

社会と数理科学

第2回

新居 俊作

九州大学基幹教育

教科書



この動画を見た後、この教科書の21ページまでを必ず勉強しておいてください。行列の算法を身につけていないと、3回目以降の授業に絶対に落ちこぼれます。

ゼロ行列、単位行列と逆行列

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 全ての成分が0の行列をゼロ行列または零行列とよび、 $O_{m,n}$ 或いは単に O と書く。
 - A を行列として A と同じサイズのゼロ行列 O (A が $m \times n$ 行列ならば $m \times n$ 行列 $O_{m,n}$) について

$$A + O = O + A = A$$

- 積が定義できるとき (A が $m \times n$ 行列ならば $n \times k$ 行列 $O_{n,k}$) について

$$AO = O$$

積が定義できるとき (A が $m \times n$ 行列ならば $l \times m$ 行列 $O_{l,m}$) について

$$OA = O$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 全ての成分が0の行列をゼロ行列または零行列とよび、 $O_{m,n}$ 或いは単に O と書く。
 - A を行列として A と同じサイズのゼロ行列 O (A が $m \times n$ 行列ならば $m \times n$ 行列 $O_{m,n}$) について

$$A + O = O + A = A$$

- 積が定義できるとき (A が $m \times n$ 行列ならば $n \times k$ 行列 $O_{n,k}$) について

$$AO = O$$

- 積が定義できるとき (A が $m \times n$ 行列ならば $l \times m$ 行列 $O_{l,m}$) について

$$OA = O$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 全ての成分が0の行列をゼロ行列または零行列とよび、 $O_{m,n}$ 或いは単に O と書く。
 - A を行列として A と同じサイズのゼロ行列 O (A が $m \times n$ 行列ならば $m \times n$ 行列 $O_{m,n}$) について

$$A + O = O + A = A$$

- 積が定義できるとき (A が $m \times n$ 行列ならば $n \times k$ 行列 $O_{n,k}$) について

$$AO = O$$

- 積が定義できるとき (A が $m \times n$ 行列ならば $l \times m$ 行列 $O_{l,m}$) について

$$OA = O$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 行と列の数が一致する行列を正方行列とよぶ。
 $n \times n$ 行列のことを n 次正方行列とよぶ。
- 正方行列 $A = (a_{i,j})$ について A の左上の角から右下の角への対角線上に並ぶ成分 $a_{i,i}$ を対角成分とよぶ：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 行と列の数が一致する行列を正方行列とよぶ。
 $n \times n$ 行列のことを n 次正方行列とよぶ。
- 正方行列 $A = (a_{i,j})$ について A の左上の角から右下の角への対角線上に並ぶ成分 $a_{i,i}$ を対角成分とよぶ：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ & a_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 対角成分が 1 で他の成分が 0 の n 次正方行列を n 次の単位行列と呼び I_n または E_n と書く：

$$I_n (= E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $m \times n$ 行列 A に対して

$$AI_n = I_m A = A$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- 対角成分が 1 で他の成分が 0 の n 次正方行列を n 次の単位行列と呼び I_n または E_n と書く：

$$I_n(= E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $m \times n$ 行列 A に対して

$$AI_n = I_m A = A$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- n 次正方行列 A に対し $AB = BA = I_n$ となる n 次正方行列 B が存在するとき A は正則行列であるという。このとき B を A の逆行列とよび B を A^{-1} と書く。 A^{-1} はもし存在するならば只一つである。
- 実は $AB = I_n$ ならば A は正則で $BA = I_n$ である。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

$ad - bc \neq 0$ の時に、その時に限り $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在する。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- n 次正方行列 A に対し $AB = BA = I_n$ となる n 次正方行列 B が存在するとき A は正則行列であるという。このとき B を A の逆行列とよび B を A^{-1} と書く。 A^{-1} はもし存在するならば只一つである。
- 実は $AB = I_n$ ならば A は正則で $BA = I_n$ である。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

$ad - bc \neq 0$ の時に、その時に限り $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在する。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- n 次正方行列 A に対し $AB = BA = I_n$ となる n 次正方行列 B が存在するとき A は正則行列であるという。このとき B を A の逆行列とよび B を A^{-1} と書く。 A^{-1} はもし存在するならば只一つである。
- 実は $AB = I_n$ ならば A は正則で $BA = I_n$ である。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

$ad - bc \neq 0$ の時に、その時に限り $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在する。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- n 次正方行列 A に対し $AB = BA = I_n$ となる n 次正方行列 B が存在するとき A は正則行列であるという。このとき B を A の逆行列とよび B を A^{-1} と書く。 A^{-1} はもし存在するならば只一つである。
- 実は $AB = I_n$ ならば A は正則で $BA = I_n$ である。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

$ad - bc \neq 0$ の時に、その時に限り $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在する。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列、単位行列と逆行列

- n 次正方行列 A に対し $AB = BA = I_n$ となる n 次正方行列 B が存在するとき A は正則行列であるという。このとき B を A の逆行列とよび B を A^{-1} と書く。 A^{-1} はもし存在するならば只一つである。
- 実は $AB = I_n$ ならば A は正則で $BA = I_n$ である。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。

$ad - bc \neq 0$ の時に、その時に限り $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ が存在する。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

逆行列の求めかた

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

③ 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

● 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

● 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

● 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

● 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

③ 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

3 以上の n について n 次正方行列 A の逆行列を計算する方法

- ① n 次単位行列と A を並べた次の形の $n \times 2n$ 行列を用意する：

$$(I_n \mid A)$$

- ② この行列の行に対して次の三つの操作を行う：

- 二つの行を入れ替える。
- ある行に 0 でない数をかける。
- ある行の定数倍を他の行に加える。

この三種類の操作を行列に対する行の基本変形とよぶ。

- ③ 行の基本変形を繰り返して

$$(I_n \mid A) \longrightarrow (B \mid I_n)$$

と変形できたとき A は正則で $B = A^{-1}$ である。

逆行列の求めかた

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

逆行列の求めかた

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

① $(I_n \mid A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$

② $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3行目の交換}]{\text{2行目と}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{3行目} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

逆行列の求めかた

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

$$\textcircled{1} \quad (I_n \mid A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3行目の交換}]{\text{2行目と}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{3行目} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

逆行列の求めかた

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

$$\textcircled{1} \quad (I_n \mid A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3行目の交換}]{\text{2行目と}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{3行目} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

逆行列の求めかた

②

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-3 \text{ 行目} \times 4}]{2 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-2 \text{ 行目} \times 2}]{1 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

● 従って

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

逆行列の求めかた

②

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-3 \text{ 行目} \times 4}]{2 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-2 \text{ 行目} \times 2}]{1 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

③ 従って

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

逆行列の求めかた

②

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-3 \text{ 行目} \times 4]{2 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-2 \text{ 行目} \times 2]{1 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

③ 従って

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$