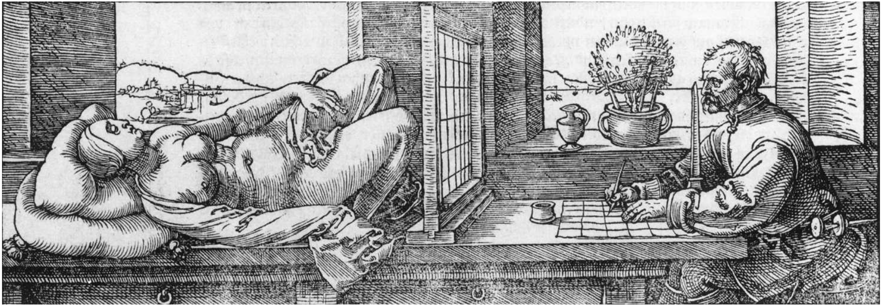
社会と数理科学

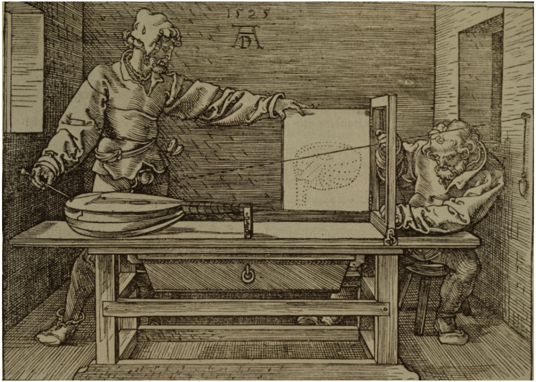
補遺—遠近法の原理と射影幾何学—

新居 俊作

九州大学基幹教育



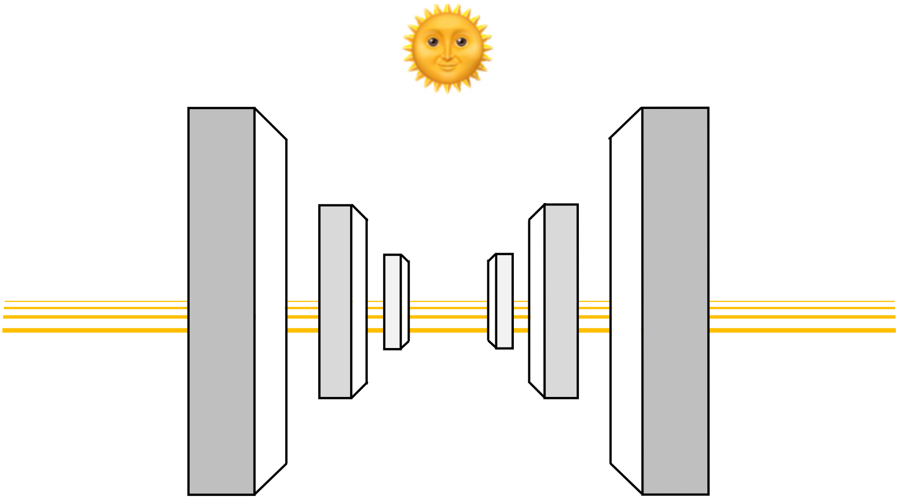
アルブレヒト・デューラー "Draughtsman Drawing a Recumbent Woman"
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Albrecht_Dürer_-_Draughtsman_Drawing_a_Recumbent_Woman_-_WGA7261.jpg



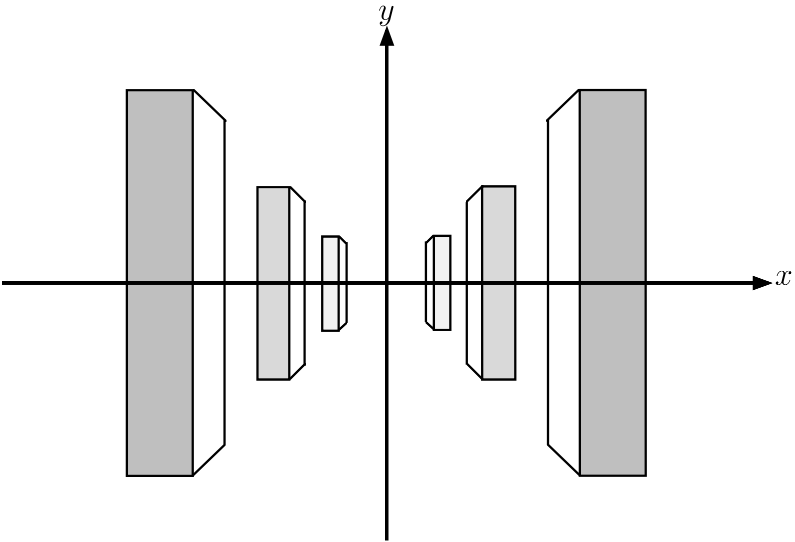
アルブレヒト・デューラー "Man Drawing a Lute"
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Albrecht_Dürer_-_Man_Drawing_a_Lute.jpg

