

社会と数理科学

第6回

新居 俊作

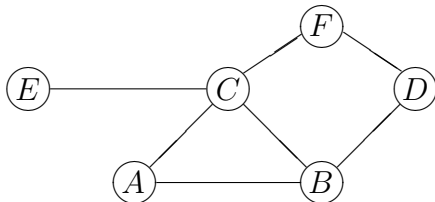
九州大学基幹教育

社会ネットワーク分析

社会ネットワーク分析

社会ネットワーク分析

親しい間柄を線で結んだ人間関係を表した図を考える：



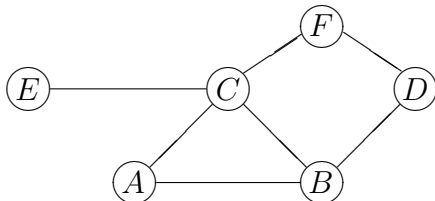
線で結ばれた関係を 1 他を 0 とした行列を作る：

$$\begin{array}{c}
 A \ B \ C \ D \ E \ F \\
 \begin{array}{c}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 =: R
 \end{array}$$

この行列 R を隣接行列とよぶ。

社会ネットワーク分析

親しい間柄を線で結んだ人間関係を表した図を考える：



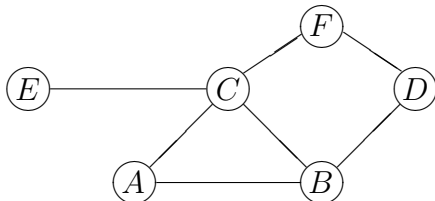
線で結ばれた関係を 1 他を 0 とした行列を作る：

$$\begin{array}{c}
 A \ B \ C \ D \ E \ F \\
 \begin{array}{c}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 =: R
 \end{array}$$

この行列 R を隣接行列とよぶ。

社会ネットワーク分析

親しい間柄を線で結んだ人間関係を表した図を考える：



線で結ばれた関係を 1 他を 0 とした行列を作る：

$$\begin{array}{c}
 A \ B \ C \ D \ E \ F \\
 \begin{array}{c}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 =: R
 \end{array}$$

この行列 R を隣接行列とよぶ。

用語

その人から出ている線の本数を**次数**とよぶ。

(次数が大きい)=(人間関係の中心)

と考える。

コンピュータのデータとして与えられた人間関係に関しては、図示して目で数えなくても(数百人以上のデータでは図示は無理)、隣接行列から次数が求められる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この指標では C が中心。

用語

その人から出ている線の本数を**次数**とよぶ。

(次数が大きい)=(人間関係の中心)

と考える。

コンピュータのデータとして与えられた人間関係に関しては、図示して目で数えなくても(数百人以上のデータでは図示は無理)、隣接行列から次数が求められる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この指標では C が中心。

用語

その人から出ている線の本数を**次数**とよぶ。

(次数が大きい)=(人間関係の中心)

と考える。

コンピュータのデータとして与えられた人間関係に関しては、図示して目で数えなくても(数百人以上のデータでは図示は無理)、隣接行列から次数が求められる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この指標では C が中心。

用語

その人から出ている線の本数を**次数**とよぶ。

(次数が大きい)=(人間関係の中心)

と考える。

コンピュータのデータとして与えられた人間関係に関しては、図示して目で数えなくても(数百人以上のデータでは図示は無理)、隣接行列から次数が求められる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この指標では C が中心。

用語

その人から出ている線の本数を**次数**とよぶ。

(次数が大きい)=(人間関係の中心)

と考える。

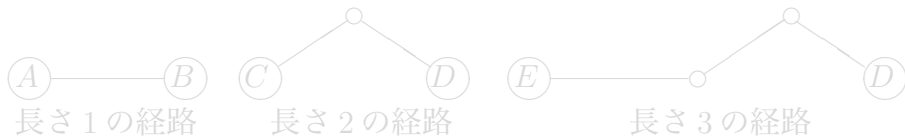
コンピュータのデータとして与えられた人間関係に関しては、図示して目で数えなくても(数百人以上のデータでは図示は無理)、隣接行列から次数が求められる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この指標では C が中心。

