2　GL_n の保型表現とベースチェンジ

ベースチェンジに限らず保型形式のリフティングも一種の写像であるから、その定義域と値域、像とファイバーによって記述される。ここではそのもっともシンプルなプロトタイプとして GL_n のベースチェンジリフトの場合を見てみよう。

2.1　GL_n の保型表現

この節を通して F は代数体とし、そのアデール環を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F = F_\infty \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ と書く。ただし F のアルキメデス素点での完備化の直積を $F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v$, 有限アデール環を $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ と書いている。非アルキメデス素点 v に対しては F_v の整数環を $\mathcal{O}_v$ と書き、その素元 ϖ_v を取っておく。

$G_n := \mathrm{GL}_{n,F}$ とおけば、その中心は自然に $\mathbb{G}_m$ と同一視される。$G_n(F)\mathbb{A}^\times\backslash G_n(\mathbb{A})$ はコンパクトではないが右 $G_n(\mathbb{A})$ 不変測度に関して測度有限である。F のイデール類指標 $\omega : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^1$ に対して、可測函数 $\phi : G_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で次の条件を満たすものの空間を $\mathcal{L}(G_n)_\omega$ と書く。

- $\phi(\gamma z g) = \omega(z)\phi(g)$, $(\gamma \in G_n(F), z \in \mathbb{A}^\times)$;
- 上から $G_n(F)\mathbb{A}^\times\backslash G_n(\mathbb{A}) \ni g \mapsto |\phi(g)| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は定義可能だが、これが $G_n(F)\mathbb{A}^\times\backslash G_n(\mathbb{A})$ 上の右 $G_n(\mathbb{A})$ 不変測度で二乗可積分。

これは L^2 内積に関する Hilbert 空間で右移動作用

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg), \quad g \in G_n(\mathbb{A}),\ \phi \in \mathcal{L}(G_n)_\omega$$

により $G_n(\mathbb{A})$ のユニタリ表現になる。

ユニタリ表現論の非常に短い復習　一般に位相群 $\boldsymbol{G}$ のユニタリ表現とは、Hilbert 空間 $(H, (\ ,\ ))$ と $g \in \boldsymbol{G}$ に対する H 上の線型作用素 $\pi(g)$ の族の組 (π, H) であって

- $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) \circ \pi(g_2)$, $(g_1, g_2 \in \boldsymbol{G})$;
- $\boldsymbol{G} \times H \ni (g, \phi) \mapsto \pi(g)\phi \in H$ は連続写像で
- $(\pi(g)\phi_1, \pi(g)\phi_2) = (\phi_1, \phi_2)$, $(g \in \boldsymbol{G}, \phi_1, \phi_2 \in H)$

を満たすものである。(π, H) が全ての $g \in \boldsymbol{G}$ に対して $\pi(g)H' \subset H'$ となる閉部分空間 H' を持たないとき、(π, H) は既約であるという。既約ユニタリ表現に対しては Schur の補題が成立する。二つのユニタリ表現 (π_1, H_1), (π_2, H_2) が同値とは、線型同型 $A : H_1 \xrightarrow{\sim} H_2$ で

- $(A(\phi), A(\phi'))_2 = (\phi, \phi')_1$, $(\phi, \phi' \in H_1)$;

- $A(\pi_1(g)\phi) = \pi_2(g)A(\phi), (g \in \boldsymbol{G}, \phi \in H_1)$

を満たすものがあることとする。$\boldsymbol{G}$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合を $\Pi(\boldsymbol{G})$ と書くことにする。

例 **2.1.** $L^2(\mathbb{R})$ 上に $\mathbb{R}$ の作用を

$$\tau(a)\phi(x) := \phi(x+a), \quad a \in \mathbb{R}, \phi \in L^2(\mathbb{R})$$

と定めると $(\tau, L^2(\mathbb{R}))$ は $\mathbb{R}$ のユニタリ表現である。
(i) $\Pi(\mathbb{R})$ は $\psi^a(x) := e^{2\pi iax}, (a \in \mathbb{R})$ の形の指標からなる。Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ 上

$$\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\phi(a) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\overline{\psi^a(x)}\,dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

で与えられる Fourier 逆変換は、閉包 $L^2(\mathbb{R})$ に連続に延びる。$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ のとき

$$\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\tau(y)\phi(a) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x+y)\overline{\psi^a(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\overline{\psi^a(x-y)}\,dx = \psi^a(y)\mathcal{F}_{\bar{\psi}}\phi(a)$$

であるから、$(\tau, L^2(\mathbb{R})) \ni \phi \mapsto \mathcal{F}_{\bar{\psi}}\phi(a) \in (\psi^a, \mathbb{C})$ は $\mathbb{R}$ の表現の準同型である。しかし ψ^a は $L^2(\mathbb{R})$ に属さないから、$\psi^a \in \Pi(\mathbb{R})$ は $(\tau, L^2(\mathbb{R}))$ の商表現だが部分表現ではない。
(ii) $a \in \mathbb{R}$ 上に既約表現 $(\psi^a, \mathbb{C})$ が乗っている線束 $\mathcal{L} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える。その切断を $\varphi : \mathbb{R} \ni a \mapsto (\widehat{\phi}(a), a) \in \mathcal{L}$ と書けば、これには $\mathbb{R}$ が

$$\rho(x)(\widehat{\phi}(a), a) = (\psi^a(x)\widehat{\phi}(a), a), \quad x \in \mathbb{R}$$

とファイバーごとに作用しており、$\widehat{\phi}$ の L^2 内積はこの作用で不変である。特にその "L^2 切断"[1]の空間

$$L^2(\mathbb{R}, \mathcal{L} \to \mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R} \ni a \mapsto (\widehat{\phi}(a), a) \in \mathcal{L} \mid \widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

は $\mathbb{R}$ のユニタリ表現である。このとき Fourier 変換:

$$\mathcal{F}_{\psi} : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(a)\psi^a(x)\,da, \quad \widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

は $(\rho, L^2(\mathbb{R}, \mathcal{L} \to \mathbb{R}))$ から $(\tau, L^2(\mathbb{R}))$ への $\mathbb{R}$ の表現としての同型である:

$$\mathcal{F}_{\psi}(\rho(y)\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} (\psi^a(y)\widehat{\phi}(a))\psi^a(x)\,da = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(a)\psi^a(x+y)\,da = \tau(y)\mathcal{F}_{\psi}\varphi(x).$$

