング $\langle\,,\,\rangle_v$ は、重み付き和 $\sum_{\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}(G_v)} \langle s, \pi_v \rangle_v \mathrm{tr}\pi_v$ が $H_s(F_v)$ 上の φ_v に付随するある安定指標のリフティングに等しくなるものとして特徴づけられる。

となる。ただし同型 $E_v^\times/F_v^\times \simeq (F_v^\times \times F_v^\times)/\Delta F_v^\times \ni (x,y) \mapsto xy^{-1} \in F_v^\times$ により μ_v, η_v を $F_v^\times$ (そして W_{F_v}) の指標と同一視している。この φ_v の S 群は

$$S_{\varphi_v} = \begin{cases} \mathcal{T}_2 & \eta_v \neq \mathbb{1}_{F_v^\times} \text{ のとき} \\ \widehat{G} & \text{それ以外のとき} \end{cases}, \quad \mathcal{S}_{\varphi_v} = \{1\}$$

であり、付随する L パケット $\Pi_{\varphi_v}(G_v)$ は $\pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^+ = I_{B_2}^{G_2}(\mu_v \otimes \mu_v/\eta_v)$ のみからなる。$\langle 1, \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^+ \rangle_v := 1$ とおく。

大域的な状況でも E で分解しない素点での状況と同様に G の L 群 ${}^LG = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ が定義される。L パラメタ $\varphi : \mathcal{L}_F \to {}^LG$ を

$$\varphi|_{\mathcal{L}_E} : \mathcal{L}_E \longrightarrow W_E \ni w \longmapsto \begin{pmatrix} \mu(w) & 0 \\ 0 & \mu\eta^{-1}(w) \end{pmatrix} \times w \in {}^LG,$$

$$\varphi(w_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rtimes w_c$$

と定め、それに付随する大域 L パケットを

$$\Pi_\varphi(G) := \bigotimes_v \Pi_\varphi(G_v) = \left\{ \bigotimes_v \pi(\mu_v, \mu_v/\eta_v)^{\omega_{E_v/F_v}(\beta_v)} \;\middle|\; (\beta_v)_v \in \mathbb{A}^\times \right\}$$

と定義する。S 群 $\mathcal{S}_\varphi \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ も同様に定義され、各素点 v で自然な写像 $\mathcal{S}_\varphi \ni s \mapsto s^v \in \mathcal{S}_{\varphi_v}$ がある。

命題 3.2 (命題 3.1 の精密化)**.** $\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_\varphi(G)$ の $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ での重複度は

$$m(\pi) = \frac{1}{|\mathcal{S}_\varphi|} \sum_{s \in \mathcal{S}_\varphi} \langle s^v, \pi_v \rangle$$

で与えられる。