用語

直接的な関係を幾つか繋いで二人が繋がるとき、その経路を構成する直接の關係の個数をその**経路の長さ**とよぶ。



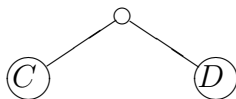
二人を結ぶ最短経路の長さをその二人の間の**距離**とよぶ。

用語

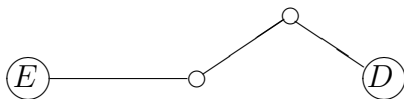
直接的な関係を幾つか繋いで二人が繋がるとき、その経路を構成する直接の關係の個数をその**経路の長さ**とよぶ。



長さ 1 の経路



長さ 2 の経路



長さ 3 の経路

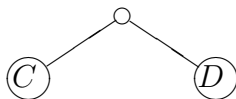
二人を結ぶ最短経路の長さをその二人の間の**距離**とよぶ。

用語

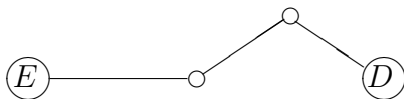
直接的な関係を幾つか繋いで二人が繋がるとき、その経路を構成する直接の關係の個数をその**経路の長さ**とよぶ。



長さ 1 の経路



長さ 2 の経路



長さ 3 の経路

二人を結ぶ最短経路の長さをその二人の間の**距離**とよぶ。

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ1の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ1の経路があれば1他は0)

二人の間の長さ2の経路：

例えば C から D への長さ2の経路の数：

$(C-A-D \text{ の数}) + \dots + (C-F-D \text{ の数})$

$C-A-D$ の数：

$(\text{長さ1の } C-A \text{ の数}) \times (\text{長さ1の } A-D \text{ の数})$

R の3行目の成分： C から他への長さ1の経路の数

R の4列目の成分：他から D への長さ1の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ2の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3,4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ1の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ1の経路があれば1他は0)

二人の間の長さ2の経路：

例えば C から D への長さ2の経路の数：

$$(C - A - D \text{ の数}) + \cdots + (C - F - D \text{ の数})$$

$C - A - D$ の数：

$$(\text{長さ1の } C - A \text{ の数}) \times (\text{長さ1の } A - D \text{ の数})$$

R の3行目の成分： C から他への長さ1の経路の数

R の4列目の成分：他から D への長さ1の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ2の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ 1 の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ 1 の経路があれば 1 他は 0)

二人の間の長さ 2 の経路：

例えば C から D への長さ 2 の経路の数：

$(C - A - D \text{ の数}) + \dots + (C - F - D \text{ の数})$

$C - A - D$ の数：

$(\text{長さ 1 の } C - A \text{ の数}) \times (\text{長さ 1 の } A - D \text{ の数})$

R の 3 行目の成分： C から他への長さ 1 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ 2 の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ 1 の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ 1 の経路があれば 1 他は 0)

二人の間の長さ 2 の経路：

例えば C から D への長さ 2 の経路の数：

$$(C - A - D \text{ の数}) + \cdots + (C - F - D \text{ の数})$$

$C - A - D$ の数：

$$(\text{長さ 1 の } C - A \text{ の数}) \times (\text{長さ 1 の } A - D \text{ の数})$$

R の 3 行目の成分： C から他への長さ 1 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ 2 の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ 1 の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ 1 の経路があれば 1 他は 0)

二人の間の長さ 2 の経路：

例えば C から D への長さ 2 の経路の数：

$(C - A - D \text{ の数}) + \dots + (C - F - D \text{ の数})$

$C - A - D$ の数：

$(\text{長さ 1 の } C - A \text{ の数}) \times (\text{長さ 1 の } A - D \text{ の数})$

R の 3 行目の成分： C から他への長さ 1 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ 2 の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ 1 の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ 1 の経路があれば 1 他は 0)

二人の間の長さ 2 の経路：

例えば C から D への長さ 2 の経路の数：

$$(C - A - D \text{ の数}) + \cdots + (C - F - D \text{ の数})$$

$C - A - D$ の数：

$$(\text{長さ 1 の } C - A \text{ の数}) \times (\text{長さ 1 の } A - D \text{ の数})$$

R の 3 行目の成分： C から他への長さ 1 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ 2 の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

メンバー間の距離を図を見ないで求める。

二人の間の長さ 1 の経路：

隣接行列 R の成分。(長さ 1 の経路があれば 1 他は 0)

