

非線形数理冬の学校講義録  
「発展方程式系の解の挙動」  
— 反応拡散方程式理論の最先端 —

2006年12月

## 序

非線形数理冬の学校は、2006年12月13日（水）から15日（金）まで、東京工業大学大岡山キャンパスにおいて開講されるものです。受講される方の便宜のため、講師の方々のご協力によりこの講義録が作成されました。執筆して下さった講師の方々にここに厚くお礼申し上げます。

なお開催にあたり、科学研究費補助金基盤研究S「非線形非平衡反応拡散系理論の確立」（代表者：三村昌泰）による援助を受けております。

2006年12月

世話人：

柳田 英二（東北大学大学院理学研究科数学専攻）

三村 昌泰（明治大学 理工学部数学教室）

谷口 雅治（東京工業大学大学院情報理工学研究科）

# 目次

中木 達幸 (広島大学) . . . . .	1
「移動境界問題と反応拡散系による近似」	
仙葉 隆 (宮崎大学) . . . . .	25
「走化性方程式の解の爆発について」	
石井 克幸 (神戸大学) . . . . .	50
「平均曲率流の近似問題について (粘性解理論の応用)」	
倉田 和浩 (首都大学東京) . . . . .	60
「スカラー反応拡散方程式の環境効果と多重安定定常解について」	
石毛 和弘 (東北大学) . . . . .	75
「熱方程式の解の最大点挙動」	

# 移動境界問題と反応拡散系による近似\*

広島大学 大学院理学研究科

中木 達幸†

非線形数理 冬の学校

(2006年12月15日)

## 1 はじめに

本講演では、移動境界問題 (moving boundary problems) を扱うことにする。名前のおり境界が時間と共に移動する問題であり、有名で、かつ、典型的な問題としては、Stefan 問題があげられる。文献 [24] によれば、オーストリアの物理学者である Josef Stefan (1835–1893) が 1889 年に著した論文が Stefan 問題の出発点になったとのことである。簡単に解説しよう。

常に温度が 0 度である氷柱があり、一端面が温度  $f(t) \geq 0$  度である熱源に接しているとす (図 1)。時間が経過すると氷が融け、水と氷の部分からなる柱ができる。このとき、水の温度分布と共に、水と氷の境目 (moving boundary) の位置を求めようという問題である。柱を 1 次元とみなすことができるとき、次のとおり定式化がで

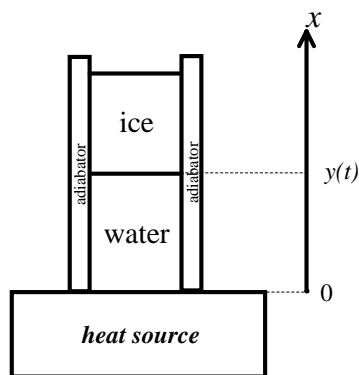


図 1: 空間 1 次元の 1 相 Stefan 問題

\*村川秀樹氏との共同研究によるものである。また井古田亮博士からも多くの協力を頂いた。

†nakaki@hiroshima-u.ac.jp

きる .

$$\begin{cases} u_t = \frac{k}{c} u_{xx}, & 0 < x < y(t), 0 < t < T, \\ u(0, t) = f(t), & 0 < t < T, \\ u(y(t), t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < t < y_0, \\ y'(t) = -\frac{k}{\lambda} u_x(y(t) - 0, t), & 0 < t < T, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

ここで,  $u = u(x, t)$  は場所  $x$ , 時刻  $t$  での水の温度,  $y = y(t)$  は水と氷の境目の位置 (移動境界) を表し, これらは未知量である.  $k$  は水の熱伝導係数,  $c$  は水の体積比熱,  $\lambda$  は潜熱係数であり, 簡単のため, 正の与えられた定数とする. 水の温度分布と境目の初期値は, それぞれ,  $u_0 = u_0(x) \geq 0, y_0 \geq 0$  とした. 水柱中の熱伝導は (1)<sub>1</sub> で記述される. Stefan 条件と呼ばれる (1)<sub>5</sub> は, 氷が移動境界における熱勾配にしたがって融けて移動することを示している.

この問題は  $u$  を求めると同時に  $u$  が定義される空間領域をも求める必要があるという難しさがあることに注意する.

注意 ここでは移動境界 (moving boundary) という用語を使用した, 自由境界 (free boundary) と呼ばれることも少なくない. この講演では, 境界が時間と伴に移動することを強調するため, 前者の用語を採用することにする.

注意 微分方程式系 (1) はいわゆる古典的な 1 相 Stefan 問題と呼ばれるものである. 氷の温度分布も考える 2 相問題や移動境界の曲率も考慮した問題などもある.