しかも Perseval の等式 $\|\widehat{\phi}\| = \|\mathcal{F}_{\psi}\widehat{\phi}\|$ から、これはユニタリ表現の同値である。この状況を $(\tau, L^2(\mathbb{R}))$ は既約ユニタリ表現 ψ^a たちの直積分であると言い、

$$(\tau, L^2(\mathbb{R})) \simeq \int_{\mathbb{R}} \psi^a\,da$$

と書き表す。 □

[1]切断と言っても滑らかどころか可測函数でしかないので、通常の多様体論の意味での切断ではない。

一般に $G_n(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 (π, H) の $Z_n(\mathbb{A})$ への制限はある指標 $\omega_\pi : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^1$ になる:

$$\pi(z\mathbf{1}_n) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_H, \quad z \in \mathbb{A}^\times.$$

この ω_π を π の中心指標という。ユニタリ表現 $(R, \mathcal{L}(G_n)_\omega)$ の既約部分商表現を $G_n(\mathbb{A})$ の中心指標 ω の (既約) 保型表現と呼ぶ。

さて、$\mathcal{L}(G_n)_\omega$ は既約部分表現の直和の閉包 $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)_\omega$ (離散スペクトル) とその直交補空間 $\mathcal{L}_{\mathrm{cont}}(G_n)_\omega$ (連続スペクトル) からなる: $\mathcal{L}(G_n)_\omega = \mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)_\omega \oplus \mathcal{L}_{\mathrm{cont}}(G_n)_\omega$. 一方、$n$ の正整数の和への分解 $(\underline{n}) = (n_1, \dots, n_r)$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$ に対して、G_n の標準放物型部分群 $P_{(\underline{n})} = M_{(\underline{n})}U_{(\underline{n})}$:

$$M_{(\underline{n})} := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_r \end{pmatrix} \middle| \, g_i \in G_{n_i} \right\}, \quad U_{(\underline{n})} := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & * & \dots & * \\ & \mathbf{1}_{n_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \mathbf{1}_{n_r} \end{pmatrix} \in G_n \right\}$$

がある。この $P_{(\underline{n})}$ に沿っての $\phi \in \mathcal{L}(G_n)_\omega$ の定数項を

$$\phi_{P_{(\underline{n})}}(g) := \int_{U_{(\underline{n})}(F)\backslash U_{(\underline{n})}(\mathbb{A})} \phi(ug)\, du$$

と定義する。任意の $P_{(\underline{n})} \neq G_n$ に沿っての定数項が (ほとんど至るところ) 消えている $\phi \in \mathcal{L}(G_n)_\omega$ からなる閉部分空間を $\mathcal{L}_0(G_n)_\omega \subset \mathcal{L}(G_n)_\omega$ と書く (カスプスペクトル)。Piatetsky-Shapiro の定理 ([Lan76, 補題 3.1 の系] により $\mathcal{L}_0(G_n)_\omega$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)_\omega$ に含まれることが知られているが、その $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)_\omega$ での直交補空間を $\mathcal{L}_{\mathrm{res}}(G_n)_\omega$ と書く。すなわち次の直和分解がある。

$$\mathcal{L}(G_n)_\omega = \mathcal{L}_0(G_n)_\omega \oplus \mathcal{L}_{\mathrm{res}}(G_n)_\omega \oplus \mathcal{L}_{\mathrm{cont}}(G_n)_\omega. \tag{2.1}$$

G_n の保型表現の記述にはその局所情報を用いる。最低限の必要となる制限テンソル積分解と佐武パラメタを思い出そう。

- 無限素点 v で $G_n(F_v)$ 極大コンパクト部分群

$$\boldsymbol{K}_v := \begin{cases} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) & v \text{ が実のとき} \\ \mathrm{U}_n(\mathbb{R}) & v \text{ が複素のとき} \end{cases}$$

  を固定すれば、$(\mathfrak{gl}_n(F_v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \boldsymbol{K}_v)$ 加群が考えられる [Wal88]。既約ユニタリ化可能 $(\mathfrak{gl}_n(F_v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \boldsymbol{K}_v)$ 加群の同型類の集合は $G_n(F_v)$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合 $\Pi(G_n(F_v))$ と同一視される ([同 3.4 節] 参照)。

- 非アルキメデス素点 v では $G_n(F_v)$ の許容表現が考えられる [BZ76]。この場合にも [同 4.21] で解説されているとおり、$G_n(F_v)$ の既約ユニタリ化可能許容表現の同型類の集合と $\Pi(G_n(F_v))$ の間に自然な全単射がある。$G_n(F_v)$ の既約許容表現 (π, V) が不分岐とは、超スペシャル極大コンパクト部分群

$$\boldsymbol{K}_v = G_n(\mathcal{O}_v) = \{g \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_v) \mid \det g \in \mathcal{O}_v^\times\}$$

の作用で不変なベクトルを持つこととする: $V^{\boldsymbol{K}_v} \neq \{0\}$. このとき $\boldsymbol{K}_v$ 不変ベクトルは定数倍を除いて一意であることが知られている。

各素点 v での $\pi_v \in \Pi(G_n(F_v))$ の族で、ほとんど全ての非アルキメデス素点で π_v が不分岐であるものが与えられているとする。π_v の実現 (π_v, V_v) および π_v が不分岐な v での $\boldsymbol{K}_v$ 不変ベクトル $\xi_v^0 \in V_v^{\boldsymbol{K}_v}$ を固定すると、

$$\bigotimes_v V_v := \bigcup_S \Big(\bigotimes_{v \in S} V_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \xi_v^0 \Big)$$

は自然に既約 $\prod_{v|\infty} (\mathfrak{gl}_n(F_v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \boldsymbol{K}_v) \times G_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群になる。これを (π_v, V_v) たちの制限テンソル積と呼び、その同型類 (ξ_v^0 の取り方によらない) を $\bigotimes_v \pi_v$ と書く。

補題 2.2. 任意の $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ に対して、$\pi_v \in \Pi(G_n(F_v))$ の族で有限個を除く非アルキメデス素点 v で不分岐なものがあって、π は制限テンソル積 $\bigotimes_v \pi_v$ の完備化に同値である。

非アルキメデス素点 v を考える。G_n の上三角 Borel 部分群 (つまり放物型部分群 $P_{(1^n)} = M_{(1^n)} U_{(1^n)}$) を $B_n = T_n U_n$ と書く。$G_n(F_v)$ の任意の不分岐既約表現 π に対して、$F_v^\times$ の不分岐擬指標の重複度付き集合 $[\chi_1, \ldots, \chi_n] \in \mathrm{Irr}\,(F_v^\times / \mathcal{O}_v^\times)^n / \mathfrak{S}_n$ であって、π が放物型誘導表現

$$I_{B_n}^{G_n}(\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_n) := \mathrm{ind}_{B_n}^{G_n} [\delta_B^{1/2} (\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_n) \otimes \mathbb{1}_{U_n(F_v)}] \tag{2.2}$$