二人の間の長さ 2 の経路：

例えば C から D への長さ 2 の経路の数：

$$(C - A - D \text{ の数}) + \cdots + (C - F - D \text{ の数})$$

$C - A - D$ の数：

$$(\text{長さ 1 の } C - A \text{ の数}) \times (\text{長さ 1 の } A - D \text{ の数})$$

R の 3 行目の成分： C から他への長さ 1 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (C \text{ から } D \text{ の長さ 2 の経路の数}) = (R^2 \text{ の } (3, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

二人の間の長さ 3 の経路：

例えば B から D への長さ 3 の経路の数：

$$(B-A \text{ の長さ 2 の数}) \times (A-D \text{ の長さ 1 の数}) + \dots \\ \dots + (B-F \text{ の長さ 2 の数}) \times (F-D \text{ の長さ 1 の数})$$

R^2 の 2 行目の成分： B から他への長さ 2 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (B \text{ から } D \text{ の長さ 3 の経路の数}) = (R^3 \text{ の } (2, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

更に長い経路についても同様に $R^4, R^5, \dots$ を考えれば良い。

二人の間の長さ 3 の経路：

例えば B から D への長さ 3 の経路の数：

$$(B-A \text{ の長さ 2 の数}) \times (A-D \text{ の長さ 1 の数}) + \dots \\ \dots + (B-F \text{ の長さ 2 の数}) \times (F-D \text{ の長さ 1 の数})$$

R^2 の 2 行目の成分： B から他への長さ 2 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (B \text{ から } D \text{ の長さ 3 の経路の数}) = (R^3 \text{ の } (2, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

更に長い経路についても同様に $R^4, R^5, \dots$ を考えれば良い。

二人の間の長さ 3 の経路：

例えば B から D への長さ 3 の経路の数：

$$(B-A \text{ の長さ 2 の数}) \times (A-D \text{ の長さ 1 の数}) + \dots \\ \dots + (B-F \text{ の長さ 2 の数}) \times (F-D \text{ の長さ 1 の数})$$

R^2 の 2 行目の成分： B から他への長さ 2 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (B \text{ から } D \text{ の長さ 3 の経路の数}) = (R^3 \text{ の } (2, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

更に長い経路についても同様に $R^4, R^5, \dots$ を考えれば良い。

二人の間の長さ 3 の経路：

例えば B から D への長さ 3 の経路の数：

$$(B - A \text{ の長さ 2 の数}) \times (A - D \text{ の長さ 1 の数}) + \dots \\ \dots + (B - F \text{ の長さ 2 の数}) \times (F - D \text{ の長さ 1 の数})$$

R^2 の 2 行目の成分： B から他への長さ 2 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (B \text{ から } D \text{ の長さ 3 の経路の数}) = (R^3 \text{ の } (2, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

更に長い経路についても同様に $R^4, R^5, \dots$ を考えれば良い。

二人の間の長さ 3 の経路：

例えば B から D への長さ 3 の経路の数：

$$(B - A \text{ の長さ 2 の数}) \times (A - D \text{ の長さ 1 の数}) + \dots \\ \dots + (B - F \text{ の長さ 2 の数}) \times (F - D \text{ の長さ 1 の数})$$

R^2 の 2 行目の成分： B から他への長さ 2 の経路の数

R の 4 列目の成分：他から D への長さ 1 の経路の数

$\therefore (B \text{ から } D \text{ の長さ 3 の経路の数}) = (R^3 \text{ の } (2, 4) \text{ 成分})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

更に長い経路についても同様に $R^4, R^5, \dots$ を考えれば良い。

R と R^2 の $(4, 5)$ 成分は 0 で R^3 の $(4, 5)$ 成分は 0 ではない。
 $\Rightarrow D$ と E を結ぶ長さ 1, 2 の経路はなく、長さ 3 の経路がある。
 $\Rightarrow D$ と E の距離は 3

互いの距離とその和							他への距離の和
	A	B	C	D	E	F	
A	0	1	1	2	2	2	8
B	1	0	1	1	2	2	7
C	1	1	0	2	1	1	6
D	2	1	2	0	3	1	9
E	2	2	1	3	0	2	10
F	2	2	1	1	2	0	8

他のメンバーまでの距離の和が一番小さいのは C なので、この指標でも C が中心人物と考えられる。

R と R^2 の $(4, 5)$ 成分は 0 で R^3 の $(4, 5)$ 成分は 0 ではない。
 $\Rightarrow D$ と E を結ぶ長さ 1, 2 の経路はなく、長さ 3 の経路がある。
 $\Rightarrow D$ と E の距離は 3