他の問題として, 多孔質媒体 (porous medium) 中を流れる流体の問題がある. 詳しい方程式の導出は [21] を参照して頂きたいが, 流体の保存法則, 流体の速度と圧力の間で成立する Darcy 法則などを使ってことにより,

$$u_t = \Delta u^m, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad 0 < t < T \quad (2)$$

とモデル化される. これを porous medium equation と呼んでいる. ここで,  $u = u(x, t)$  は流体の (ある意味で空間的に平均化した) 密度を表し,  $m > 1$  は定数である. 物理的には  $m \geq 2$  であるが, 数学的には  $m > 1$  の場合を扱うことが一般的である.

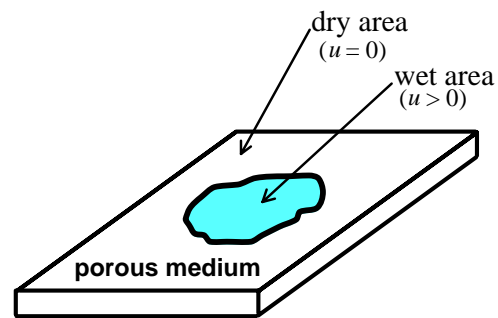


図 2: 多孔質媒体中の流れ問題

この問題を初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^N \quad (3)$$

のもので考察し，初期関数  $u_0$  の台  $\text{supp } u_0 := \overline{\{x \in \mathbf{R}^N; u_0(x) > 0\}}$  はコンパクトであるとする．このとき，(2) の拡散係数  $mu^{m-1}$  が  $u = 0$  で退化することより， $\text{supp } u(\cdot, t)$  もすべての  $t > 0$  でコンパクトであることが分かる<sup>1</sup>．すなわち， $u > 0$  となる領域と  $u = 0$  となる領域の間に移動境界が現れ，物理的には，流体の存在範囲を記述するものである（図2）．

このような移動境界問題の興味として，解  $u$  の挙動を調べる以外に，移動境界の性質を調べることがある．解析には色々な手法があるが，我々は，数値解法に話を限定しよう．数値解法を構成するとき，移動境界にも配慮する必要がある．例えば，porous medium equation (2) は，見かけが線形拡散方程式  $u_t = u_{xx}$  と近い形であるので，線形拡散方程式と同様の数値解法を使った方法を開発できる（Baklanovskaya [2]）．彼女は数学的に数値解  $u_h$  が真の解  $u$  に広義一様収束することを証明している．しかし，残念ながら，この数値解では界面を捉えることはできない．なぜなら，一般に，解  $u_h$  の収束は直ちに界面の収束を意味しないからである．簡単な例を図3に示す．この例では，近似解  $u_h(x)$  は  $h \rightarrow 0$  のとき  $u(x)$  に一様収束するが， $u_h$  の界面  $y_h (= 2)$  は  $u$  のそれ  $y (= 1)$  に収束しない．そのため，移動境界問題を扱うとき，界面をも意識した数値解法を開発する必要がある．

界面をも追跡する方法として，Stefan問題については山口と野木の方法 [24]，porous medium equation では三村，中木と友枝の方法 [13] がある．他には，2相 Stefan問題に対する四ツ谷の方法 [25] も知られていて，解と界面の数学的な収束性が与えられている．これらの方法は空間1次元に限った話である．空間1次元では，移動境界は点（空間0次元）として現れるため，界面の位置を陽的に表す front tracking method の適用が簡単であることが理由と思われる．空間多次元では，移動境界をどのようにして表すかが問題になる．例えば，level set method [23] が有力な方法の1つであり，い

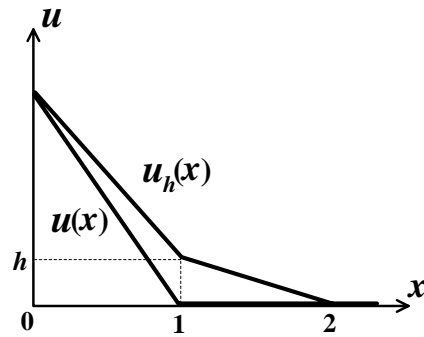


図3:  $u_h$  の収束は  $\text{supp } u_h$  の収束を意味しない

くつかの移動境界問題に適用されている．この方法は，時間発展する関数の等高線として移動境界を表現するものであり，移動境界の位相的变化（複数の移動境界が

<sup>1</sup>厳密に言えば，比較定理と Barenblatt[3] と Pattle[20] の解を用いて証明を行う．

ひつついたり，移動境界が消滅するなど)に容易に対応できる特徴がある．

本日の講演では，講演タイトルにあるように，反応拡散系で移動境界問題を近似し，それを用いて有効な数値解法を構成できることをお話したい．この方法による数値解法の特徴は，移動境界を自然に捉えることができ，コンピュータで実際に計算するときの計算コスト(計算時間と必要とするメモリー)が少ないことである．この方面の研究は始まったばかりで，未知のことが多く，多くの方々からの寄与を期待したい．

