コアセミナー「数学入門セミナー」演習問題

新居 俊作

演習の進め方と成績の基準

- 各回の演習問題は基本問題 (易しいという意味ではない) からなる [A] 問題と応用問題からなる [B] 問題から構成されている。
- [A] 問題は教員の側から問題ごとに解答者を指名し、各問題の解答の解説を行うことを指名された学生の義務とする。
- [A] 問題の配点はコアセミナーの配点 50 点の内 30 点とし、毎回指名されるごとに上記の義務を果たした場合にのみ最終的に与えられる。
- **[A] 問題を三回解答できなかった (欠席も一回に数える) 者は、上記の義務を果たさなかったとみなし、[A] 問題の得点を 0 点とする。**
- [B] 問題は希望者が解答を行うこととし、一問につき 5 点を与える (20 点を上限とする)。

以上。

第一回

第1章　論理

1.1　命題論理

[A]

問題 1.1 論理積、論理和と同値命題のベン図を描き真理表を書け。

問題 1.2 p, q, r を命題とする時、以下の同値命題は全て真であることをベン図を描いて確かめ真理表を書いて証明せよ。

反射律

$$\bar{\bar{p}} \equiv p$$

ベキ等律

$$(p \wedge p) \equiv p, \quad (p \vee p) \equiv p$$

交換律

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p), \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

結合律

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)), \quad ((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

分配律

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)), \quad (p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

吸収律

$$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p, \quad (p \vee (p \wedge q)) \equiv p$$

ド・モルガンの法則

$$\overline{(p \wedge q)} \equiv (\bar{p} \vee \bar{q}), \quad \overline{(p \vee q)} \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

同値変形 p, q, r を命題とするとき、以下を証明せよ。

(1)　$p \equiv q$ が真ならば以下の同値命題は全て真である。

(i)　$\bar{p} \equiv \bar{q}$

(ii)　$(p \wedge r) \equiv (q \wedge r)$

(iii)　$(p \vee r) \equiv (q \vee r)$

(2)　$p \equiv q$　と　$q \equiv r$　が真ならば　$p \equiv r$　も真である。

[**B**]

有限個の命題 $p_1, \ldots, p_n$ について **ド・モルガンの法則**

$\overline{p_1 \wedge \cdots \wedge p_n} \equiv \bar{p_1} \vee \cdots \vee \bar{p_n}, \quad \overline{p_1 \vee \cdots \vee p_n} \equiv \bar{p_1} \wedge \cdots \wedge \bar{p_n}$

が成り立つことを示せ。($p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ 及び $p_1 \vee \cdots \vee p_n$ という表記が意味を持つことも示せ。)

$c_1, \ldots, c_n$ を実数とするとき、命題「$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$」の否定命題を書け。

第二回

[**A**]

問題 1.3 次の同値命題が真であることを、真理表を書いて証明せよ。

$$(p \to q) \equiv (\bar{p} \vee q)$$

問題 1.4 命題 p, q に対して、$p \to q$ の逆と裏の真理表を書け。

問題 1.5 命題 p, q, r について $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow r$ のとき $p \Rightarrow r$ であることを真理表を書いて証明せよ。

問題 1.6 命題 p, q に対し $p \Leftrightarrow q$ であることと、同値命題 $p \equiv q$ が真であることとは同じことであることを真理表を書いて証明せよ。

問題 1.7 命題 p に対して
(1) $p \Rightarrow \mathbf{I}$
(2) $\mathbf{O} \Rightarrow p$
であることを真理表を書いて証明せよ。

p が命題のとき次を証明せよ。
(1) $p \wedge \mathbf{I} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{I} \wedge p \Leftrightarrow \ p$、　　$p \vee \mathbf{I} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{I} \vee p \Leftrightarrow \mathbf{I}$
(2) $p \wedge \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{O} \wedge p \Leftrightarrow \mathbf{O}$、　　$p \vee \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{O} \vee p \Leftrightarrow p$