互いの距離とその和							他への距離の和
	A	B	C	D	E	F	
A	0	1	1	2	2	2	8
B	1	0	1	1	2	2	7
C	1	1	0	2	1	1	6
D	2	1	2	0	3	1	9
E	2	2	1	3	0	2	10
F	2	2	1	1	2	0	8

他のメンバーまでの距離の和が一番小さいのは C なので、この指標でも C が中心人物と考えられる。

R と R^2 の $(4, 5)$ 成分は 0 で R^3 の $(4, 5)$ 成分は 0 ではない。
 $\Rightarrow D$ と E を結ぶ長さ 1, 2 の経路はなく、長さ 3 の経路がある。
 $\Rightarrow D$ と E の距離は 3

互いの距離とその和							他への距離の和
	A	B	C	D	E	F	
A	0	1	1	2	2	2	8
B	1	0	1	1	2	2	7
C	1	1	0	2	1	1	6
D	2	1	2	0	3	1	9
E	2	2	1	3	0	2	10
F	2	2	1	1	2	0	8

他のメンバーまでの距離の和が一番小さいのは C なので、この指標でも C が中心人物と考えられる。

R と R^2 の $(4, 5)$ 成分は 0 で R^3 の $(4, 5)$ 成分は 0 ではない。
 $\Rightarrow D$ と E を結ぶ長さ 1, 2 の経路はなく、長さ 3 の経路がある。
 $\Rightarrow D$ と E の距離は 3

互いの距離とその和							他への距離の和
	A	B	C	D	E	F	
A	0	1	1	2	2	2	8
B	1	0	1	1	2	2	7
C	1	1	0	2	1	1	6
D	2	1	2	0	3	1	9
E	2	2	1	3	0	2	10
F	2	2	1	1	2	0	8

他のメンバーまでの距離の和が一番小さいのは C なので、この指標でも C が中心人物と考えられる。

R と R^2 の $(4, 5)$ 成分は 0 で R^3 の $(4, 5)$ 成分は 0 ではない。
 $\Rightarrow D$ と E を結ぶ長さ 1, 2 の経路はなく、長さ 3 の経路がある。
 $\Rightarrow D$ と E の距離は 3

互いの距離とその和							他への距離の和
	A	B	C	D	E	F	
A	0	1	1	2	2	2	8
B	1	0	1	1	2	2	7
C	1	1	0	2	1	1	6
D	2	1	2	0	3	1	9
E	2	2	1	3	0	2	10
F	2	2	1	1	2	0	8

他のメンバーまでの距離の和が一番小さいのは C なので、この指標でも C が中心人物と考えられる。

テロ組織のネットワーク分析

社会ネットワーク分析はあらゆる集団、組織を分析対象にする。そして、その対象には、犯罪組織やテロ組織も含まれる。

犯罪組織やテロ組織の分析では、地道な捜査で得た情報をもとに、捜査対象の組織のネットワークを分析することで、活動のパターンや特質をとらえたり、鍵となる重要人物を見つけ出したりすることができる。このような研究の中で、実在する組織を分析したものとして有名なものに、クレブズによるアルカイダ組織の分析がある (V. E. Krebs, 2002)。

クレブズは、四機の民間航空機を乗っ取ってアメリカを攻撃した9.11のハイジャック犯19名と、その19名につながるアルカイダ組織のメンバー62名について、公開されている捜査情報だけをもとに人間関係のネットワーク図(図3.11)をつくり上げ、本節でも紹介した「次数」や「距離」などの指標を用いて、次数や他のメンバーまでの最小距離の総和などによるランキング表の上位に、ハイジャック実行の中心となった人物たちが現れることを示した。とくに、どの指標でもトップになったのは、9.11における現場指揮者をつとめた最重要人物であった。クレブズは、9.11で主要な役割を果たした人物たちを、メンバーのネットワークの構造だけをたよりに、「数学的に」見つけ出せることを示したのである。