## 2 Threshold Competition Dynamics 法

反応拡散系による近似を使った移動境界の数値解法には，Threshold Competition Dynamics 法 [9] を使う．そのため，まず本節で，この方法の概要を説明する．Threshold Competition Dynamics 法は，当初，ある生物モデルを近似するために開発されたもので，特異な反応項を扱うためのものである．簡単に説明する．

反応拡散系の初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + \lambda_1(1-u)u - kuv & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v + \lambda_2(1-v)v - \alpha kuv & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (4)$$

を考える．ここで，未知関数  $u = u(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$  はある生物の個体群密度であり， $d_1, d_2, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$  は正定数， $k$  は(非常に大きい値の)パラメータ， $\Omega$  は滑らかな境界  $\partial\Omega$  をもつ  $R^N$  の有界領域， $\nu$  は  $\partial\Omega$  の外向き単位法線ベクトルである．微分方程式の最後の項  $-kuv$  は  $u$  と  $v$  との競合を表す．我々の興味は，この競合が強い場合である．すなわち， $k \gg 1$  であり，特に  $k \rightarrow \infty$  の極限状態を解析したい．この意味で「特異」問題と呼ぶことにする．この極限状態では， $u$  と  $v$  は  $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$  を固定する毎に共存できない，すなわち， $u(x, t)v(x, t) = 0$  であるため， $u, v$  の生息域の境目として移動境界が現れることに注意する．

$k = \infty$  での (4) を近似する方法として，次のものを提案する：  $M$  を正の整数とし， $h := T/M$ ,  $t_j := jh$  ( $j = 0, 1, \dots, M$ ). とおく．関数  $\bar{u}_M^j(x, t)$ ,  $\bar{v}_M^j(x, t)$  を次の2つのステップで定めて，

$$\begin{cases} u_M(x, 0) = u_0(x), \quad v_M(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ u_M(x, t) = \bar{u}_M^j(t, x), \quad v_M(x, t) = \bar{v}_M^j(t, x), & t \in (t_j, t_{j+1}], x \in \Omega \end{cases} \quad (5)$$

とおく．この  $u_M(x, t)$  と  $v_M(x, t)$  を (4) の Threshold Competition Dynamics 法による近似解と呼ぼう．

ステップ 1.  $u_M^0(x) = u_0(x)$ ,  $v_M^0(x) = v_0(x)$  ( $x \in \Omega$ ) とおく .

ステップ 2.  $u_M^j(x)$  and  $v_M^j(x)$  が与えられたとき ,

(i) 次をみたく  $\bar{u}_M^j(x, t)$  と  $\bar{v}_M^j(x, t)$  を求める .

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_M^j}{\partial t} = d_1 \Delta \bar{u}_M^j + F(\bar{u}_M^j) & x \in \Omega, \quad t_j < t < t_{j+1}, \\ \frac{\partial \bar{u}_M^j}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t_j < t < t_{j+1}, \\ \bar{u}_M^j(t_j, x) = u_M^j(x) & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_M^j}{\partial t} = d_2 \Delta \bar{v}_M^j + G(\bar{v}_M^j) & x \in \Omega, \quad t_j < t < t_{j+1}, \\ \frac{\partial \bar{v}_M^j}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t_j < t < t_{j+1}, \\ \bar{v}_M^j(t_j, x) = v_M^j(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

ここで ,  $F(u) = \lambda_1(1-u)u$ ,  $G(v) = \lambda_2(1-v)v$  である .

(ii)  $u_M^{j+1}(x)$  と  $v_M^{j+1}(x)$  を

$$u_M^{j+1}(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{u}_M^j(\tau; x), \quad v_M^{j+1}(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{v}_M^j(\tau; x) \quad (8)$$

で定義する . ここで ,  $\hat{u}_M^j$  と  $\hat{v}_M^j$  は

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}_M^j}{d\tau} = -\hat{u}_M^j \hat{v}_M^j & x \in \Omega, \quad 0 < \tau < kh, \\ \frac{d\hat{v}_M^j}{d\tau} = -\alpha \hat{u}_M^j \hat{v}_M^j & x \in \Omega, \quad 0 < \tau < kh, \\ \hat{u}_M^j(0; x) = \bar{u}_M^j(x, t_{j+1}), & x \in \Omega, \\ \hat{v}_M^j(0; x) = \bar{v}_M^j(x, t_{j+1}), & x \in \Omega \end{cases} \quad (9)$$

の解である .

ステップ 2 において , operator-splitting method を使ったことに注意する . すなわち , (4) を

$$u_t = d_1 \Delta u + F(u), \quad v_t = d_2 \Delta v + G(v) \quad (10)$$

と

$$\frac{du}{dt} = -kuv, \quad \frac{dv}{dt} = -k\alpha uv \quad (11)$$



に分離した .