の唯一の不分岐組成因子であるようなものがただ一つある。ただし δ_B は $B_n(F_v)$ のモジュラス指標である。すなわち π は $\widehat{G}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ での

$$t_\pi := \begin{pmatrix} \chi_1(\varpi_v) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_n(\varpi_v) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

の共役類で一意に決まる。この半単純共役類を π の佐武パラメタまたは *Hecke* 共役類という。

定理 2.3 (GL_n 上の保型表現の記述)**.** 中心指標 ω を持つ $G_n(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合を $\Pi(G_n(\mathbb{A}))_\omega$ と書く。

(i) 重複度一定理 [Sha74]。任意の $\pi \in \Pi(G_n(\mathbb{A}))_\omega$ の $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)_\omega$ での重複度は高々1である。

(ii) カスプ保型表現の記述 [JPSS83], [JS81b], [CPS94]。$\pi \in \Pi(G_n(\mathbb{A}))_\omega$ が $\mathcal{L}_0(G_n)_\omega$ に現れるためには、任意の $1 \leq m \leq n-1$ および $G_m(\mathbb{A})$ の任意のカスプ保型表現 π' に対して、Rankin-Selberg 積 L 函数 $L(s, \pi \times \pi')$, ε 函数 $\varepsilon(s, \pi \times \pi')$ がよい性質を持つことが必要十分である[2]。

[2] この主張にはさらに強いバージョンもある。それらの主張および正確な定式化については [CKM04] を参照されたい。

(iii) 留数スペクトルの記述 [MW89]。$\pi \in \Pi(G_n(\mathbb{A}))_\omega$ が $\mathcal{L}_{\mathrm{res}}(G_n)_\omega$ に現れるためには、ある分解 $n = dm, (d, m \in \mathbb{N})$ とカスプ保型表現 $\pi_0 \in \Pi(G_m(\mathbb{A}))_\omega$ があって、F の任意の素点 v で π_v が放物型誘導表現

$$I_{P_{(m^d)}}^{G_n}(\pi_{0,v}|\det|_v^{(d-1)/2} \otimes \pi_{0,v}|\det|_v^{(d-3)/2} \otimes \cdots \otimes \pi_{0,v}|\det|_v^{(1-d)/2})$$

の唯一の既約商表現に同型であることが必要十分[3]。

(iv) 強重複度一定理 [JS81a]。$\pi, \pi' \in \Pi(G(\mathbb{A}))_\omega$ がともにカスプ保型表現で、ほとんど全ての有限素点で $t_{\pi_v} = t_{\pi'_v}$ を満たせば $\pi \simeq \pi'$ である。

2.2 仮説的 Langlands 対応とベースチェンジ

上記の GL_n の保型表現の記述は Arthur による Langlands 予想の精密化の立場から見るとわかりよい。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定して、絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を Γ, $\bar{F}/F$ の Weil 群を W_F と書く [Tat79]。この節では (予想を述べるだけの目的で) F の仮説的 *Langlands* 群 $\mathcal{L}_F$ が存在すると仮定する。これは W_F の巨大なコンパクト群による拡大で、その既約 n 次元表現と $G_n(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現が一対一に対応するとされている。

G_n の A パラメタとは、$\mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の n 次元表現 $\phi : \mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ で $\phi(\mathcal{L}_F)$ が有界であるものとする。G_n の A パラメタの同型類の集合を $\Psi(G_{n,F})$ と書こう。大域 Langlands 予想は次のように A パラメタの同型類と $\mathcal{L}(G_n)_\omega$ の既約部分商との間の対応として精密化される。

- $\phi|_{\mathcal{L}_F}$ が既約 (従って $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は自明) なとき、ϕ は $\mathcal{L}_F$ の既約 n 次元表現にほかならず、その同型類は $G_n(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現と対応する。

- 既約な ϕ は $\mathcal{L}_F$ のある既約表現 φ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約表現 ρ_d のテンソル積である: $\phi \simeq \varphi \otimes \rho_d$. ここで ρ_d は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の唯一の既約 d 次元表現 $\mathrm{Sym}^{d-1}\rho_2$ である。φ の次元を m として、φ に対応する $G_m(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現を π_0 と書けば、ϕ の同型類には定理 2.3 (iii) の留数スペクトルの既約成分が対応する。なお定理の主張に現れるシフト $(d-1, d-3, \ldots, 1-d)$ は ρ_d のウェイトである。以上、$\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)_\omega$ の既約成分に対応するパラメタは楕円的 (*elliptic*) と言われる。

- 一般に $\phi \simeq \bigoplus_{i=1}^r \phi_i$ を既約分解とする。各 ϕ_i に対応する保型表現を $\pi_i \hookrightarrow \mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_{n_i})_\omega$ として ϕ は放物型誘導表現
$$I_{P_{(\underline{n})}}^{G_n}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r)$$
に対応する。$r \geq 2$ ならこれは $\mathcal{L}_{\mathrm{cont}}(G_n)_\omega$ に属する。

[3] 一般に放物型部分群 $P = MU \subset G_n$ とその Levi 部分群 $M(\mathbb{A})$ の表現 π_M に対して、放物型誘導表現を

$$I_P^{G_n}(\pi_M) := \mathrm{ind}_{P(\mathbb{A})}^{G_n(\mathbb{A})}[\delta_P^{1/2}\pi_M \otimes \mathbb{1}_{U(\mathbb{A})}]$$

と定義している。ここで δ_P は $P(\mathbb{A})$ 上の左不変測度の δ_P 倍が右不変測度になるような擬指標 $\delta_P : P(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}_+^\times$ である。$\delta_P^{1/2}$ 倍しているのはユニタリ表現からの誘導表現が再びユニタリになるようにするためである。

さて、任意の有限次 Galois 拡大 E/F に対して Weil 群の場合と同様に自然な完全列 $1 \to \mathcal{L}_E \to \mathcal{L}_F \to \mathrm{Gal}(E/F) \to 1$ があるとされる。A パラメタの間の写像

$$\mathrm{res}_E^F : \Psi(G_{n,F}) \ni \phi \longmapsto \phi|_{\mathcal{L}_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \in \Psi(G_{n,E}) \tag{2.4}$$

に対応するべき、$G_n(\mathbb{A})$ の保型表現から $G_n(\mathbb{A}_E)$ の保型表現への写像が、E/F に対するベースチェンジリフトである。これは次のようにも言い換えられる。

$G_{n,F}$ の L 群は G_n の Langlands 双対群 $\widehat{G}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と Weil 群の直積 ${}^L G_{n,F} = \widehat{G}_n \times W_F$ であり、その A パラメタ ϕ は次の図式を可換にする ($\mathcal{L}_F$ の像が有界な) 準同型 $\phi : \mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L G_{n,F}$ と見なせる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi} & {}^L G_{n,F} \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ W_F & = & W_F \end{array}$$