一点透視図法

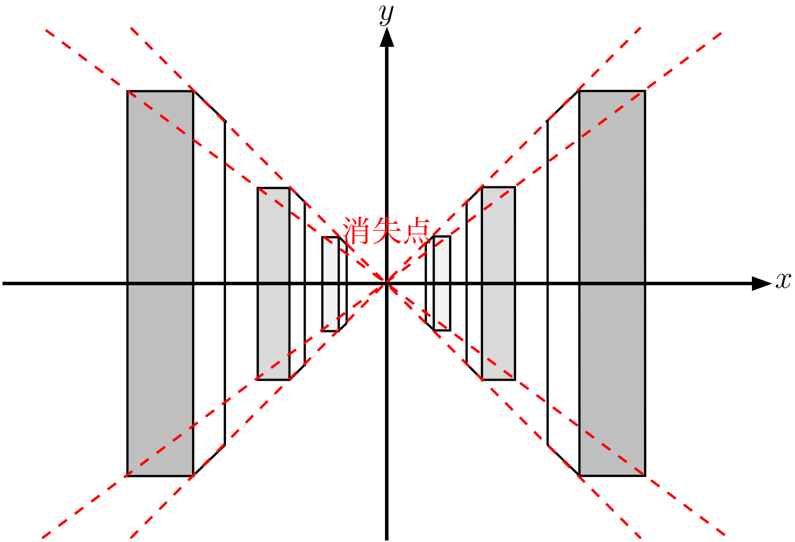
一点透視図法

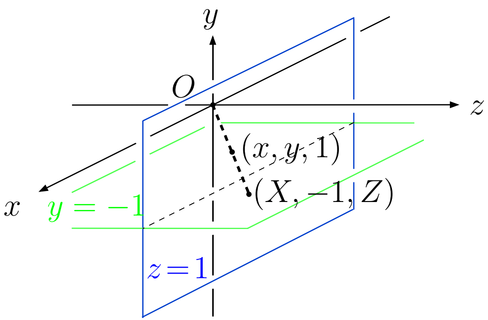


一点透視図法



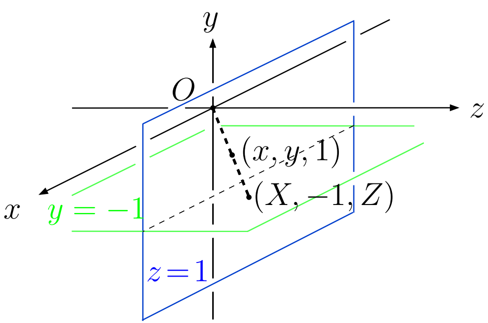
一点透視図法





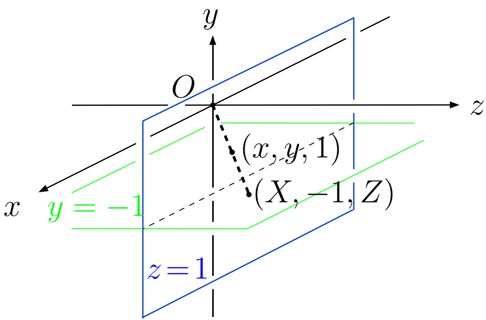
三次元空間の原点 O から $y=-1$ で定まる平面上の図形を眺め、それを $z=1$ で定まる平面に描くことを考える。

- 平面 $y=-1$ 上の点の座標を $(X,-1,Z)$ とし、これを平面 $z=1$ 上のどの点に描くべきかを考える。
- 原点から点 $(X,-1,Z)$ へひいた直線と、平面 $z=1$ との交点を $(x,y,1)$ とする。
- このとき、正の数 α について $\alpha(x,y,1)=(X,-1,Z)$ となる。



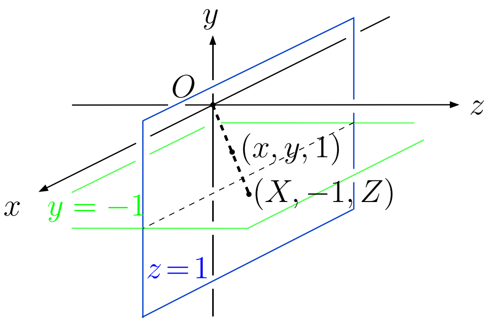
三次元空間の原点 O から $y = -1$ で定まる平面上の図形を眺め、それを $z = 1$ で定まる平面に描くことを考える。

- 平面 $y = -1$ 上の点の座標を $(X, -1, Z)$ とし、これを平面 $z = 1$ 上のどの点に描くべきかを考える。
- 原点から点 $(X, -1, Z)$ へひいた直線と、平面 $z = 1$ との交点を $(x, y, 1)$ とする。
- このとき、正の数 α について $\alpha(x, y, 1) = (X, -1, Z)$ となる。



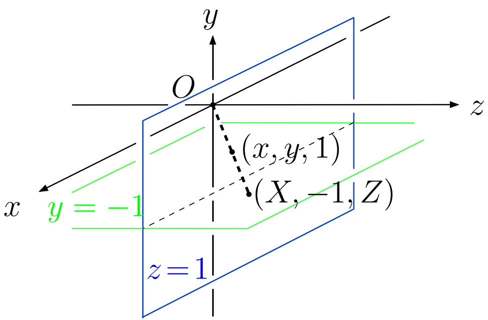
三次元空間の原点 O から $y = -1$ で定まる平面上の図形を眺め、それを $z = 1$ で定まる平面に描くことを考える。

- 平面 $y = -1$ 上の点の座標を $(X, -1, Z)$ とし、これを平面 $z = 1$ 上のどの点に描くべきかを考える。
- 原点から点 $(X, -1, Z)$ へひいた直線と、平面 $z = 1$ との交点を $(x, y, 1)$ とする。
- このとき、正の数 α について $\alpha(x, y, 1) = (X, -1, Z)$ となる。



三次元空間の原点 O から $y = -1$ で定まる平面上の図形を眺め、それを $z = 1$ で定まる平面に描くことを考える。

- 平面 $y = -1$ 上の点の座標を $(X, -1, Z)$ とし、これを平面 $z = 1$ 上のどの点に描くべきかを考える。
- 原点から点 $(X, -1, Z)$ へひいた直線と、平面 $z = 1$ との交点を $(x, y, 1)$ とする。
- このとき、正の数 α について $\alpha(x, y, 1) = (X, -1, Z)$ となる。