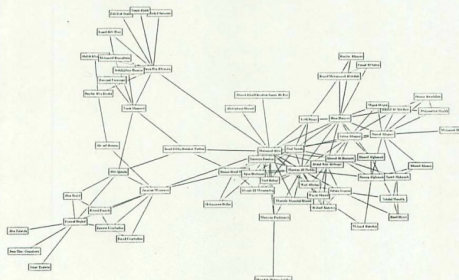


図3.11 19人のハイジャック犯を含むネットワーク
(V. E. Krebs (2002) のデータより Mathematica を用いて作成)

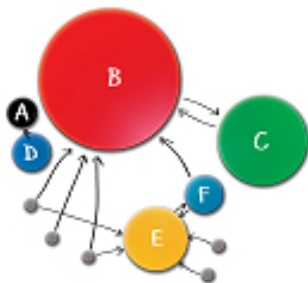
Google PageRank —検索結果の順位付け—

Google PageRankの数理

最強検索エンジンのランキング手法を求めて

Amy N. Langville + Carl D. Meyer 著

岩野和生・黒川利明・黒川洋訳



共立出版

Amy N.Langville, Carl D.Meyer 著, 岩野 和生, 黒川 利明, 黒川 洋 翻訳
「Google PageRankの数理—最強検索エンジンのランキング手法を求めて」
共立出版 2009年

Google PageRank —検索結果の順位付け—

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
 検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**

原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**
原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**

原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**

原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**
原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**
原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**

原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

Google PageRank —検索結果の順位付け—

インターネットでページビューを稼ぐ方法と検索サイトの対策
 検索サイトがキーワードを含むページを見つけた順に表示する場合

- 検索数の多いキーワードを、ページの内容に関係なくたくさん並べる。

対策：他から多くリンクされているページを検索上位に表示

- 最初のページに対してリンクを張った別のページ (中身は空でもいい) をたくさん作る。

対策：重要なページから多くリンクされているページを上位に表示

⇒ これを実現するために Google が開発した方法が **PageRank**
原論文

Sergey Brin, Lawrence Page,

"The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine",

Computer Networks and ISDN Systems, 33: 107-17, 1998

<http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf>

ページの重要性を決定する基準：

ページの重要性を決定する基準：

- 他からのリンクが多いページは重要
- 重要なページからリンクされたページは重要
- ただし、リンク数が少ないページからのリンクの方が重要
 - ページ A はページ B にのみリンク：
 - ページ B はページ A にとって重要
 - ページ A はページ B を含めて多くのページにリンク：
 - ページ B はページ A にとって「数多ある関連ページの一つ」にすぎない

ページの重要性を決定する基準：

- 他からのリンクが多いページは重要
- 重要なページからリンクされたページは重要
- ただし、リンク数が少ないページからのリンクの方が重要
 - ページ A はページ B にのみリンク：
ページ B はページ A にとって重要
 - ページ A はページ B を含めて多くのページにリンク：
ページ B はページ A にとって「数多ある関連ページの一つ」にすぎない

ページの重要性を決定する基準：

- 他からのリンクが多いページは重要
- 重要なページからリンクされたページは重要
- ただし、リンク数が少ないページからのリンクの方が重要

ページ A はページ B にのみリンク：

ページ B はページ A にとって重要

ページ A はページ B を含めて多くのページにリンク：

ページ B はページ A にとって「数多ある関連ページの一つ」にすぎない

ページの重要性を決定する基準：

- 他からのリンクが多いページは重要
- 重要なページからリンクされたページは重要
- ただし、リンク数が少ないページからのリンクの方が重要

ページ A はページ B にのみリンク：

ページ B はページ A にとって重要

ページ A はページ B を含めて多くのページにリンク：

ページ B はページ A にとって「数多ある関連ページの一つ」にすぎない

ページの重要性を決定する基準：

- 他からのリンクが多いページは重要
- 重要なページからリンクされたページは重要
- ただし、リンク数が少ないページからのリンクの方が重要
 - ページ A はページ B にのみリンク：
 - ページ B はページ A にとって重要
 - ページ A はページ B を含めて多くのページにリンク：
 - ページ B はページ A にとって「数多ある関連ページの一つ」にすぎない

具体例

具体例

1, 2, 3 の三つのページ間にリンクがつながっているとする：

- ページ 1 からページ 2 とページ 3 へリンクを張っている
- ページ 2 からページ 3 へリンクを張っている
- ページ 3 からページ 1 へリンクを張っている