ただし左の縦の射は $\mathcal{L}_F$ から W_F への自然な射である。A パラメタの同型は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 共役にほかならない。

一方、Weil の係数制限 $L_n := \mathrm{Res}_{E/F}\, G_n$ の Langlands 双対群は W_E から W_F への誘導群

$$\widehat{L}_n = I_{W_E}^{W_F}\, \widehat{G}_n := \{f : W_F \to \widehat{G}_n \,|\, f(uw) = uf(w),\, u \in W_E\}$$

であり、$\widehat{L}_n$ への W_F 作用は右移動作用となる。(特にこの作用は $\mathrm{Gal}(E/F)$ を経由する。) $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq W_F/W_E$ の W_F での代表系 $\{w_\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)}$ を固定すれば

$$\widehat{L}_n \ni f \longmapsto (f(w_\sigma))_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \in (\widehat{G}_n)^{\mathrm{Gal}(E/F)}$$

は同型で、左辺への $\mathrm{Gal}(E/F)$ 作用は $\tau.(g_\sigma)_\sigma = (g_{\sigma\tau})_\sigma, (g_\sigma \in \widehat{G}_n)$ に移る。すなわち L 群 ${}^L L_n = \widehat{L}_n \rtimes_{\rho_{L_n}} W_F$ において $\widehat{L}_n$ は $\widehat{G}_n$ の $[E:F]$ 個の直積であり、W_F のそれへの作用 ρ_{L_n} は $\mathrm{Gal}(E/F)$ を経由して $\widehat{G}_n$ たちの並べ替えを引き起こす。L_n の A パラメタとは、W_F への射影と可換になる $\mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ から ${}^L L_n$ への準同型で $\mathcal{L}_F$ の像が有界なものとする。二つの A パラメタが同値とはそれらが $\widehat{L}_n$ 共役であることとする。L_n の A パラメタの同値類の集合を $\Psi(L_n)$ と書く。このとき

$$\mathrm{Res}_{E/F}\ : \Psi(G_{n,E}) \ni \phi_E \longmapsto \mathrm{ind}_{\mathcal{L}_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}^{\mathcal{L}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\, \phi_E \in \Psi(L_n)$$

は全単射であり、$L_n(\mathbb{A})$ の保型表現と $G_n(\mathbb{A}_E)$ の保型表現が同一物であることを表している。(2.4) の res_E^F とこの全単射の合成 $b_{E/F} : \Psi(G_{n,F}) \overset{\mathrm{res}_E^F}{\to} \Psi(G_{n,E}) \overset{\mathrm{Res}_{E/F}}{\to} \Psi(L_n)$ は L 群の準同型

$$b_{E/F} : {}^L G_{n,F} \ni g \times w \longmapsto (g, g, \dots, g) \rtimes w \in {}^L L_n \tag{2.5}$$

との合成である: $b_{E/F}(\phi) = b_{E/F} \circ \phi, (\phi \in \Psi(G_{n,F}))$. ベースチェンジリフトはこれに対応する $G_n(\mathbb{A})$ の保型表現から $L_n(\mathbb{A}) = G_n(\mathbb{A}_E)$ の保型表現への写像である。この記述によれば、ベースチェンジの像は $\mathrm{Gal}(E/F)$ 安定、つまり $\pi_E \circ \sigma^{-1} \simeq \pi_E, (\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F))$ である保型表現 π_E からなる集合となるべきである。

2.3 ひねり付き内視論としての巡回ベースチェンジ

一般に二つの簡約群 G, H の L 群の間の準同型 $\varphi : {}^L H \to {}^L G$ があれば、それに対応する H から G への保型表現のリフティングが定まるという期待がある。このようなリフティングの統一的な構成法はもちろん知られていない。ただし ${}^L H$ が ${}^L G$ のある半単純自己同型の固定化群である場合には、内視論と呼ばれる理論の枠組みで G と H の Arthur-Selberg 跡公式を比較してリフトを作るプログラムが知られている。上の GL_n のベースチェンジの問題もこの理由により、予想の範疇を出て実際にリフトを構成できるのは E/F が巡回拡大の場合のみである。以下でもこの場合を考えることにしよう。

ひねり付き内視データ　E/F を d 次の巡回拡大とし、$\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元 σ を一つ取る。G_n の F 構造から定まる $L_n = \mathrm{Res}_{E/F} G_n$ の F 自己同型を $\tilde{\sigma}$ と書く。同型 $E \otimes_F E \xrightarrow{\sim} E^{\oplus d}$ を合成

$$E = E \otimes_F F \hookrightarrow E \otimes_F E \xrightarrow{\sim} E^{\oplus d}$$

が $z \in E$ を $(z, \sigma(z), \dots, \sigma^{d-1}(z))$ に送るように選べば、これが引き起こす同型 $L_n(E) \xrightarrow{\sim} G_n(E)^d$ で $\tilde{\sigma}$ は巡回置換 $\tilde{\sigma}(g_1, \dots, g_d) = (g_d, g_1, \dots, g_2)$ に移る。よって $\tilde{\sigma}$ は $\widehat{L}_n = (\widehat{G}_n)^d$ にも同様の巡回置換として作用する。このとき三つ組 $(G_n, 1, b_{E/F})$ は次の意味で $(L_n, \tilde{\sigma})$ の内視データである [KS99, 2 章]。

(i) G_n は F 上定義された Borel 部分群 B_n を持つ連結簡約群。

(ii) 1 は $\widehat{L}_n$ の単位元を表しており、$\widehat{L}_n$ の自己同型 $\mathrm{Ad}(1) \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}$ は Lie 環の自己同型として半単純である。

(iii) $b_{E/F}$ は (2.5) の L 群の埋め込みで次を満たす。

　(a) $\widehat{G}_n$ から $\widehat{L}_n$ の $\tilde{\sigma}$ 不変部分 $\widehat{L}_n^{\tilde{\sigma}}$ への同型に制限される。

　(b) $\mathrm{Ad}(1) \circ \tilde{\sigma} \circ b_{E/F} = b_{E/F}$.