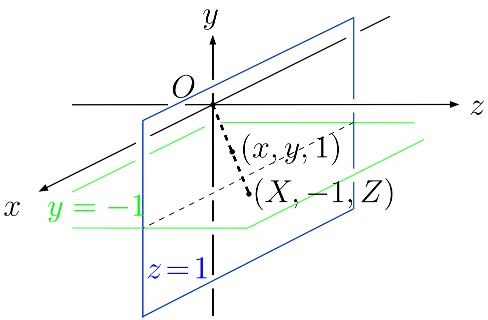


つまり

$$\begin{cases} \alpha x = X \\ \alpha y = -1 \\ \alpha = Z \end{cases} \tag{1}$$

これを x, y について解くと

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z} \right) \tag{2}$$



つまり

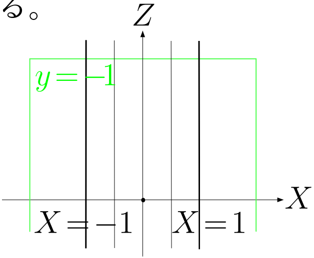
$$\begin{cases} \alpha x = X \\ \alpha y = -1 \\ \alpha = Z \end{cases} \tag{1}$$

これを x, y について解くと

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z} \right) \tag{2}$$

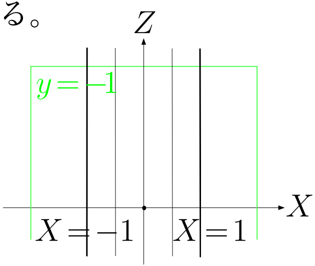
平面 $y = -1$ 上の並行な直線が、平面 $z = 1$ 上のどのような直線として描かれるか考える。

平面 $y=-1$ 上の並行な直線が、平面 $z=1$ 上のどのような直線として描かれるか考える。



直線 $X=1$ について考えると $x=\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=-x$
直線 $X=-1$ について考えると $x=-\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=x$

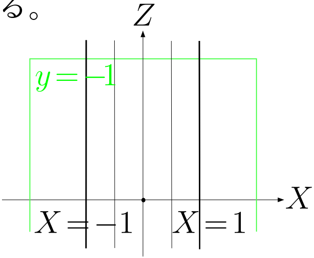
平面 $y=-1$ 上の並行な直線が、平面 $z=1$ 上のどのような直線として描かれるか考える。



直線 $X=1$ について考えると $x=\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=-x$

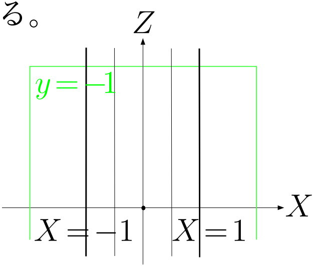
直線 $X=-1$ について考えると $x=-\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=x$

平面 $y=-1$ 上の並行な直線が、平面 $z=1$ 上のどのような直線として描かれるか考える。

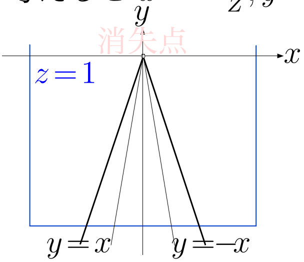


直線 $X=1$ について考えると $x=\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=-x$
直線 $X=-1$ について考えると $x=-\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=x$

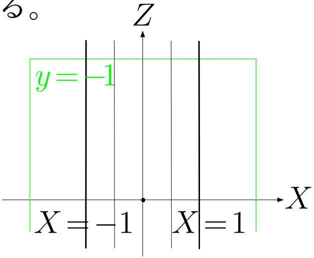
平面 $y=-1$ 上の並行な直線が、平面 $z=1$ 上のどのような直線として描かれるか考える。



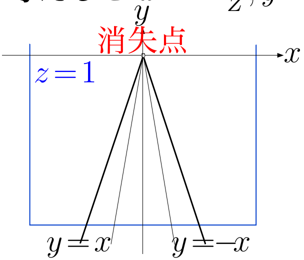
直線 $X=1$ について考えると $x=\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=-x$
直線 $X=-1$ について考えると $x=-\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=x$