ページ i のポイント p_i を次の条件を満たすように定める：

- ポイントが p_j で他へのリンク数が k_j のページからリンクがある場合は p_i に $\frac{p_j}{k_j}$ だけ反映される
- i 以外の全てのページからのリンクの効果を足したものが p_i

具体例に適用すると：

$$p_1 = p_3, \quad p_2 = \frac{p_1}{2}, \quad p_3 = \frac{p_1}{2} + p_2$$

具体例

1, 2, 3 の三つのページ間にリンクがつながっているとする：

- ページ 1 からページ 2 とページ 3 へリンクを張っている
- ページ 2 からページ 3 へリンクを張っている
- ページ 3 からページ 1 へリンクを張っている

ページ i のポイント p_i を次の条件を満たすように定める：

- ポイントが p_j で他へのリンク数が k_j のページからリンクがある場合は p_i に $\frac{p_j}{k_j}$ だけ反映される
- i 以外の全てのページからのリンクの効果を足したものが p_i

具体例に適用すると：

$$p_1 = p_3, \quad p_2 = \frac{p_1}{2}, \quad p_3 = \frac{p_1}{2} + p_2$$

具体例

1, 2, 3 の三つのページ間にリンクがつながっているとする：

- ページ 1 からページ 2 とページ 3 へリンクを張っている
- ページ 2 からページ 3 へリンクを張っている
- ページ 3 からページ 1 へリンクを張っている

ページ i のポイント p_i を次の条件を満たすように定める：

- ポイントが p_j で他へのリンク数が k_j のページからリンクがある場合は p_i に $\frac{p_j}{k_j}$ だけ反映される
- i 以外の全てのページからのリンクの効果を足したものが p_i

具体例に適用すると：

$$p_1 = p_3, \quad p_2 = \frac{p_1}{2}, \quad p_3 = \frac{p_1}{2} + p_2$$

具体例

1, 2, 3 の三つのページ間にリンクがつながっているとする：

- ページ 1 からページ 2 とページ 3 へリンクを張っている
- ページ 2 からページ 3 へリンクを張っている
- ページ 3 からページ 1 へリンクを張っている

ページ i のポイント p_i を次の条件を満たすように定める：

- ポイントが p_j で他へのリンク数が k_j のページからリンクがある場合は p_i に $\frac{p_j}{k_j}$ だけ反映される
- i 以外の全てのページからのリンクの効果を足したものが p_i

具体例に適用すると：

$$p_1 = p_3, \quad p_2 = \frac{p_1}{2}, \quad p_3 = \frac{p_1}{2} + p_2$$

具体例

1, 2, 3 の三つのページ間にリンクがつながっているとする：

- ページ 1 からページ 2 とページ 3 へリンクを張っている
- ページ 2 からページ 3 へリンクを張っている
- ページ 3 からページ 1 へリンクを張っている

ページ i のポイント p_i を次の条件を満たすように定める：

- ポイントが p_j で他へのリンク数が k_j のページからリンクがある場合は p_i に $\frac{p_j}{k_j}$ だけ反映される
- i 以外の全てのページからのリンクの効果を足したものが p_i

具体例に適用すると：

$$p_1 = p_3, \quad p_2 = \frac{p_1}{2}, \quad p_3 = \frac{p_1}{2} + p_2$$

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

次の規則で隣接行列 R を定める：

- ① ページ i へページ j からリンクが張られており、ページ j からは k 箇のページへのリンクが張られていれば (i, j) 成分は $\frac{1}{k}$
- ② ページ i へはページ j からのリンクが無ければ (i, j) 成分は 0

具体例では：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いると p_i の満たすべき式は：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを解くと：

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

これよりページ間の順位を 1, 3 は同率一位、2 は三位 とする。

行列の固有値と固有ベクトル

行列の固有値と固有ベクトル

p_i の満たすべき式として登場した方程式：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを一般化して、与えられた n 次正方行列 A について、未知の n 項列ベクトル $\mathbf{x}$ についての方程式を考える：

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

更に一般化して、 λ を数として

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

定義

与えられた行列 A に対し上式を満たす数 λ とベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき、その λ を A の**固有値**、その $\mathbf{x}$ を A の**固有値** λ に**属する固有ベクトル**とよぶ。

行列の固有値と固有ベクトル

p_i の満たすべき式として登場した方程式：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを一般化して、与えられた n 次正方行列 A について、未知の n 項列ベクトル $\mathbf{x}$ についての方程式を考える：