Threshold Competition Dynamics の主たるアイデアは , ステップ 2 (ii) にある .  $\tau = kt$  とせよ . すると , (11) は (9) に書き換えることができる . 方程式 (11) において  $k \rightarrow \infty$  とする代わりに , (9) の解において極限  $kh \rightarrow \infty$  をとる . この極限は ,  $d(u - v/\alpha)/d\tau = 0$  を使うと , 簡単に計算でき ,

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{u}_M^j(\tau; x) = [\bar{u}_M^j(t_{j+1}, x) - \bar{v}_M^j(t_{j+1}, x)/\alpha]^+ , \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{v}_M^j(\tau; x) = \alpha [\bar{u}_M^j(t_{j+1}, x) - \bar{v}_M^j(t_{j+1}, x)/\alpha]^- \end{cases} \quad (12)$$

となる .

ここで , Threshold Competition Dynamics 法は mean curvature flow に対する diffusion-generated approach による方法 [12, 22] と類似したものであることに注意する . それらの収束性は [4, 6] に , もっと一般的な超曲面の動きについては [11] に示されている .

我々の Threshold Competition Dynamics 法に関して , 次の収束性に関する結果がある .

**定理 2.1** (井古田 , 三村 , 中木 [9]) 初期関数  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  に対して , (4) の弱解を  $u, v$  とする . このとき , Threshold Competition Dynamics 法 (5) による近似解  $u_M, v_M$  は , それぞれ ,  $M \rightarrow \infty$  のとき ,  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  において  $u, v$  に収束する .

紙面の関係で弱解の定義の記述を省略する . また , 初期関数に滑らかさがあり , 2 つの拡散係数が等しいとき , 収束次数が得られている :

**定理 2.2** ([9]) 上の定理に加えて ,

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} u_0 v_0 = 0 \end{cases}$$

を仮定する . このとき ,  $d_1 = d_2$  であれば ,  $u_M, v_M$  の  $u, v$  への収束は , 時間  $t \in (0, T)$  を固定すると ,

- $L^2(\Omega)$  ノルムでは  $O((1/M)^{1/2})$
- $L^1(\Omega)$  ノルムでは  $O((1/M))$

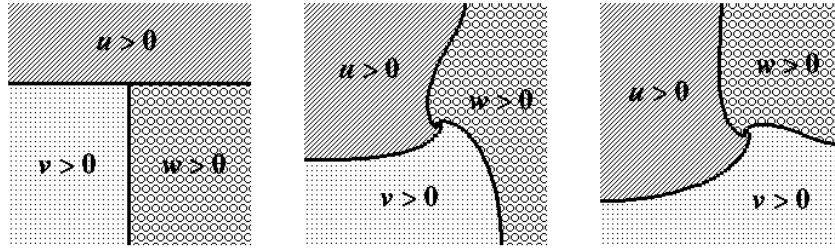


図 4: ある 3 種競合系の数値計算結果 [10] . 左から右へと時間発展する . 移動境界が捉えられているのが観察できる .

である .

Threshold Competition Dynamics 法の考え方をまとめると ,

1. 与えられた微分方程式を , 特異反応方程式  $(S)_k$  と それ以外の方程式 (R) に分離する ( operator-splitting method ) .
2.  $(S)_k$  に対して適当な変数変換し , パラメータ  $k$  を方程式から消去する . 代わりに ,  $k$  は方程式を解くべき時間区間に現れる . その後 ,  $k \rightarrow \infty$  とする . このようにしてできた問題を  $(S)_\infty$  とおく . 結果的に ,  $(S)_\infty$  の漸近解を求めることになる .
3. 短い時間間隔毎に (R) と  $(S)_\infty$  を交互に解くことにより , 近似解を作る

である . したがって ,  $k \rightarrow \infty$  となるパラメータ  $k$  を含む特異性が反応項にのみ現れる問題に対して , Threshold Competition Dynamics 法を適用することはできる . 例えば , ある 3 種競合系に適用した数値計算例を図 4 にあげる . 特徴として , 移動境界 ( 種の生息域の境目 ) を自然に , かつ , 容易に捉えられることがあげられる .

### 3 Stefan 問題に対する解法

本節では Stefan 問題に焦点をあて , 反応拡散系近似と Threshold Competition Dynamics の適用について議論する . まず , 第 1 節で述べた定式化 (1) の空間次元版について紹介する .  $R^N$  の有界領域  $\Omega$  を時間  $t$  とともに変化する 2 つの領域  $\Omega_s(t), \Omega_\ell(t)$  に分割する ( $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_s(t) \cup \bar{\Omega}_\ell(t)$ ) .  $\Omega_i(t)$  は  $i = s$  のとき固体が占める領域を ,  $i = \ell$  では液体のものを表すとする ( 固体 , 液体に関わらず ) 物体の温度

$u = u(x, t)$  は

$$u_t = \nabla \cdot \left( \frac{k}{c} \nabla u \right) \quad \text{in } x \in \Omega_\ell(t), t > 0, \quad (13)$$

$$u = 0 \quad \text{in } x \in \Omega_s(t), t > 0 \quad (14)$$

をみたすものとする．境界条件として，

$$u = 0 \quad \text{on } x \in \partial\Omega_s(t) \cap \partial\Omega_\ell(t), t > 0, \quad (15)$$

$$V = -\frac{k}{\lambda} \nabla u|_{\Omega_\ell(t)} \cdot \nu \quad \text{on } x \in \partial\Omega_s(t) \cap \partial\Omega_\ell(t), t > 0 \quad (16)$$