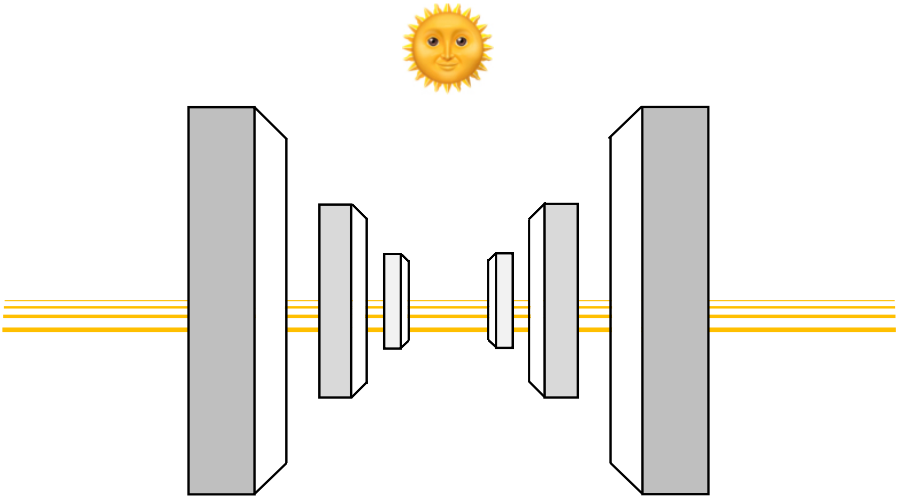


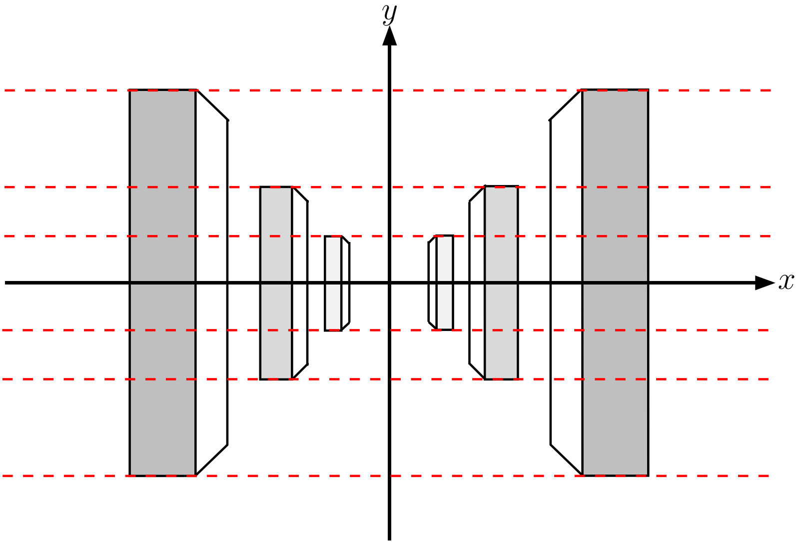
平面 $y=-1$ 上の並行な直線が、平面 $z=1$ 上のどのような直線として描かれるか考える。

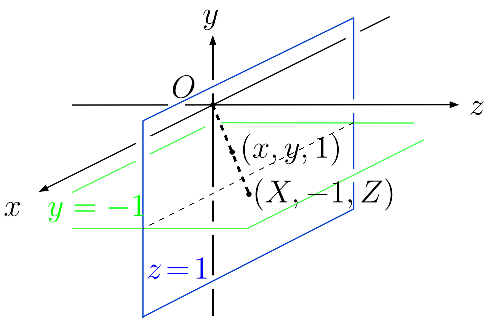


直線 $X=1$ について考えると $x=\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=-x$
直線 $X=-1$ について考えると $x=-\frac{1}{Z}, y=-\frac{1}{Z}$ なので $y=x$






y
x

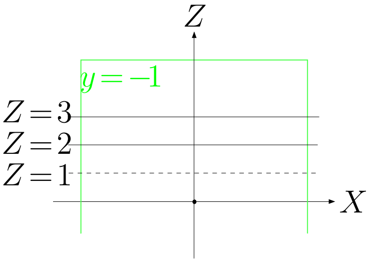


つまり

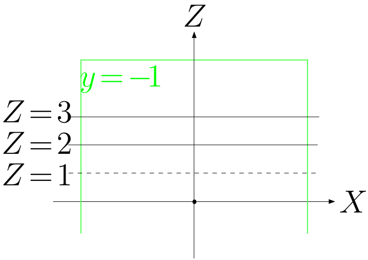
$$\begin{cases} \alpha x = X \\ \alpha y = -1 \\ \alpha = Z \end{cases} \tag{1}$$

これを x, y について解くと

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

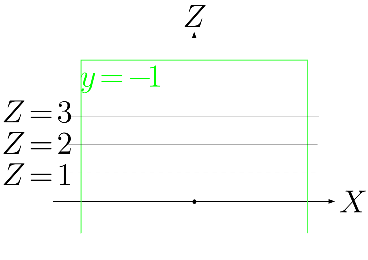


直線 $Z=2$ について考えると $x=\frac{X}{2}, y=-\frac{1}{2}$ なので $y=-\frac{1}{2}$
直線 $Z=3$ について考えると $x=\frac{X}{3}, y=-\frac{1}{3}$ なので $y=-\frac{1}{3}$

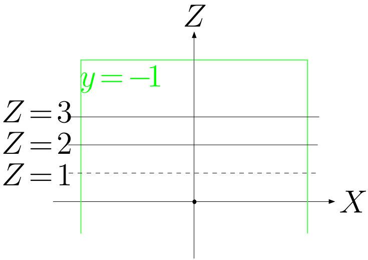


直線 $Z=2$ について考えると $x=\frac{X}{2}, y=-\frac{1}{2}$ なので $y=-\frac{1}{2}$

直線 $Z=3$ について考えると $x=\frac{X}{3}, y=-\frac{1}{3}$ なので $y=-\frac{1}{3}$

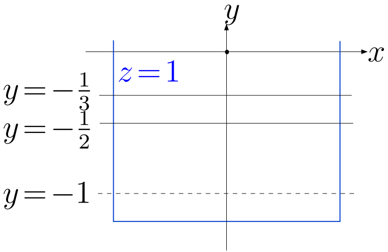


直線 $Z=2$ について考えると $x=\frac{X}{2}, y=-\frac{1}{2}$ なので $y=-\frac{1}{2}$
直線 $Z=3$ について考えると $x=\frac{X}{3}, y=-\frac{1}{3}$ なので $y=-\frac{1}{3}$



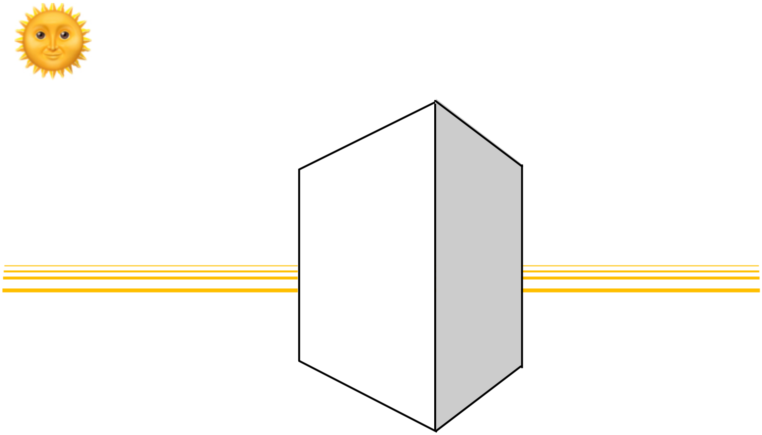
直線 $Z=2$ について考えると $x=\frac{X}{2}, y=-\frac{1}{2}$ なので $y=-\frac{1}{2}$