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

更に一般化して、 λ を数として

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

定義

与えられた行列 A に対し上式を満たす数 λ とベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき、その λ を A の**固有値**、その $\mathbf{x}$ を A の**固有値** λ に**属する固有ベクトル**とよぶ。

行列の固有値と固有ベクトル

p_i の満たすべき式として登場した方程式：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを一般化して、与えられた n 次正方行列 A について、未知の n 項列ベクトル $\mathbf{x}$ についての方程式を考える：

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

更に一般化して、 λ を数として

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

定義

与えられた行列 A に対し上式を満たす数 λ とベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき、その λ を A の**固有値**、その $\mathbf{x}$ を A の**固有値** λ に**属する固有ベクトル**とよぶ。

行列の固有値と固有ベクトル

p_i の満たすべき式として登場した方程式：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

これを一般化して、与えられた n 次正方行列 A について、未知の n 項列ベクトル $\mathbf{x}$ についての方程式を考える：

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

更に一般化して、 λ を数として

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

定義

与えられた行列 A に対し上式を満たす数 λ とベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき、その λ を A の**固有値**、その $\mathbf{x}$ を A の**固有値** λ に**属する固有ベクトル**とよぶ。

固有値、固有ベクトルの求めかた

固有値、固有ベクトルの求めかた

まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

 A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。 $\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の**行列式**とよび $\det A$ で表す。一般の n 次正方行列 A に対しても A の**行列式** $\det A$ が定義される。

固有値、固有ベクトルの求めかた

まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

 A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。 $\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の**行列式**とよび $\det A$ で表す。一般の n 次正方行列 A に対しても A の**行列式** $\det A$ が定義される。

固有値、固有ベクトルの求めかた

まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

 A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。 $\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の**行列式**とよび $\det A$ で表す。一般の n 次正方行列 A に対しても A の**行列式** $\det A$ が定義される。

固有値、固有ベクトルの求めかた
まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。

$\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。

第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の**行列式**とよび $\det A$ で表す。

一般の n 次正方行列 A に対しても A の**行列式** $\det A$ が定義される。

固有値、固有ベクトルの求めかた

まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

 A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。 $\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の行列式とよび $\det A$ で表す。一般の n 次正方行列 A に対しても A の行列式 $\det A$ が定義される。

固有値、固有ベクトルの求めかた
まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。

$\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。

第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の**行列式**とよび $\det A$ で表す。

一般の n 次正方行列 A に対しても A の**行列式** $\det A$ が定義される。

固有値、固有ベクトルの求めかた
まず $A\mathbf{x}$ を左辺に移項して

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$$

定理

A を n 次正方行列とする、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる n 項列ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するならば A^{-1} は存在しない。

$\therefore$ もし A^{-1} が存在するならば、両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

これは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に反する。

第2回より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないならば $ad - bc = 0$ である。

用語

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $ad - bc$ を A の**行列式**とよび $\det A$ で表す。

一般の n 次正方行列 A に対しても A の**行列式** $\det A$ が定義される。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

具体例

$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求める。

考える問題は

$$(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって定理より

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって固有値は 1 と $\frac{1}{2}$ 。

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める

$$(1 \cdot I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の定数倍。

同様に、固有値 $\frac{1}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍。

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める

$$(1 \cdot I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の定数倍。

同様に、固有値 $\frac{1}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍。

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める

$$(1 \cdot I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の定数倍。

同様に、固有値 $\frac{1}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍。

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める

$$(1 \cdot I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の定数倍。

同様に、固有値 $\frac{1}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍。

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める

$$(1 \cdot I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の定数倍。

同様に、固有値 $\frac{1}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍。

注意

注意

- 実はここでの規則に従って作られた隣接行列の固有値の中では 1 が絶対値最大であることが証明できる。
- 大きな行列 (数億次正方行列) の固有ベクトルを、連立方程式を解いて求めるのは計算に時間がかかりすぎるので、Google ではペロン-フロベニウスの定理を用いている。

注意

- 実はここでの規則に従って作られた隣接行列の固有値の中では 1 が絶対値最大であることが証明できる。
- 大きな行列 (数億次正方行列) の固有ベクトルを、連立方程式を解いて求めるのは計算に時間がかかりすぎるので、Google では**ペロン-フロベニウスの定理**を用いている。