しかも $(L_n, \tilde{\sigma})$ の楕円的、つまり離散スペクトルに寄与するような内視データは同型を除いてこの三つ組のみである。

跡公式の主要部分　正実数のなす乗法群 $\mathbb{R}_+^\times$ を $E_\infty^\times$ の部分群 $\{(a)_{w|\infty} \in E_\infty^\times \mid a \in \mathbb{R}_+^\times\}$ と同一視する。これを $G_n(\mathbb{A}_E)$ の中心 $\mathbb{A}_E^\times$ の部分群と見たものも $\mathbb{R}_+^\times$ で表す。$L_n(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash L_n(\mathbb{A}) = G_n(E)\mathbb{R}_+^\times \backslash G_n(\mathbb{A}_E)$ 上の二乗可積分函数の空間を $\mathcal{L}(G_{n,E})$ と書く。$E^\times \mathbb{R}_+^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ はコンパクトだから Hilbert 直和分解

$$\mathcal{L}(G_{n,E}) = \widehat{\bigoplus_{\omega_E \in \Pi(\mathbb{A}_E^\times / \mathbb{R}_+^\times E^\times)}} \mathcal{L}(G_{n,E})_{\omega_E}$$

があることに注意する。$\mathcal{L}(G_{n,E})$ には $\tilde{\sigma}$ が作用素

$$R(\sigma)\phi(g) := \phi(\sigma^{-1}(g)), \quad \phi \in \mathcal{L}(G_{n,E})$$

で作用する。適当な極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_{L_n}\subset L_n(\mathbb{A})$ を止め、$\mathcal{L}_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ 上の Hecke 函数、つまりコンパクト台付き両側 $\boldsymbol{K}_{L_n}$ 有限な函数の空間を $\mathcal{H}(L_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times)$ と書く。$f_E\in\mathcal{H}(L_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times)$ に対して、作用素

$$R(f_E)R(\sigma)\phi(g)=\int_{G_n(\mathbb{A}_E)/\mathbb{R}_+^\times}f_E(x)R(\tilde{\sigma})\phi(gx)\,dx=\int_{G_n(\mathbb{A}_E)/\mathbb{R}_+^\times}f_E(x)\phi(\sigma^{-1}(gx))\,dx$$

の適宜に正則化したトレースを記述するのが、$(L_n,\tilde{\sigma})$ に対するひねり付き跡公式 (*twisted trace formula*) である。$R(\sigma)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_{n,E})=\widehat{\bigoplus}_{\omega_E\in\Pi(\mathbb{A}_E^\times/\mathbb{R}_+^\times E^\times)}\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_{n,E})_{\omega_E}$ の既約成分たちに作用している。複数の既約部分表現からなる $\langle R(\sigma)\rangle$ 軌道上の $R(f_E)R(\sigma)$ のトレースは消えている (対角成分が消えているため) ので、ひねり付き跡公式は $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_{n,E})$ の σ 安定な既約成分上のトレースを拾い出す。

さて常の通りの変形を施せば

$$\begin{aligned}R(f_E)R(\sigma)\phi(x)&=\int_{G_n(\mathbb{A}_E)/\mathbb{R}_+^\times}f_E(x^{-1}y)\phi(\sigma^{-1}(y))\,dy\\&=\int_{G_n(E)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)}\sum_{\delta\in G_n(E)}f_E(x^{-1}\delta y)\phi(\sigma^{-1}(y))\,dy\\&=\int_{G_n(E)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)}\Bigg(\sum_{\delta\in G_n(E)}f_E(x^{-1}\delta\sigma(y))\Bigg)\phi(y)\,dy\end{aligned}$$

であるから、$R(f_E)R(\sigma)$ は積分核

$$K_\sigma(x,y):=\sum_{\delta\in G_n(E)}f_E(x^{-1}\delta\sigma(y))$$

を持つ積分作用素である。$R(f_E)R(\sigma)$ がトレースを持つならば、この積分核の対角部分集合上の積分がそのトレースを与えるのだが、残念ながら $R(f_E)R(\sigma)$ はトレースを持たず積分は収束しない。そこで $K_\sigma(x,x)$ から「積分を発散させる部分」を適宜切り落としたものを積分して得られる Arthur 跡公式を使うことになる。ここではその議論は省略し、Arthur 跡公式の主要部分だけを説明する。まず保型表現のトレースを含むスペクトル辺の主要項は離散部分

$$\begin{aligned}I_{\sigma\text{-disc}}(f_E)=&\sum_{\pi\subset\mathcal{L}_{\sigma\text{-disc}}(L_n)}\mathrm{tr}\pi(f_E)\pi(\sigma)\\&+\sum_M\frac{|W_0^M|}{|W_0^{L_n}|}\sum_w|\det(w-1|_{\mathfrak{a}_M^{L_n,\tilde{\sigma}}})|^{-1}\mathrm{tr}(M(w,0)I_P^{L_n}(0,f_E)I_P^{L_n}(0,\sigma))\end{aligned}\tag{2.6}$$

である。第一行が $\mathcal{L}(L_n)$ の「σ 離散スペクトル」に現れる保型表現の指標の和であり、第二行は連続スペクトルの寄与だがウェイト付き指標による展開において孤立極での留数として離散的に見えるものたちからなる。

次に跡公式のもう一方の辺である幾何辺の主要部、楕円正則部分を見てみよう。元 $\delta\in G_n(E)$ が σ 正則とは、$L_n=\mathrm{Res}_{E/F}G_n$ 内の $\mathrm{Ad}(\delta)\circ\tilde{\sigma}$ 固定点の群 $I_{\delta,\sigma}=L_n^{\mathrm{Ad}(\delta)\circ\tilde{\sigma}}$ がトーラスであることとする。(これは $\mathrm{N}_{E/F}(\delta):=\delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{d-1}(\delta)$ の特性多項式が重根を持たな

いことに同値である。) さらに $I_{\delta,\sigma}/Z(G_n)$ が非等方的、つまり F 有理指標を持たないとき δ は σ 楕円正則であるという。$G_n(E)$ 内の σ 楕円正則元の集合を $G_n(E)_{\sigma\text{-ell}}$ と書き、上の積分核の σ 楕円正則部分を

$$K_{\sigma\text{-ell}}(x,y) := \sum_{\delta\in G_n(E)_{\sigma\text{-ell}}} f_E(x^{-1}\delta\sigma(y))$$