直線 $Z=3$ について考えると $x=\frac{X}{3}, y=-\frac{1}{3}$ なので $y=-\frac{1}{3}$

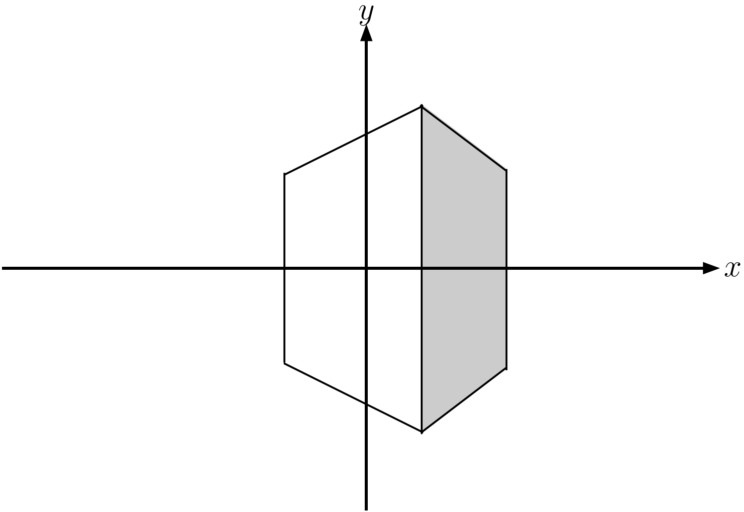


二点透視図法

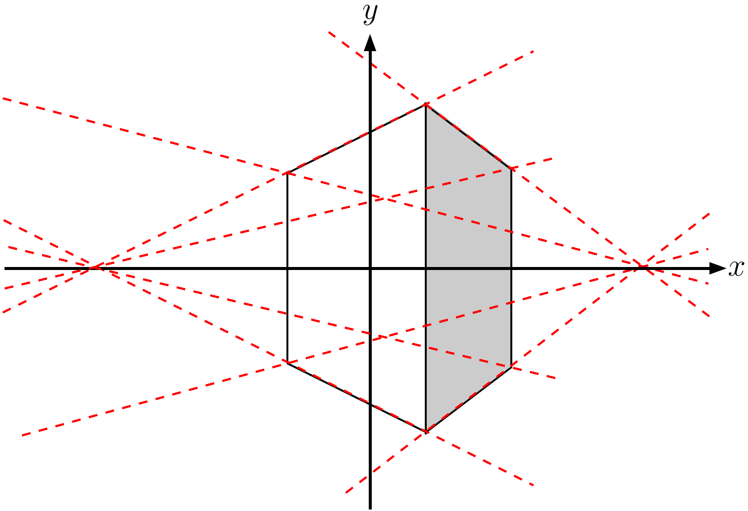
二点透視図法



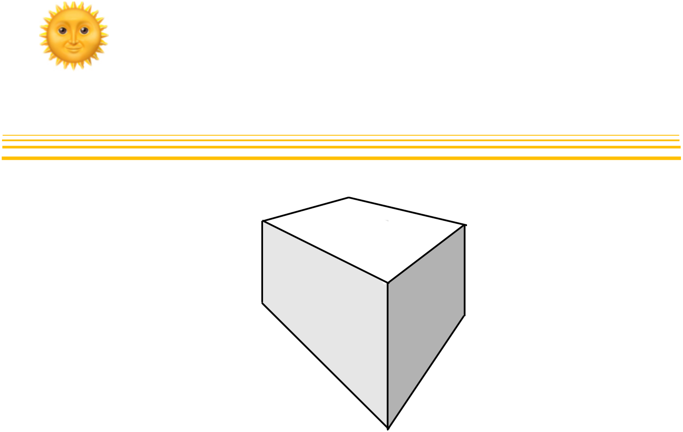
二点透視図法



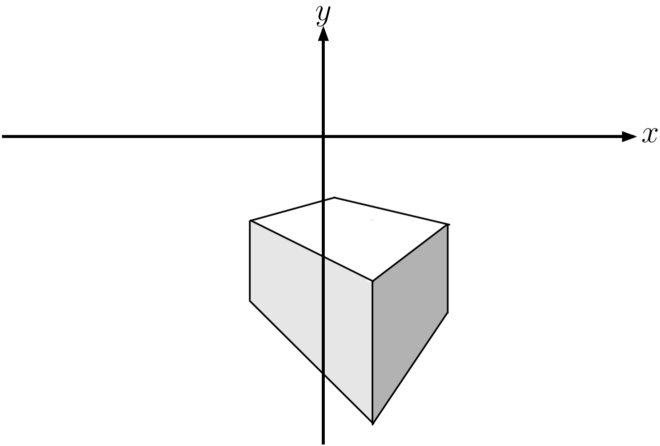
二点透視図法



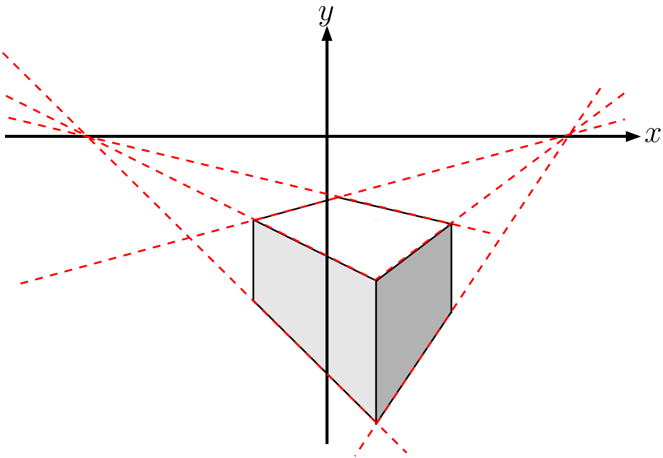
二点透視図法

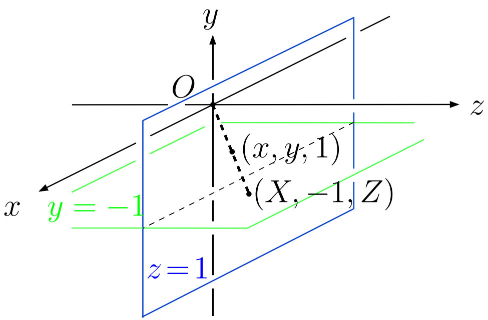


二点透視図法



二点透視図法



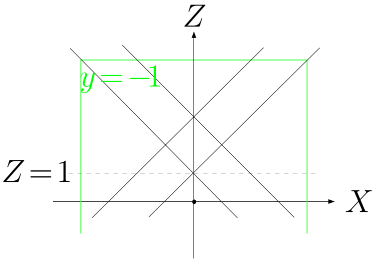


つまり

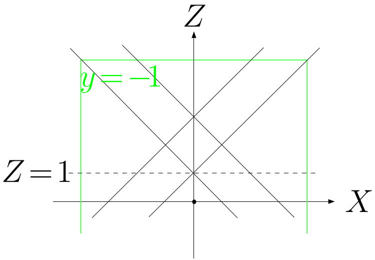
$$\begin{cases} \alpha x = X \\ \alpha y = -1 \\ \alpha = Z \end{cases} \tag{1}$$

これを x, y について解くと

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z} \right) \tag{2}$$

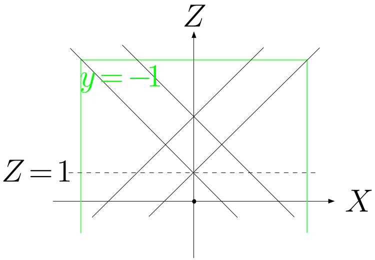


$Z=X+1$ は $y=x-1$、$Z=X+2$ は $y=\frac{1}{2}(x-1)$ として描かれ $Z=-X+1$ は $y=-(x+1)$、$Z=-X+2$ は $y=-\frac{1}{2}(x+1)$ として描かれる

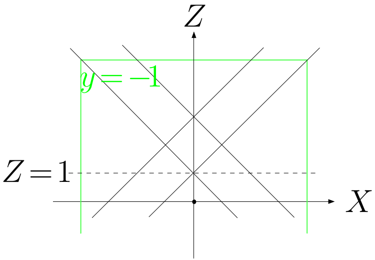


$Z = X + 1$ は $y = x - 1$、$Z = X + 2$ は $y = \frac{1}{2}(x - 1)$ として描かれ

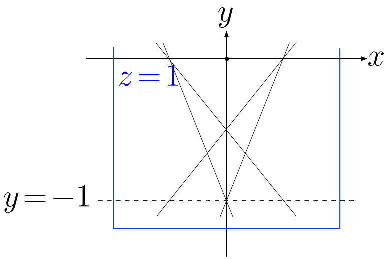
$Z = -X + 1$ は $y = -(x + 1)$、$Z = -X + 2$ は $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$ として描かれる



$Z=X+1$ は $y=x-1$、$Z=X+2$ は $y=\frac{1}{2}(x-1)$ として描かれ $Z=-X+1$ は $y=-(x+1)$、$Z=-X+2$ は $y=-\frac{1}{2}(x+1)$ として描かれる



$Z=X+1$ は $y=x-1$、$Z=X+2$ は $y=\frac{1}{2}(x-1)$ として描かれ $Z=-X+1$ は $y=-(x+1)$、$Z=-X+2$ は $y=-\frac{1}{2}(x+1)$ として描かれる



$\because$
$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので
$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って
$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを
$$Z = X + 1$$

に代入すると
$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して
$$y = x - 1$$

他も同様。

$$\because \quad (x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので

$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って

$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを

$$Z = X + 1$$

に代入すると

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して

$$y = x - 1$$

他も同様。

$$\because \quad (x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z} \right) \tag{2}$$

なので

$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って

$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを

$$Z = X + 1$$

に代入すると

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して

$$y = x - 1$$

他も同様。

$\because$
$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので

$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って

$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを

$$Z = X + 1$$

に代入すると

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して

$$y = x - 1$$

他も同様。

$\because$
$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので
$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って
$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを
$$Z = X + 1$$

に代入すると
$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して
$$y = x - 1$$

他も同様。

$$\because \qquad (x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので

$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って

$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを

$$Z = X + 1$$

に代入すると

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して

$$y = x - 1$$

他も同様。

$$\because \qquad (x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので

$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って

$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを

$$Z = X + 1$$

に代入すると

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

全体に y をかけて整理して

$$y = x - 1$$

他も同様。

$\because$
$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, -\frac{1}{Z}\right) \tag{2}$$