命題 p, q に対して次を証明せよ。
(1) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
(2) $p \Rightarrow (p \vee q)$

p, q を命題とするとき $p \Rightarrow (q \wedge \bar{q})$ ならば $\bar{p}$ は真であることを示せ。

ある事件の容疑者 a、b について調査した刑事が、次の 4 つの事実を突き止めたと主張しているが、矛盾はないか。

(1) a または b は犯人である。

(2) a が犯人なら b も共犯である。

(3) a または b は潔白である。

(4) b が犯人なら a も共犯である。

[B]

全ての論理式は $\overline{p \wedge q}$ の形の論理式の組み合わせで書けることを証明せよ。

次の推論の正否を判定せよ。

　a が嘘つきなら、 b と c の少なくとも一人は嘘つきではない。ところが、b と c のいずれかが嘘つきなら、a は嘘つきではない。従って、 a と b のいずれかは嘘つきでない。

エジンバラにあるといわれるある秘密のクラブのメンバーは、次のような特徴を持っているといわれる。このクラブは本当に存在するか?

(1) スコットランド人でないメンバーは、赤いソックスを履いている。

(2) メンバーは、キルトをはいているか赤いソックスを履いていないかのどちらかである。

(3) 結婚しているメンバーは日曜日に外出することは無い。

(4) 日曜日に外出するメンバーはスコットランド人であり、また、スコットランド人のメンバーは日曜日に外出する。

(5) キルトをはいているメンバーは皆スコットランド人でありかつ結婚している。

(6) スコットランド人のメンバーは必ずキルトをはいている。

　天国への階段は途中で二つに分かれていて、その一方は天国に通じているが、他の一方は地獄へと通じているいう。道が分かれるところには、天使と、天使そっくりに化けた悪魔が居て、階段を上ってきた魂はその一方にのみ、一回だけ「Yes」または「No」を答えとする質問をすることが出来るという。

　質問をした相手がたまたま天使であったならば、必ず正しい答えが返ってくるが、悪魔であった場合には必ず嘘の答えが返ってくるという。

　質問は一方に対してのみで、かつ一回しか出来ないとき、どのような質問をすれば天国への道を聞き出すことが出来るか。但し、悪魔は天使そっくりに化けていて、二人のうちどちらが天使か分からないものとする。

第三回

1.2　述語論理

[**A**]

問題 1.8 命題関数 $p(x), q(x)$ に対して

$$(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (p(x) \wedge q(x))$$

$$(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x)) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x))$$

であることを真理表を使って証明せよ。

$\forall x\ p(x)$	$\forall x\ q(x)$	$(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x))$	$\forall x\ (p(x) \wedge q(x))$

$\forall x\ p(x)$	$\forall x\ q(x)$	$(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))$	$\forall x\ (p(x) \vee q(x))$

問題 1.9 上記の第二式の逆「$(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x)) \Leftarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x))$」の反例 (成り立たない例) をあげよ。

p を命題 $q(x)$ を命題関数とするとき次を示せ。

$$\forall x\,(p \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (p \rightarrow \forall x\ q(x))$$

問題 1.10 命題関数 $p(x), q(x)$ に対して

$$\exists x\ (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x))$$

$$\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))$$

であることを真理表を使って証明せよ。

<table>
<tr><th colspan="2">$\exists x\ p(x)$</th><th colspan="2">$\exists x\ q(x)$</th><th colspan="2">$(\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x))$</th><th colspan="2">$\exists x\ (p(x) \vee q(x))$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">$\exists x\ p(x)$</th><th colspan="2">$\exists x\ q(x)$</th><th colspan="2">$\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$</th><th colspan="2">$(\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))$</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