と定める。$G_n(E)$ は $G_n(E)_{\sigma\text{-ell}}$ に σ 共役 $x\mapsto g^{-1}x\sigma(g), (x\in G_n(E)_{\sigma\text{-ell}}, g\in G_n(E))$ で作用する。この作用による $G_n(E)_{\sigma\text{-ell}}$ 内の $G_n(E)$ 軌道 (σ 共役類) の集合を $\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))$ と書く。以上のもとで $(L_n,\tilde{\sigma})$ に対するひねり付き跡公式の楕円正則項は

$$\begin{aligned}
\int_{G_n(E)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} K_{\sigma\text{-ell}}(x,x)\,dx &= \int_{G_n(E)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} \sum_{\delta\in G_n(E)_{\sigma\text{-ell}}} f_E(x^{-1}\delta\sigma(x))\,dx \\
&= \int_{G_n(E)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} \sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))} \sum_{\gamma\in I_{\delta,\sigma}(F)\backslash G_n(E)} f_E(x^{-1}\gamma^{-1}\delta\sigma(\gamma x))\,dx \\
&= \sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))} \int_{G_n(E)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} \sum_{\gamma\in I_{\delta,\sigma}(F)\backslash G_n(E)} f_E(x^{-1}\gamma^{-1}\delta\sigma(\gamma x))\,dx \\
&= \sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))} \int_{I_{\delta,\sigma}(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} f_E(x^{-1}\delta\sigma(x))\,dx \\
&= \sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))} \int_{I_{\delta,\sigma}(\mathbb{A})\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} \int_{I_{\delta,\sigma}(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash I_{\delta,\sigma}(\mathbb{A})} f_E(x^{-1}\delta\sigma(x))\,dt\,\frac{dx}{dt} \\
&= \sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))} \tau(I_{\delta,\sigma})O_{\delta,\sigma}(f_E)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

で与えられる。ここで dt は $I_{\delta,\sigma}(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ 上の玉河測度で $\tau(I_{\delta,\sigma})$ は $I_{\delta,\sigma}$ の玉河数 (玉河測度についての $I_{\delta,\sigma}(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash I_{\delta,\sigma}(\mathbb{A})$ の測度) を表す。また

$$O_{\delta,\sigma}(f_E) := \int_{I_{\delta,\sigma}(\mathbb{A})\backslash G_n(\mathbb{A}_E)} f_E(g^{-1}\delta\sigma(g))\,\frac{dg}{dt}$$

は f_E の δ での σ 軌道積分である。上記の変形は当初は形式的なものだが、右辺は絶対収束していることが確かめられるので全ての変形が正当化される [文献]。

同様の構成を G_n に対しても実行する。$G_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ 上の Hecke 函数の空間を $\mathcal{H}(G_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times)$ と書く。$G_n(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G_n(\mathbb{A})$ 上の L^2 空間 $\mathcal{L}(G_{n,F})$ 上の作用素

$$R(f)\phi(x) := \int_{G_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times} f(y)\phi(xy)\,dy, \quad f\in\mathcal{H}(G_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times)$$

は積分核

$$K(x,y) := \sum_{\gamma\in G_n(F)} f(x^{-1}\gamma y)$$

を持つ積分作用素である。G_n の Arthur 跡公式のスペクトル辺の離散部分は

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{disc}}(f) &= \sum_{\pi\subset\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G_n)} \mathrm{tr}\pi(f) \\
&+ \sum_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^{G_n}|} \sum_w |\det(w-1|_{\mathfrak{a}_M^{G_n}})|^{-1}\mathrm{tr}(M(w,0)I_P^{G_n}(0,f))
\end{aligned} \tag{2.8}$$

であり、重要なのは離散スペクトルに現れる保型表現の指標和である第一行である。$G_n(F)$ 内の楕円正則元、すなわち特性多項式が既約な元の集合を $G_n(F)_{\mathrm{ell}}$ として $K(x,y)$ の楕円正則部分

$$K_{\mathrm{ell}}(x,y) := \sum_{\gamma \in G_n(F)_{\mathrm{ell}}} f(x^{-1}\gamma y)$$

を考える。G_n の Arthur 跡公式の楕円正則部分は次で与えられる。

$$\int_{G_n(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G_n(\mathbb{A})} K_{\mathrm{ell}}(x,x)\,dx = \sum_{\{\gamma\} \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(G_n(F))} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f). \tag{2.9}$$

ここで $\Gamma_{\mathrm{ell}}(G_n(F))$ は $G_n(F)_{\mathrm{ell}}$ 内の $G_n(F)$ 共役類の集合であり、$\tau(I_\gamma)$ は γ の中心化群 $I_\gamma = \mathrm{Cent}(\gamma, G_n)$ の玉河数である。

$$O_\gamma(f) := \int_{I_\gamma(\mathbb{A})\backslash G_n(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{dt}$$

は f の γ での軌道積分を表す。

ノルム　前段により L_n のひねり付き跡公式の主要部の各項は $G_n(E)$ 内のある種の σ 共役類で添字づけられていることがわかった。今から説明するように、内視群 G_n とはその共役類の集合から L_n の σ 共役類の集合へ自然な写像を持つ群にほかならない。

対角極大トーラス $T_n \subset G_n$ を思い出す。その Weyl 群 $\Omega(G_n, T_n) := \mathrm{Norm}(T_n, G_n)/T_n$ は対角成分の置換の群 $\mathfrak{S}_n$ である。G_n の半単純共役類の集合を $\mathcal{C}\ell_{ss}(G_n)$ と書けば Jordan 標準形を取る次の写像は全単射である。

$$\mathcal{C}\ell_{ss}(G_n) \ni C \longmapsto C \cap T_n \in T_n/\mathfrak{S}_n. \tag{2.10}$$

L_n の元 δ が σ 半単純とは $\mathrm{Ad}(\delta) \circ \tilde{\sigma}$ の L_n の Lie 環への作用が半単純 (対角化可能) であることとする。L_n 内の σ 半単純元の σ 共役類の集合を $\mathcal{C}\ell_{\sigma\text{-}ss}(L_n)$ で表す。極大トーラス $T_{L_n} := \mathrm{Res}_{E/F} T_n \subset L_n$ を考える。$(L_n, T_{L_n}) \otimes_F \bar{F} \simeq (G_{n,\bar{F}}, T_{n,\bar{F}})^d$ に $\tilde{\sigma}$ は巡回置換として作用しているのだった。$\tilde{\sigma} - 1 : T_{L_n} \ni t \mapsto t\tilde{\sigma}(t)^{-1} \in T_{L_n}$ とおけば、

$$\mathrm{N}_{E/F} : (T_{L_n})_{\tilde{\sigma}} := T_{L_n}/\mathrm{im}(\tilde{\sigma} - 1) \ni (t_1, \ldots, t_d) \longmapsto t_1 \cdots t_d \in T_n \tag{2.11}$$

は同型である。T_{L_n} の L_n での Weyl 群 $\Omega(L_n, T_{L_n}) \simeq \mathfrak{S}_n^d$ の $\tilde{\sigma}$ 不変部分 $\Delta\mathfrak{S}_n$ (対角部分群) は $(T_{L_n})_{\tilde{\sigma}}$ に作用するが、その作用は上の同型の右辺への自然な $\mathfrak{S}_n$ に一致する。以上のもとで (2.10) のひねり付き版の全単射

$$\mathcal{C}\ell_{\sigma\text{-}ss}(L_n) \ni C \longmapsto C \cap T_{L_n} \in (T_{L_n})_{\tilde{\sigma}}/\Delta\mathfrak{S}_n \overset{\mathrm{N}_{E/F}}{\xrightarrow{\sim}} T_n/\mathfrak{S}_n \tag{2.10$_\sigma$}$$