を課すこととする．ここで， $k > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\lambda > 0$  はすでに第1節で述べた定数であり，一般性を失うことなく，以下では，

$$k = c = \lambda = 1$$

と仮定する． $\nu$  は  $\Omega_\ell$  の外向き単位法線ベクトル， $V$  は移動境界の法線速度である．初期条件として，

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{on } x \in \Omega, \quad (17)$$

$$\Omega_\ell(0) = \Omega_0 \quad (18)$$

を採用する．ここで， $\Omega_0 \subset \Omega$  であり，初期関数  $u_0$  は

$$\begin{aligned} u_0 &> 0 \quad \text{on } \Omega_0, \\ u_0 &= 0 \quad \text{on } \Omega \setminus \Omega_0 \end{aligned} \quad (19)$$

をみたすものとする．すなわち，初期時刻においては， $\Omega_0$  が液体領域， $\Omega \setminus \Omega_0$  が固体領域であることを意味する．本節では，簡単のため， $\partial\Omega$  での境界条件として，ディリクレ型のもの

$$u(x, t) = A(x, t) \quad \text{on } x \in \partial\Omega, t > 0 \quad (20)$$

を課すことにする．以上の状況下で，(13)–(20) は次と同価であることが知られている．

$$\begin{cases} w_t = \Delta w^+ & \text{in } \Omega, \\ w(x, t) = A(x, t) & \text{on } x \in \partial\Omega, t > 0, \\ w(x, 0) = \begin{cases} u_0(x) & \text{if } x \in \Omega_0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} & \text{on } x \in \Omega. \end{cases} \quad (21)$$

ここで,  $a^\pm = \max\{\pm a, 0\}$  である. 以下では, (21) で定式化された Stefan 問題を扱うことにする. この問題を近似する系として, Eymard ら [7] は, 次のものを提案した.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - kuv & \text{in } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = -kuv & \text{in } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty). \end{cases} \quad (22)$$

ここで,  $k > 0$  は (十分に大きい) パラメータである. この反応拡散系には特異反応項  $-kuv$  があることに注意する. これに対し, 次の結果が知られている.

**定理 3.1** (Eymard et al. [7]) ある正の定数  $K$  に対して,

$$\begin{cases} A \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}), \\ u_0(x) = A(x, 0) & \text{on } x \in \Omega, \\ 0 \leq v_0 \leq K & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (23)$$

とせよ. ここで,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$  である. すると, 任意の  $k > 0$  に対して (22) の弱解  $(u^{(k)}, v^{(k)}) \in W_2^{2,1}(Q_T) \times C^{0,1}([0, T]; L^\infty(\Omega))$  がただ 1 つ存在し,

$$u^{(k)} \rightarrow w^+, \quad v^{(k)} \rightarrow w^- \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (24)$$

が  $L^2(Q_T)$  において成立する. ここで,  $w$  は (21) の弱解である.

我々の目的は, (22) に対して Threshold Competition Dynamics を適用して, 移動境界が捉えられる解法を作ることである. そのため, (22) を拡散方程式と反応方程式に分ける:

$$(D) \quad u_t = \Delta u, \quad (R)_k \quad \begin{cases} u_t = -kuv, \\ v_t = -kuv. \end{cases} \quad (25)$$

$\tau = kt$  とおくことにより,  $(R)_k$  は

$$(R)_\infty \quad \begin{cases} u_\tau = -uv, \\ v_\tau = -uv \end{cases} \quad (26)$$

となる.  $k = \infty$  での  $(R)_k$  の解は  $\tau = \infty$  での  $(R)_\infty$  の解に対応する, すなわち, 特異極限解は漸近解に対応することに注意しよう.

さて, 我々の解法を示すことにする.  $\{t_n\}_{n=0,1,\dots}$  を  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  なる列とする. 我々の近似解  $\{(u^n(x), v^n(x))\}_{n=0,1,\dots}$  は次の 2 つのステップにより定義する.

ステップ 1.

$$u^0(x) = u_0(x), \quad v^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_0(x) > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \Omega) \quad (27)$$

とする .