なので

$$X = xZ, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

従って

$$X = -\frac{x}{y}, \quad Z = -\frac{1}{y}$$

これを

$$Z = X + 1$$

に代入すると

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x}{y} + 1$$

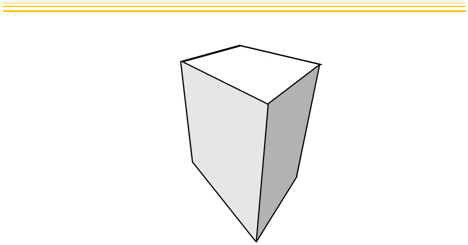
全体に y をかけて整理して

$$y = x - 1$$

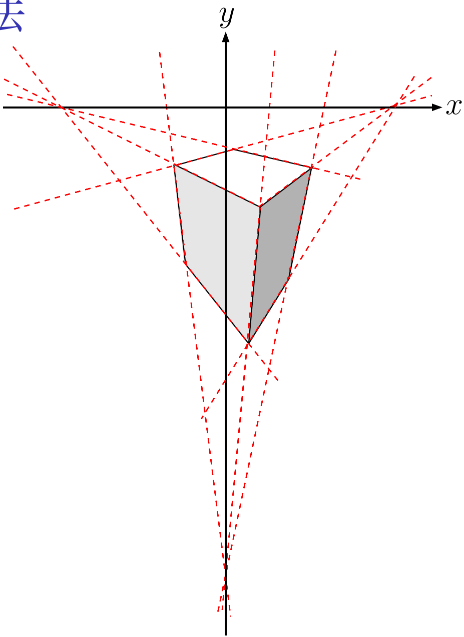
他も同様。

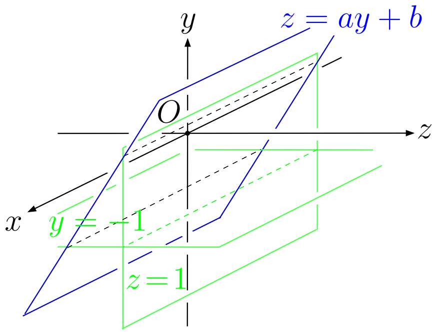
三点透視図法

三点透視図法



三点透視図法

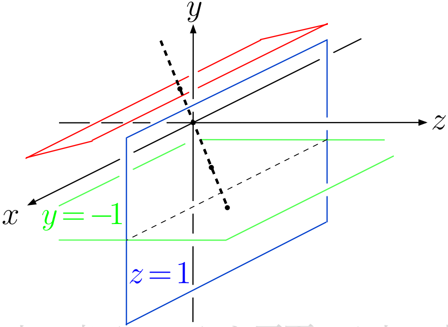




今までと同様に、水平面 $y = -1$ 上の平行線と垂直面 $z = 1$ 上の平行線が、傾いた平面 $z = ay + b$ 上のどの様な直線に対応するかを考える。