問題 1.11 上記の第二式の逆「$\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \Leftarrow (\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))$」の反例をあげよ。

p を命題 $q(x)$ を命題関数とするとき次を示せ。

$$\exists x\,(p \to q(x)) \Leftrightarrow (p \to \exists x\ q(x))$$

[**B**]
ある事件の容疑者についての以下の条件からどのような結論が得られるか。
(1) 全ての犯人が容疑者 a、b、c のうちにいる。
(2) 全ての犯人は左ききであるかまたは右手がない。
(3) 犯人の中には、右手のある左ききが存在する。
(4) c が犯人なら a も犯人である。
(5) a は右手がない。
(6) b は右手があるが左ききではない。

第四回

[**A**]

問題 1.12 二変数の命題関数 $p(x,y)$ で

$$\forall x \exists y\ p(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x\ p(x,y)$$

となる例をあげよ。

$p(x)$ を命題関数 q を命題とするとき次を示せ。

$$\forall x\,(p(x) \to q) \Leftrightarrow ((\exists x\ p(x)) \to q)$$

$p(x)$ を命題関数 q を命題とするとき次を示せ。

$$\exists x\,(p(x) \to q) \Leftrightarrow ((\forall x\ p(x)) \to q)$$

1.3 $\varepsilon-\delta$ 論法

問題 1.13

「$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」

と

「$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)$ が成り立つ」

が同じであることを示せ。(ヒント $(p \to q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ を使う)

問題 1.14

「$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ 0 < |\forall x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」

と

「$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ ($0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$) が成り立つ」

及び

「$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x$ ($0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - \alpha| < \varepsilon$) が成り立つ」

が同じであることを示せ。

問題 1.15
(1) 「数列 a_n が α に収束しない」という命題を論理記号で書け (当然極限が存在しない場合も含む)。
(2) 関数 $f(x)$ について「$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ ではない」という命題を論理記号で書け (当然極限が存在しない場合を含む)。
(3) 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続ではないという命題を論理記号で書け。

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ を $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ。

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ を $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ。

[**B**]
「数列 a_n がどこにも収束しない」という命題を $\varepsilon - \delta$ 論法で書け。

実数全体で定義された関数 $f(x)$ について「$f(x)$ が実数上のどの点でも連続ではない」という命題を $\varepsilon - \delta$ 論法で書け。

実践練習–入試数学から–

1.4　入試数学から

[**A**] 以下の問題を論理記号で表現し解け。

どのような実数 α を選んでも、直線 $y = 2\alpha x - (\alpha + 1)^2$ が決して通らない点 (x, y) の存在範囲を求め、これを図示せよ。(日本女子大)

実数 k に対して曲線

$$C_k \colon x^2 + y^2 + 3kx + (k-2)y - 6k - 4 = 0$$

を考える。

(1) 任意の実数 k に対し C_k は円を表すことを証明し、k を動かしたとき C_k の中心の描く曲線を求めよ。

(2) 全ての C_k が通る点があれば、それを全て求めよ。

(3) どの C_k も通らない点があれば、それを全て求めよ。

(立命館大)

関数 $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ上の二点を結ぶ線分の中点となるような点全体を図示せよ。(名古屋大)

k が負でない実数値をとって変るとき、直線

$$y = 2kx - k^2$$

上の点の存在する範囲を求めよ。(明治大)

t を $t \geq -1$ を満たす実数の定数とするとき、直線

$$x - 2ty + (t^2 + 1) = 0$$

の通らない範囲を求め、これを図示せよ。(関西医大)

二点 $P(x,y), Q(X,Y)$ の座標の間に $X=\frac{x}{x^2+y^2}, Y=\frac{-y}{x^2+y^2}$ の関係がある。点 P が $(4x+3y-5)(4x-3y+5)>0$ で表される範囲を動くとき、点 Q の動く範囲を図示せよ。(東京大)

曲線 $y=x^3+ax^2$ を C とし、C 上の点 $P(u,v)$ を通り、傾きが b の直線を L とする。$-1<u<1$ となる任意の u に対し、C と L が点 P 以外に共通点を持つような点 (a,b) の範囲を求めよ。(京都大)

第五回

第2章　集合と写像

2.1　集合

[**A**]

問題 2.1 任意の集合 X に対し $\emptyset \subset X$ であることを示せ。(ヒント：条件命題の真理表参照。)