ステップ 2.  $(u^n(x), v^n(x))$  が与えられたとせよ . このとき ,

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = [u^{n+1/2}(x) - v^n(x)]^+, \\ v^{n+1}(x) = [v^n(x) - u^{n+1/2}(x)]^+ \end{cases} \quad (28)$$

とおく . ここで ,  $u^{n+1/2} = U(\cdot, t_{n+1})$  と  $U$  は

$$\begin{cases} U_t = \Delta U & \text{in } x \in \Omega, t \in (t_n, t_{n+1}), \\ U(x, t_n) = u^n(x) & \text{on } x \in \Omega, \\ U(x, t) = A(x, t) & \text{on } x \in \partial\Omega, t \in (t_n, t_{n+1}) \end{cases} \quad (29)$$

の解である . なお , (28) の右辺は , 初期条件

$$u(\cdot, t_n) = u^{n+1/2}, \quad v(\cdot, t_n) = v^n \quad (30)$$

の下での  $(R)_\infty$  の解であることに注意する .

関数  $v$  は固体領域の特性関数に対応していると考えて頂ければ良く , その台の境界  $\partial(\text{supp } v(\cdot, t))$  を時刻  $t$  での移動境界とすることは自然である .

この方法の収束性に関して , 次の結果がある .

定理 3.2 (村川 , 中木 [14]) 定理 3.1 の仮定に加えて ,

$$\begin{cases} u_0 \in C^4(\bar{\Omega}), \quad v_0 \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \text{supp } v_0 \subset \Omega, \\ A_{tt}(x, \cdot) \in L^1(0, T) \quad \text{for } x \in \Omega \end{cases} \quad (31)$$

を仮定する . 近似解  $u^n(x), v^n(x)$  を時間に関して拡張したものを , それぞれ ,  $u_h(x, t), v_h(x, t)$  とする . このとき , すべての  $t \in [0, T]$  に対して ,  $u_h(\cdot, t), v_h(\cdot, t)$  は ,  $h \rightarrow 0$  のとき , それぞれ ,  $u(\cdot, t), v(\cdot, t)$  に  $L^1(\Omega)$  で収束する . ここで ,

$$h = \max \{t_{n+1} - t_n; 0 \leq t_n < t_{n+1} \leq T\}$$

であり , これは最大離散時間間隔を意味する .

収束証明など詳しいことは , 村川 [16] を参照されたし .

我々は簡単のため , ディリクレ境界条件 (20) を  $\partial\Omega$  に課した . これは本質的ではなく , ノイマン境界条件などでも近似解法を構成できることに注意する .

ここで空間 2 次元での数値計算例を示す (中木 , 村川 [17]) .  $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbf{R}^2$  とおき ,  $\partial\Omega$  での境界条件として

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi_0(x), \quad u(x, 1) = \phi_1(x) & \text{on } x \in (0, 1), \\ u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0 & \text{on } y \in (0, 1) \end{cases} \quad (32)$$

を課す．ここで，

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x - \frac{1}{3}| < \frac{1}{20}, \\ 0.1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \phi_1(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } |x - \frac{2}{3}| < \frac{1}{20}, \\ 0.05 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

である．初期関数は  $u_0 \equiv 0$  とする．すなわち，初期時刻で物体はすべて固体であるとする．熱方程式 (29) は標準的な陰解法で数値的に解いた．メッシュは  $256 \times 256$  である．列  $\{t_n\}_{n=0,1,\dots}$  は  $t_n = 10^{-4}n$  となるように選んだ．このときの数値的な移動境界の時間発展を図5に示す．移動境界が明確に捉えられ，その位相的な変化，す

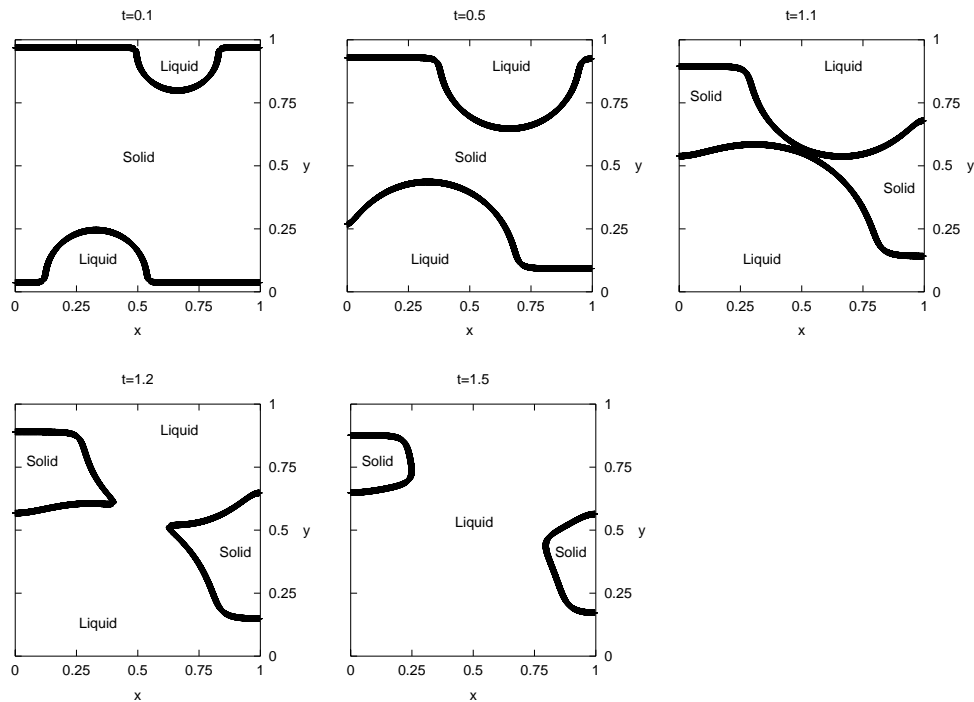


図 5: 我々の方法による数値的な移動境界の時間発展 ( $t = 0.1, 0.5, 1.1, 1.2, 1.5$ )