がある。

さて、L 群の定義 ([Bor79]) から $\widehat{G}_n$ の対角元からなる極大トーラス $\mathcal{T}_n$ は T_n の Langlands 双対トーラス $X^*(T_n) \otimes \mathbb{C}/X^*(T_n)$ と同一視される。同様に $\widehat{L}_n = \widehat{G}_n^d$ の対角極大トーラス $\mathcal{T}_{L_n} = \mathcal{T}_n^d$ は T_{L_n} の双対トーラスである。内視データ $(G_n, 1, b_{E/F})$ の $b_{E/F} : {}^LG_n \hookrightarrow {}^LL_n$ は

同型 $b_{E/F}: \mathcal{T}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{L_n}^{\widetilde{\sigma}}$ を与える。その双対同型 $\mathrm{N}_{E/F}: (T_{L_n})_{\widetilde{\sigma}} \xrightarrow{\sim} T_n$ は実は (2.11) そのものである。こうして内視データの定義から半単純共役類の間の写像

$$\mathcal{A}_{G_n/L_n}: \mathcal{C}\ell_{ss}(G_n) \overset{(2.10)}{\xrightarrow{\sim}} T_n/\mathfrak{S}_n \overset{\mathrm{N}_{E/F}^{-1}}{\longrightarrow} (T_{L_n})_{\widetilde{\sigma}}/\Delta\mathfrak{S}_n \overset{(2.10_\sigma)}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{C}\ell_{\sigma\text{-}ss}(L_n)$$

が得られる。容易に確かめられるように $\mathcal{A}_{G_n/L_n}$ は F 上定義されている。よって半単純な $\gamma \in G_n(F)$ の共役類の像 $\mathcal{A}_{G_n/L_n}(\mathrm{Ad}(G)\gamma) \in \mathcal{C}\ell_{\sigma\text{-}ss}(L_n)$ は F 上定義されているのだが、$L_n(F)$ の元を含むとは限らないことに注意する。(例えば $n=1$ の場合、$\mathrm{N}_{E/F}: E^\times \to F^\times$ は全射ではない。) そこで $\mathcal{A}_{G_n/L_n}(\mathrm{Ad}(G)\gamma)$ がある $\delta \in L_n(F)$ を含むとき、γ は δ のノルムであるといい $\gamma \in \mathcal{N}_{E/F}(\delta)$ と書く。$\mathcal{A}_{G_n/L_n}(\mathrm{Ad}(G)\gamma) \cap L_n(F)$ が空なとき、γ はノルムでないという。

このベースチェンジの主内視群の場合には $\mathcal{A}_{G_n/L_n}$ が単射になるため、齋藤・新谷以来、その逆写像 $\mathcal{N}_{E/F}$ をノルム写像として用いていた [Lan80], [AC89]。ここでは一般のひねり付き内視群の場合にはこの向きでしかノルム写像は存在しないことを考慮して、この [KS99] による定義を採用した。次は容易に確かめられる。

- $\mathcal{A}_{G_n/L_n}$ は F 上定義された共役類を F 上定義された σ 共役類に移す。
- $\mathcal{A}_{G_n/L_n}$ は $\varGamma_{\mathrm{ell}}(G_n(F))$ から $\varGamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))$ への単射を与える。

軌道積分の移行と跡公式の比較　$G_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ 上の Hecke 函数の空間 (畳み込み積について $\mathbb{C}$ 代数になる) は制限テンソル積

$$\mathcal{H}(G_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times) = \bigcup_S \Big(\mathcal{H}(G_n(F_\infty)/\mathbb{R}_+^\times) \otimes \bigotimes_{v\nmid\infty, \in S} \mathcal{H}(G_n(F_v)) \bigotimes 1_{\boldsymbol{K}_v}\Big)$$

である。ただし S は全ての無限素点を含む素点の有限集合を走り、$\mathcal{H}(G_n(F_\infty)/\mathbb{R}_+^\times)$ は $G_n(F_\infty)/\mathbb{R}_+^\times$ 上の台がコンパクトで両側 $\boldsymbol{K}_\infty = \prod_{v|\infty} \boldsymbol{K}_v$ 有限な函数の空間である。有限素点 v に対して $G_n(F_v)$ 上のコンパクト台付き局所定数函数の空間を $\mathcal{H}(G_n(F_v))$, $\boldsymbol{K}_v$ の特性函数を $1_{\boldsymbol{K}_v}$ と書いている。$\mathcal{H}(L_n(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times)$ も同様の分解を持つ。次の結果は非アルキメデス的な場合には [AC89, I.3], アルキメデス的な場合には [Lab99, 3.5 節] で証明されている。

命題 2.4 (軌道積分の移行). 任意の $f_{E,v} \in \mathcal{H}(L_n(F_v))$ に対して $f \in \mathcal{H}(G_n(F_v))$ で、任意の σ 正則な $\delta \in G_n(F_v)$ に対して

$$O_\gamma(f) = \begin{cases} O_{\delta,\sigma}(f_{E,v}) & \gamma \text{ が } \delta \text{ のノルムのとき} \\ 0 & \gamma \text{ がノルムでないとき} \end{cases} \tag{2.12}$$

が成り立つものがある。 □

次に非アルキメデス素点 v で E_v/F_v が不分岐である場合を考える。$G_n(F_v)$ の不分岐 *Hecke* 環、つまり両側 $\boldsymbol{K}_v$ 不変な元からなる $\mathcal{H}(G_n(F_v))$ の部分環を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G_n(F_v))$ と書く。

不分岐主系列表現 $I_{B_n}^{G_n}(\chi_1\otimes\cdots\otimes\chi_n)$ の同型類はその佐武パラメタ $t[\chi_1,\dots,\chi_n]$ ((2.3) を見よ) で分類されていた。$h\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G_n(F_v))$ に対して

$$h^\vee:\mathcal{T}_n\ni t[\chi_1,\dots,\chi_n]\longmapsto \mathrm{tr}I_{B_n}^{G_n}(\chi_1\otimes\cdots\otimes\chi_n,h)\in\mathbb{C}$$

とおけばこれは $\mathcal{T}_n$ 上の $\mathfrak{S}_n$ 不変多項式函数であり、写像

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G_n(F_v))\ni h\overset{\sim}{\longmapsto} h^\vee\in\mathbb{C}[\mathcal{T}_n]^{\mathfrak{S}_n} \tag{2.13}$$

は佐武同型と呼ばれる $\mathbb{C}$ 代数の同型である。同様に $L_n(F_v)$ の不分岐 Hecke 環 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L_n(F_v))$ に対しても佐武同型