問題 2.2 Ω を全体集合とし、$X, Y, Z,$ をその部分集合とするとき以下ベン図を描いて確かめ、証明せよ。
$\Omega^c = \emptyset$
$\emptyset^c = \Omega$

反射律

$$(X^c)^c = X$$

ベキ等律

$$X \cap X = X$$

$$X \cup X = X$$

交換律

$$X \cap Y = Y \cap X$$

$$X \cup Y = Y \cup X$$

結合律

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

分配律

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$
$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

吸収律

$X \cap (X \cup Y) = X$
$X \cup (X \cap Y) = X$

ド・モルガンの法則

$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$
$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$

問題 2.3 X, Y, A を集合とするとき以下が成り立つことをベン図を描いて確かめ、証明せよ。

(1) $X = (X \cap A) \cup (X \setminus A)$

(2) $X \setminus A = (X \cup A) \setminus A$

(3) $(X \setminus Y) \cap A = (X \cap A) \setminus (Y \cap A)$

Ω を全体集合とし、X, Y をその部分集合とするとき、次を示せ。

$$X \subset Y \Longleftrightarrow X^c \supset Y^c$$

[B]
$\mathbb{N}$ の部分集合で、 $X = \{\ x \mid x = 1 \vee x - 2 \in X\}$ を満たすものを求めよ。

$X \subset \mathbb{N}$ とするとき、以下が成り立てば $X = \mathbb{N}$ であることを示せ。
$$\forall n \in \mathbb{N} \{(\ i < n \to i \in X) \Rightarrow n \in X\}$$

第六回

[**A**]

問題 2.4 X を n 個の要素からなる集合とするとき、$\mathcal{P}(X)$ は 2^n 個の要素からなることを証明せよ。

問題 2.5 $I_n = (-\frac{1}{n}\ ,1+\frac{1}{n})$ とすると $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1]$ なること、及び、

$J_n = [\frac{1}{n}\ ,1-\frac{1}{n}]$ とすると $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} J_n = (0,1)$ となることを証明せよ。

また $K_n = (n,+\infty)$ とすると $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ であることを証明せよ。

問題 2.6 Λ を添字集合とする集合族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と M を添字集合とする集合族 $(Y_\mu)_{\mu\in M}$ について以下の**分配律**が成り立つことを証明せよ。

(1) $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in M} Y_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (X_\lambda \cup Y_\mu)$$

(2) $$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} Y_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (X_\lambda \cap Y_\mu)$$

問題 2.7 Λ を添字集合とする集合族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と M を添字集合とする集合族 $(Y_\mu)_{\mu\in M}$ について以下が成り立つことを証明せよ。

(1) $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \times \left(\bigcap_{\mu\in M} Y_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (X_\lambda \times Y_\mu)$$

(2) $$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \times \left(\bigcup_{\mu\in M} Y_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (X_\lambda \times Y_\mu)$$

問題 2.8 全体集合 Ω の部分集合族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し以下の**ド・モルガンの法則**が成り立つことを証明せよ。

(1) $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} {X_\lambda}^c$$

(2) $$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} {X_\lambda}^c$$

[B]

$\mathbb{N}$ を添字集合とする集合族 $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ について以下を証明せよ。

(1)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} X_k = \{\ x \mid \text{有限個の } k \text{ を除いて } x \in X_k\ \}$$

(2)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k = \{\ x \mid \text{無限個の } k \text{ について } x \in X_k\}$$

$(X_k)_{k=1}^{n}$ について以下が成り立つことを示せ

$$\bigcap_{1\leq i<j\leq n} (X_i \cup X_j) = \bigcup_{1\leq i\leq n} (X_1 \cap \cdots \cap X_{i-1} \cap X_{i+1} \cap \cdots \cap X_n)$$

第七回

2.2　写像

[**A**]

問題 2.9 X が m 個の要素からなり、Y が n 個の要素からなるとき Y^X は n^m 個の要素からなることを証明せよ。

問題 2.10 三つの写像 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z,\ h\colon Z \to W$ に対して、