なわち移動境界同士の衝突など，にも対応できていることが観察される．また，我々の方法により数値実験をしたとき，計算コストが比較的低い（単純な熱方程式を数値的に解くことと比較して，計算時間は数パーセント余分にかかるだけに留まり，必要メモリー量はほぼ倍である）ことを指摘する．

注意 空間1次元問題 (1) において，山口，野木 [24] による数値解法は，その性質上， $y_0 > 0$  でなければならない．すなわち，初期時刻に液体領域が存在して，そ

の領域での初期温度分布を与える必要がある。しかし、我々の方法は、 $y_0 = 0$  の場合も扱うことができるという長所がある。

空間3次元問題に対して、村川氏が行った数値計算（アニメーション）がある。講演の際にお見せする予定である。

## 4 Porous medium 方程式への適用

本節では、porous medium 方程式の初期値問題

$$u_t = \Delta u^m \quad \text{in } (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, \infty), \quad (34)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{on } x \in \mathbf{R}^N \quad (35)$$

に対して、前節と同様の解法を構成することを考える。先に結論を述べると、この問題を近似すると思われる拡散反応系を ad hoc に求め、数値実験結果は良好であるが、数学的な結果が得られていないのが現状である。

ある種の非線形拡散問題を近似する反応拡散系の結果として、Hilhorst ら [8] によるものがある。彼女達の結果は次のとおりである。ある条件を満足する関数  $\phi(u)$  と  $F(u, v)$  に対して<sup>2</sup>、反応拡散系

$$\begin{cases} u_t = \Delta \phi(u) - kF(u, v), \\ v_t = -kF(u, v) \end{cases} \quad (36)$$

は、移動境界での条件 (moving boundary condition)

$$V = -\nabla \phi(u) \cdot \nu \quad (37)$$

を課した微分方程式

$$u_t = \Delta \phi(u) \quad (38)$$

を近似するというものである。彼女達の近似反応拡散系 (36) は、残念ながら、我々の問題 (34)–(35) には適用できない。なぜなら、我々の問題の解の移動境界での条件は

$$V = -\frac{m}{m-1} \nabla u^{m-1} \cdot \nu \quad (= -(\text{定数}) \nabla \phi'(u) \cdot \nu) \quad (39)$$

であり、(37) と異なっているからである。

---

<sup>2</sup> $\phi(u) = u^m$  ( $m > 1$ ),  $F(u, v) = uv$  はこの条件を満足する。したがって、porous medium 方程式タイプの拡散は守備範囲内である。

我々は，(34)–(35) を近似する反応拡散系として，

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m - 2ku^2v^{1.5}, \\ v_t = -kuv \end{cases} \quad (40)$$

を提案したい．すでに述べたとおり，(40) に関する数学的な結果は得られていないことに注意されたし．以下の話はすべて数値実験によるものである．

(36) を眺めると，反応項  $-kF(u, v)$  が同じ形で2つの方程式に入っている．そのため，反応項の形を変えてみて(40)を探した．2番目の微分方程式の反応項を  $-kuv$  と固定して，1番目のものを  $-aku^\alpha v^\beta$  として，ad hoc にパラメータ  $a, \alpha, \beta$  の値を探して(数値シミュレーションをして)，(40) に到達した．以下では， $m = 2$  とし，(40) に Threshold Competition Dynamics を適用して得られた方法による数値実験結果(中木，村川 [17] による)を示す．

最初の数値実験は，空間2次元において，Barenblatt [3] と Pattle [20] による特殊解と我々の数値解を比較したものである．その特殊解は

$$u_{\text{bp}}(x, y, t) = \left[ \frac{8\sqrt{\frac{t+1}{\pi}} - (x^2 + y^2)}{16(t+1)} \right]^+ \quad (41)$$

である．初期関数を  $u^0 = u_{\text{bp}}|_{t=0}$  としたときの我々の方法による数値解を  $u_h(x, y, t)$  と書く．非線形拡散は Baklanovskaya [2] による陽解法を用いて数値的に解いた．空間メッシュ間隔は  $\Delta x = \Delta y = h = \frac{4}{50}, \frac{4}{100}, \frac{4}{200}, \frac{4}{400}$  とし，時刻  $t = 10$  における誤差

$$\begin{aligned} E_u(h) &= \frac{\|u_h(\cdot, \cdot, 10) - u_{\text{bp}}(\cdot, \cdot, 10)\|_\infty}{\|u_{\text{bp}}(\cdot, \cdot, 10)\|_\infty}, \\ E_i(h) &= \frac{|x_h(10) - x_{\text{bp}}(10)|}{|x_{\text{bp}}(10)|} \end{aligned} \quad (42)$$