射影幾何学

平面を色々と変えて、原点を通る同じ直線上の点は同じだと考える



従って、平面 H 上の点 (x, y, z) と平面 H' 上の点 (x', y', z') は

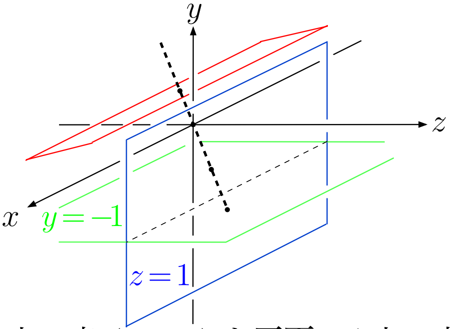
$$x : y : z = x' : y' : z' \tag{3}$$

のとき同じと考える。
例えば、平面 $y=-1$ 上の点 $(X, -1, Z)$と平面 $z=1$ 上の点 $(x, y, 1)$ は

$$X : -1 : Z = x : y : 1 \tag{4}$$

のとき同じと考える。

平面を色々と変えて、原点を通る同じ直線上の点は同じだと考える



従って、平面 H 上の点 (x, y, z) と平面 H' 上の点 (x', y', z') は

$$x : y : z = x' : y' : z' \tag{3}$$

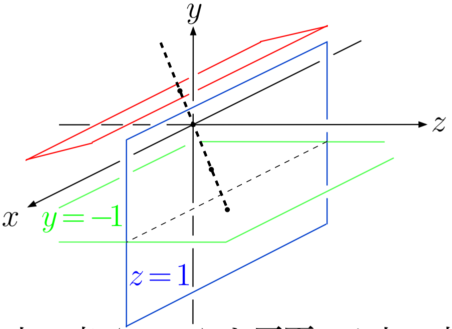
のとき同じと考える。

例えば、平面 $y=-1$ 上の点 $(X, -1, Z)$ と平面 $z=1$ 上の点 $(x, y, 1)$ は

$$X : -1 : Z = x : y : 1 \tag{4}$$

のとき同じと考える。

平面を色々と変えて、原点を通る同じ直線上の点は同じだと考える



従って、平面 H 上の点 (x, y, z) と平面 H' 上の点 (x', y', z') は

$$x : y : z = x' : y' : z' \tag{3}$$

のとき同じと考える。
例えば、平面 $y=-1$ 上の点 $(X, -1, Z)$ と平面 $z=1$ 上の点 $(x, y, 1)$ は

$$X : -1 : Z = x : y : 1 \tag{4}$$

のとき同じと考える。

射影幾何学

平面を色々変えた時に同じ図形がどう見えるかを考える。

定義

x, y, z の各値は平面を変えると変わるがそれらの比 $x : y : z$ は変わらないので、これを用いて

$$[x : y : z] \tag{5}$$

で点を表す。これを同次座標とよぶ。
同時座標で表される点の集まりを射影平面とよぶ。

射影幾何学

平面を色々変えた時に同じ図形がどう見えるかを考える。

定義

x, y, z の各値は平面を変えると変わるがそれらの比 $x : y : z$ は変わらないので、これを用いて

$$[x : y : z] \tag{5}$$

で点を表す。これを同次座標とよぶ。
同時座標で表される点の集まりを射影平面とよぶ。

射影幾何学

平面を色々変えた時に同じ図形がどう見えるかを考える。

定義

x, y, z の各値は平面を変えると変わるがそれらの比 $x : y : z$ は変わらないので、これを用いて

$$[x : y : z] \tag{5}$$

で点を表す。これを同次座標とよぶ。
同時座標で表される点の集まりを射影平面とよぶ。

射影幾何学

平面を色々変えた時に同じ図形がどう見えるかを考える。

定義

x, y, z の各値は平面を変えると変わるがそれらの比 $x : y : z$ は変わらないので、これを用いて

$$[x : y : z] \tag{5}$$

で点を表す。これを同次座標とよぶ。
同時座標で表される点の集まりを射影平面とよぶ。

問題

三次元空間内で点を動かした時、射影幾何学的には同じ点が同じ点に写るような点の動かし方はどのようなものか？

すなわち、

(x, y, z) の動いた先が (X,Y,Z)、(x',y',z') の動いた先が (X',Y',Z') なら

$$x : y : z = x' : y' : z' \Longrightarrow X : Y : Z = X' : Y' : Z' \tag{6}$$

が成り立つのは三次元空間内のどのような移動か。

答

行列を用いて以下のように表されればよい：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7}$$

問題

三次元空間内で点を動かした時、射影幾何学的には同じ点が同じ点に写るような点の動かし方はどのようなものか？
すなわち、
(x, y, z) の動いた先が (X,Y,Z)、(x',y',z') の動いた先が (X',Y',Z') なら

$$x : y : z = x' : y' : z' \Longrightarrow X : Y : Z = X' : Y' : Z' \tag{6}$$

が成り立つのは三次元空間内のどのような移動か。

答

行列を用いて以下のように表されればよい：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7}$$

問題

三次元空間内で点を動かした時、射影幾何学的には同じ点が同じ点に写るような点の動かし方はどのようなものか？
すなわち、
(x, y, z) の動いた先が (X,Y,Z)、(x',y',z') の動いた先が (X',Y',Z') なら

$$x : y : z = x' : y' : z' \Longrightarrow X : Y : Z = X' : Y' : Z' \tag{6}$$

が成り立つのは三次元空間内のどのような移動か。

答

行列を用いて以下のように表されればよい：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7}$$

∵ $x:y:z = x':y':z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。 このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because$ $x:y:z=x':y':z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because$ $x : y : z = x' : y' : z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。 このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because \quad x:y:z = x':y':z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。　このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because \quad x : y : z = x' : y' : z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。 このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because \quad x:y:z = x':y':z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。 このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because \quad x : y : z = x' : y' : z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。　このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because \quad x:y:z = x':y':z'$、すなわち、ある実数 $\alpha \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。　このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

$\because\quad x:y:z=x':y':z'$、すなわち、ある実数 $\alpha\neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \tag{8}$$

と表されるとする。　このとき

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

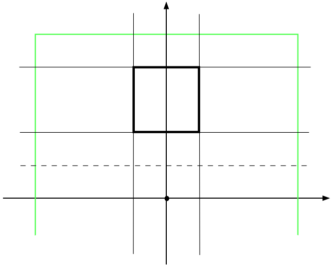
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha x + a_{1,2}\alpha y + a_{1,3}\alpha z \\ a_{2,1}\alpha x + a_{2,2}\alpha y + a_{2,3}\alpha z \\ a_{3,1}\alpha x + a_{3,2}\alpha y + a_{3,3}\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z \end{pmatrix}$$

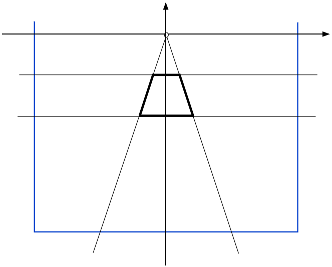
$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X \\ \alpha Y \\ \alpha Z \end{pmatrix}$$

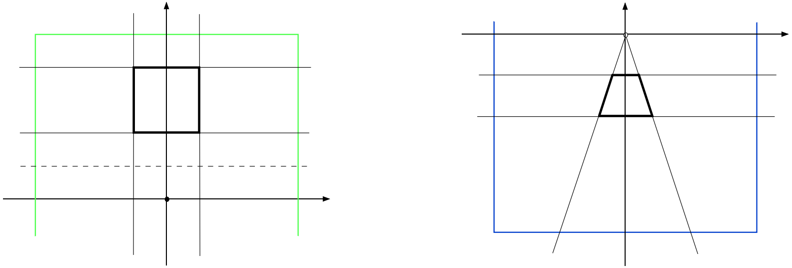
定義

射影平面の点 $[x : y : z]$ を $[X : Y : Z]$ へ写す点の移動で、以下のように表されるものを**射影変換**とよぶ：

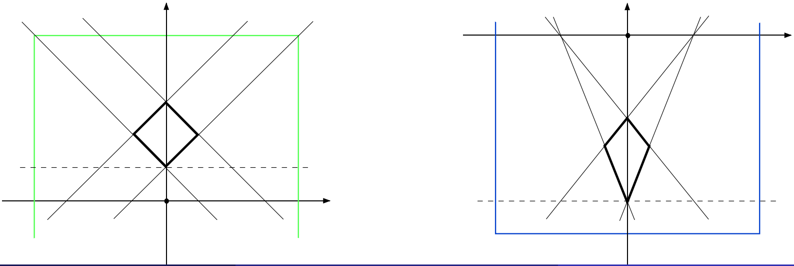
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{9}$$





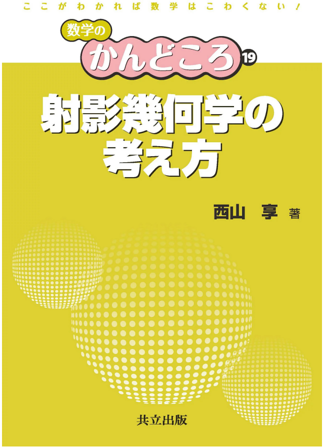


⇓ 回転



参考文献

杉原厚吉「だまし絵と線形代数」(シリーズ・現象を解明する数学)
共立出版 2012 年



西山淳「射影幾何の考え方」(数学のかんどころ 19) 共立出版
2013 年