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\colon X \to W$$

が成り立つことを証明せよ。

以下のことを示せ。但し 0 以上の実数全体を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と書くことにする。

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ は全射でも単射でもない。
(2) $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ は単射ではあるが全射ではない。
(3) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\colon x \mapsto x^2$ は全射ではあるが単射ではない。
(4) $i\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\colon x \mapsto x^2$ は全単射である。

X が m 個の要素からなり、Y が n 個の要素からなるとき X から Y への単射の個数、全射の個数、及び全単射の個数を各々求めよ。

問題 2.11 $f\colon X \to Y$ が全単射であることは f の逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ が存在するための必要十分条件であることを証明せよ。

$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ で定義すると f は全単射であることを示し、f の逆写像を求めよ。

行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ に対し $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を以下の様に定義する。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、この写像は全単射であることを示し逆写像を求めよ。

関数 $\sin, \cos, \tan$ は全単射ではないのでこのままでは逆関数は存在しない。それぞれの定義域と終集合を適切に制限して、逆関数を定義し、それぞれのグラフを描け。

[B]

$f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(m,n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m$ によって定めると、f は全単射であることを示せ。

半開区間 $[0,1)$ から開区間 $(0,1)$ への全単射を作れ。

第八回

[**A**]

問題 2.12 $f\colon X \to Y$ を写像とし、$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族、$(C_\mu)_{\mu\in M}$ を Y の部分集合族とする。このとき以下が成り立つことを証明せよ。

(1) $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(2) $f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(3) $f^{-1}(\bigcap_{\mu\in M} C_\mu) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(C_\mu)$

(4) $f^{-1}(\bigcup_{\mu\in M} C_\mu) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(C_\mu)$

問題 2.13 上の (1) で実際に等号の成り立たない例をあげよ。

問題 2.14 $f\colon X \to Y$ を写像とし、$A \subset X$ かつ $C \subset Y$ とする。このとき以下が成り立つことを証明せよ。

(1) $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$

(2) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$

(3) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

(4) $f(f^{-1}(C)) \subset C$

問題 2.15 上記の (1) (3) (4) で実際に等号の成り立たない例をあげよ。

問題 2.16 写像 $f\colon X \to Y$ について以下が成り立つことを証明せよ。

左逆写像 の存在

$$f \text{ が単射} \iff \exists g\colon Y \to X \text{ s.t. } g \circ f = \mathrm{id}_X$$

右逆写像 の存在

$$f \text{ が全射} \iff \exists g\colon Y \to X \text{ s.t. } f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$、$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき、g は f の左逆写像であり f は g の右逆写像であることを示せ。

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を次の様に定義する。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき次を示せ。

$$\text{上の写像が全単射} \iff ad - bc \neq 0$$

[**B**]
$(X_i)_{i\in I}$ と $(Y_i)_{i\in I}$ を ($I = \{1, 2, \cdots, n\}$ 又は $\mathbb{N}$ で添字付けられた) 集合族とし、$f_i\colon X_i \to Y_i$ を同じ添字を持つ集合の間の写像とする。
$\prod_{i\in I} X_i$ から $\prod_{i\in I} Y_i$ への写像を $f\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots)$ によって定めるとき、次を示せ。

(1) f が全射 $\iff$ 全ての f_i が全射。

(2) f が単射 $\iff$ 全ての f_i が単射。

集合族 $\left(X_{(\lambda,\mu)}\right)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ に対して、次を示せ。

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{\mu\in M} X_{(\lambda,\mu)} = \bigcup_{\varphi\in M^\Lambda} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_{(\lambda,\varphi(\lambda))}$$

第九回

2.3　濃度

[A]

X, Y を集合とする。$X \subset Y$ ならば、X の濃度は Y の濃度以下であることを示せ。

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度は $\mathbb{N}$ の濃度に等しいことを証明せよ。