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L_n(F_v))\ni h_{E_v}\overset{\sim}{\longmapsto} h_{E_v}^\vee\in\mathbb{C}[\mathcal{T}_{L_n}]^{\mathfrak{S}_n{}^d}\simeq(\mathbb{C}[\mathcal{T}_n]^{\mathfrak{S}_n})^{\otimes d} \tag{2.13$_E$}$$

が定まる。これらと $b_{E/F}$ (2.5) を使って Hecke 環の間のベースチェンジ射を

$$b_{E/F}:\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L_n(F_v))\xrightarrow[\sim]{(2.13_E)}\mathbb{C}[\mathcal{T}_{L_n}]^{\mathfrak{S}_n{}^d}\xrightarrow{b_{E/F}^*}\mathbb{C}[\mathcal{T}_n]^{\mathfrak{S}_n}\xrightarrow[\sim]{(2.13)}\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G_n(F_v))$$

と定義する。これは $\mathbb{C}$ 代数の準同型である。次の命題は Kottwitz の結果を用いて Clozel [Clo90], Labesse [Lab90] により証明された。

命題 2.5 (基本補題)**.** $h_{E_v}\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L_n(F_v))$ と $h:=b_{E/F}(h_{E_v})\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G_n(F_v))$ は軌道積分の等式 (2.12) を満たす。

以上の結果を跡公式に組み込んで $(L_n,\tilde{\sigma})$ のひねり付き跡公式と G_n の跡公式を比較する。主要項である楕円正則項 (2.7), (2.9)

$$T_{\sigma\text{-ell}}(f_E):=\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))}\tau(I_{\delta,\sigma})O_{\delta,\sigma}(f_E),\quad T_{\mathrm{ell}}(f):=\sum_{\{\gamma\}\in\Gamma_{\mathrm{ell}}(G_n(F))}\tau(I_\gamma)O_\gamma(f)$$

で解説しよう。まず $f_E=\bigotimes_v f_{E,v}\in\mathcal{H}(L_n(\mathbb{A}))$, $f=\bigotimes_v f_v\in\mathcal{H}(G_n(\mathbb{A}))$ を

(a) 全ての素点 v で $f_{E,v}$, f_v は命題 2.4 を満たす。

(b) ほとんど全ての非アルキメデス素点 v で $f_{E,v}\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{L,v}}(L_n(F_v))$ かつ $f_v=b_{E/F}(f_{E,v})\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_v}(G_n(F_v))$.

となるように選ぶ。するとノルムでない $\gamma\in\Gamma_{\mathrm{ell}}(G_n(F))$ では $O_\gamma(f)=0$ であり、

$$T_{\mathrm{ell}}(f)=\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))}\tau(I_{\mathcal{N}_{E/F}(\delta)})O_{\mathcal{N}_{E/F}(\delta)}(f)=\sum_{\{\delta\}\in\Gamma_{\sigma\text{-ell}}(G_n(E))}\tau(I_{\mathcal{N}_{E/F}(\delta)})O_{\delta,\sigma}(f_E)$$

が成り立つ。ところが容易に確かめられるように $I_{\mathcal{N}_{E/F}(\delta)}\simeq I_{\delta,\sigma}$ であるから、それらの玉河数も一致して $T_{\sigma\text{-ell}}(f_E)=T_{\mathrm{ell}}(f)$ が得られる。こうした議論により、上のような (f_E,f) に対しては等式

$$I_{\sigma\text{-disc}}(f_E)=I_{\mathrm{disc}}(f) \tag{2.14}$$

が得られる。(実際の比較のプロセスは、特異項と呼ばれる連続スペクトルや楕円的でない共役類からの寄与の処理を含み、大変複雑である [AC89, 2 章]。)

2.4　GL_n の巡回ベースチェンジ

前節で得られた等式 (2.14) は条件 (a), (b) を満たす任意の (f_E, f) に対して成り立つ。特にテスト函数の不分岐成分たちは (b) を満たす不分岐 Hecke 環の元を走るとしてよい。ところが強重複度一定理 (定理 2.3 (iv)) から GL_n の保型表現は不分岐 Hecke 環の作用だけで一意に決まるから、これらの不分岐 Hecke 環の作用で (2.14) の両辺を単一の保型表現の寄与からなるよう切り分けることができる。おおざっぱではあるが、以上のような議論により次の定理が証明できる。

$G_n(\mathbb{A}_E)$ の保型表現 π_E が σ 離散的とは、

- $G_n(\mathbb{A}_E)$ の σ 不変離散保型表現。
- ある因子分解 $d = mk$ と $G_m(\mathbb{A}_E)$ の σ^k 不変離散保型表現 π_d に対する放物型誘導表現

$$I_{P_{(m^k)}}^{G_n}(\pi_d \otimes \sigma(\pi_d) \otimes \cdots \otimes \sigma^{k-1}(\pi_d))$$

のいずれかであることとする。後者は連続スペクトル $\mathcal{L}_{\mathrm{cont}}(L_n)$ の既約部分商であることに注意せよ。

定理 2.6 ([AC89] 3 章)**.** E/F を代数体の d 次巡回拡大とし、$\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元 σ を取る。
(i) $G_n(\mathbb{A})$ の任意の離散保型表現 π に対して $G_n(\mathbb{A}_E)$ の σ 離散保型表現 π_E で、ほとんど全ての素点 v で $t_{\pi_{E,v}} = b_{E/F}(t_{\pi_v})$ を満たすものがただ一つある。これを π のベースチェンジリフトという。
(ii) 上の π とそのベースチェンジリフト π_E の任意の素点 v での局所成分 $\pi_v, \pi_{E,v}$ は新谷等式

$$\mathrm{tr}\pi_v(f_v) = \mathrm{tr}\Big(\pi_{E,v}(f_{E,v})\pi_{E,v}(\sigma)\Big)$$

を満たす。ここで $f_v \in \mathcal{H}(G_n(F_v))$, $f_{E,v} \in \mathcal{H}(L_n(F_v))$ は命題 2.4 を満たすものであり、$\pi_{E,v}(\sigma) : \sigma(\pi_{E,v}) \xrightarrow{\sim} \pi_{E,v}$ はある $L_n(F_v)$ 同型である。
(iii) ベースチェンジリフトは $G_n(\mathbb{A})$ の離散保型表現の集合から $G_n(\mathbb{A}_E)$ の σ 離散保型表現の集合への全射である。
(iv) $G_n(\mathbb{A})$ の離散保型表現 π, π' のベースチェンジリフトが一致するためには、ある指標 $\omega : \mathbb{A}^\times/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \to \mathbb{C}^1$ に対して $\pi' \simeq \omega(\det) \otimes \pi$ となることが必要十分である。