問題 2.17 $\mathbb{N}$ の濃度と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいことを証明せよ。

問題 2.18 $\mathbb{N}$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度より小さいことを証明せよ。

実数上の開区間 $(0,1)$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度に等しいことを証明せよ。

$\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度に等しいことを証明せよ。

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度に等しいことを証明せよ。
(ヒント カントール・ベルンシュタインの定理を使う)

問題 2.19 集合 X のベキ集合 $\mathcal{P}(X)$ の濃度は X の濃度より大きいことを証明せよ。

$\mathbb{R}$ より濃度の大きい集合の例をあげよ。

[B]

問題 2.20 Λ が有限集合又は可算集合のとき、一般の直積の定義 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \left\{ \varphi\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\middle|\; \forall\lambda \in \Lambda\ \varphi(\lambda) \in X_\lambda \right\}$ は以前の定義と同一視できることを示せ。

代数的数 (整数係数代数方程式の根になる数) 全体の成す集合は高々可算であることを証明せよ。(ヒント「代数学の基本定理：n 次方程式は重解を含めて n 個の解を持つ。」を用いてよい。)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射を構成せよ。

第十回

第3章　構造の入った集合

3.1　群

[**A**]

三次元ベクトルのベクトル積 (外積) は結合律を満たさないことを示せ。($(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ となる $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ の例をあげよ。)

問題 3.1 単位元 e 及び各 g に対する逆元 g^{-1} は、存在するならば唯一つであることを証明せよ。

問題 3.2

(1) $\mathbb{Z}$ は通常の足し算 $+$ に関して群を成すことを示せ。

(2) S_3 は置換の積に関して群をなすことを示せ。

問題 3.3

(1) 自然数 n について $n\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ。

(2) 3次の交代群 A_3 及び、$\{\ \sigma_1, \sigma_4\ \}$、$\{\ \sigma_1, \sigma_5\ \}$、$\{\ \sigma_1, \sigma_6\ \}$、$\{\ \sigma_1\ \}$ が夫々 S_3 の部分群であることを示せ。

問題 3.4 H が G の部分群ならば $HH = H$ が成り立つことを示せ。

G を群とし $g_0 \in G$ とする。このとき次の写像は全単射であることを示せ。

$$f_{g_0} \colon G \to G \colon g \mapsto g_0 g$$

問題 3.5 A_3 及び、$\{\ \sigma_1, \sigma_4\ \}$、$\{\ \sigma_1, \sigma_5\ \}$、$\{\ \sigma_1, \sigma_6\ \}$ の各 S_3 の部分群について S_3 を剰余類に分解せよ。

問題 3.6 A_3 は S_3 の正規部分群であることを示せ。

問題 3.7 S_3 において A_3 は正規部分群なので、剰余類の集合 $\{A_3, \sigma_4 A_3\}$ は群を成すことを確かめよ。

[**B**]

定義 群 G から群 G' への写像 φ で $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ を満たすものを G から G' の中への**準同形写像**とよぶ。特に φ が全射のときには**全 (射) 準同形写像**とよぶ。

　$G \triangleright H$ のとき、写像 $\pi\colon G \to G/H\colon g \mapsto gH$ は全準同形写像であることを示せ。

指数 2 の部分群は正規部分群であることを示せ。

定義 G, G' を群とし、$\varphi\colon G \to G'$ を準同形写像とする。このとき G' の単位元 e' に対して $N = \varphi^{-1}(e')$ をこの準同形写像の**核**とよぶ。

N は G の正規部分群であることを示せ。

第十一回

3.2 同値関係

[**A**]

問題 3.8 G を群とし H をその部分群とするとき、$g, g' \in G$ に対し $g \sim g'$ を $\exists h \in H \ g = g'h$ で定義すると、これは同値関係になっていることを確かめよ。

問題 3.9 集合 X 上に同値関係 $\sim$ が定められているとき、この同値関係による同値類について以下が成り立つことを証明せよ。

(1) $\forall a \in X \ a \in C(a)$

(2) $a \sim b \Rightarrow C(a) = C(b)$

(3) $C(a) \neq C(b) \Rightarrow C(a) \cap C(b) = \emptyset$

問題 3.10 G を群とし H をその部分群とするとき、上で定めた同値関係による同値類は G を H で割った剰余類 gH ($g \in G$) であることを証明せよ。

問題 3.11 集合 X が互いに素な部分集合の和に分解されている ($X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$) ならば、「$a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \ a \in X_\lambda$ かつ $b \in X_\lambda$」とすると $\sim$ は X の上の同値関係になることを証明せよ。

n を自然数とする。整数の集合 $\mathbb{Z}$ 上に「$a \equiv b \pmod n \overset{def}{\Longleftrightarrow} a - b$ は n で割り切れる」によって $\equiv \pmod n$ を定義すると、これは同値関係であることを示せ。

上記の同値関係 $\equiv$ で $\mathbb{Z}$ を同値類別し、その完全代表系を求めよ。

上記の同値関係による $\mathbb{Z}$ の商集合を $\mathbb{Z}/\!\equiv$ で表すとき、$\mathbb{Z}/\!\equiv$ には加法が定義できることを示せ。(ヒント $\mathbb{Z}/\!\equiv$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とも考えられる。)

定義 群 G から G' への準同形写像 φ が全単射のとき φ は同形写像であるという。また、G から G' への同形写像が存在するとき G と G' は同形であるという。

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と S_3/A_3 は同形であることを示せ。

[**B**]

p が正の素数であるとき $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ には積も定義でき、$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus C(0)$ は積について群になることを示せ。(積についての単位元は $C(1)$)

第十二回

3.3　$\mathbb{R}^2$ の位相

[**B**]

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ (n\geq N\Rightarrow d(P,P_n)<\varepsilon)$ と $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ (n\geq N\Rightarrow P_n\in V_\varepsilon(P))$

が同じであることを示せ。

$\mathbb{R}^2$ 及び $\emptyset$ は開集合かつ閉集合であることを示せ。

問題 3.12 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が開集合の族ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も開集合であり、O_1,O_2 が開集合ならば $O_1\cap O_2$ も開集合であることを示せ。また、無限個の開集合の族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ が開集合にならない例をあげよ。

問題 3.13 $O\subset\mathbb{R}^2$ が開集合ならば O^c は閉集合であり、また、$F\subset\mathbb{R}^2$ が閉集合ならば F^c は開集合であることを示せ。

問題 3.14 $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が閉集合の族ならば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ も閉集合であり、F_1,F_2 が閉集合ならば $F_1\cup F_2$ も閉集合である。また、無限個の閉集合の族 $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ が閉集合にならない例をあげよ。

問題 3.15 $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が点 P で連続であること、即ち

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \varphi\left(V_\delta(P)\right)\subset V_\varepsilon\left(\varphi(P)\right)$$

が成り立つことと、$\lim_{n\to\infty}P_n=P$ となる任意の点列 $\{P_n\}$ について $\lim_{n\to\infty}\varphi(P_n)=\varphi(P)$ となることが同値であることを示せ。

問題 3.16 $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が連続写像であることと、任意の開集合 O について $\varphi^{-1}(O)$ が開集合であることとが同値であることを示せ。

問題 3.17 $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が連続写像であることと、任意の閉集合 F について $\varphi^{-1}(F)$ が閉集合であることとは同値であることを示せ。

問題 3.18 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を連続写像とする。このとき $M \subset \mathbb{R}^2$ が連結ならば $\varphi(M)$ も連結であることを示せ。

問題 3.19 $M \subset \mathbb{R}^2$ が有界な閉集合であることと、M が点列コンパクトであることは同値であることを示せ。

問題 3.20 $M \subset \mathbb{R}^2$ が点列コンパクトであることと、以下のことは同値であることを示せ。
「開集合の族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ を満たすならば、$(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ から有限個の $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_n}$ を選んで、$M \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ とできる。」