を計算した．ここで， $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  であり， $(x_h(s), 0)$  と  $(x_{\text{bp}}(s), 0)$  は，それぞれ，時刻  $t = s$  での  $u_h$  と  $u_{\text{bp}}$  に現れる移動境界上の点である．誤差  $E_u(h)$  と  $E_i(h)$  を図6に示す．この図より，数値解  $u_h$  のみならず，数値的な移動境界も真のものに収束していることが観察される．収束次数はほぼ  $O(h)$  である．

2番目の数値シミュレーションは，空間1次元問題に対するものである．1次元では，三村，中木，友枝 [13] が移動境界をも追跡する数値解法を提案し，収束性を数学的に示している．我々の方法と彼らのものを

$$u^0(x) = \begin{cases} (1 - \theta) \cos^2 x + \theta \cos^4 x & \text{if } |x| < \pi/2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (43)$$



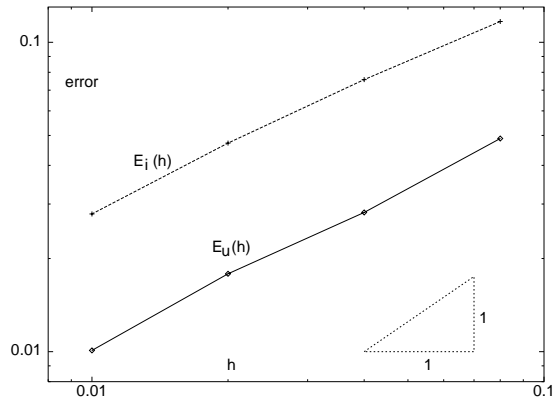


図 6: 我々の数値解の誤差  $E_u(h)$  と  $E_i(h)$  のグラフ.  $h$  は空間メッシュ間隔である

の場合に比較する. ここで,  $\theta \in [0, 1]$  はパラメータであり,  $\theta = 0, 0.5, 1$  とした. この初期関数に対して, waiting time と呼ばれる定数  $t^* > 0$  が存在し,  $t \in [0, t^*]$  の間, 移動境界が動かないことが知られている (Aronson [1] を参照. 数値的な結果は中木, 友枝 [18] にある). 図 7 に, 空間メッシュ間隔を  $h = 0.001$  とした数値実験結果を示す. 両者のグラフは一致し, このことは我々の手法の有効性を示唆している. 最後に空間 2 次元問題の数値シミュレーションを示そう. 計算領域は  $\Omega = (0, 4)^2$  と

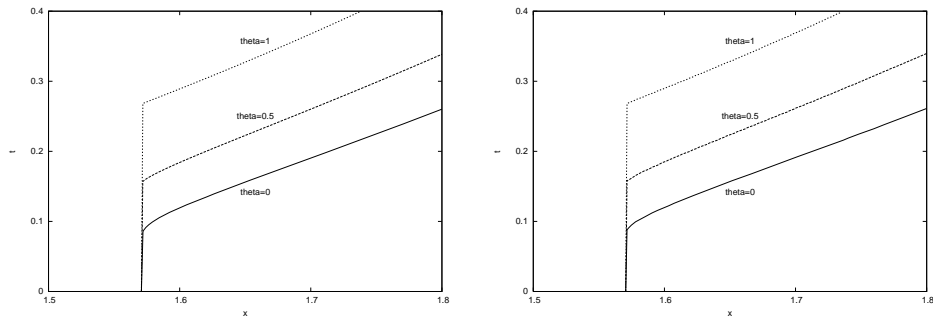


図 7: 初期関数 (43) の元での数値的な移動境界 ( $\theta = 0, 0.5, 1$  とした).  
左: 三村, 中木, 友枝の方法. 右: 我々の方法.

し,  $256 \times 256$  のメッシュに区切る. 境界条件はノイマン型とする. 初期関数は

$$u_0(x, y) = \phi(x, y; 1, 1, 0.5, 1) + \phi(x, y; 1, 3, 0.5, 2) + \psi(x, y, 3, 2, 0.5, 2) \quad (44)$$

とする．ここで，

$$\begin{aligned}\phi(x, y; a, b, r, c) &= c \left[ 1 - \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{r} \right]^+, \\ \psi(x, y; a, b, r, c) &= c \left[ 1 - \frac{|x-a|}{r} \right]^+ \left[ 1 - \frac{|y-b|}{r} \right]^+\end{aligned}\tag{45}$$

とおいた．図 8 に  $t = 0.3$  での数値解を示す．数値的な移動境界の時間発展を図 9

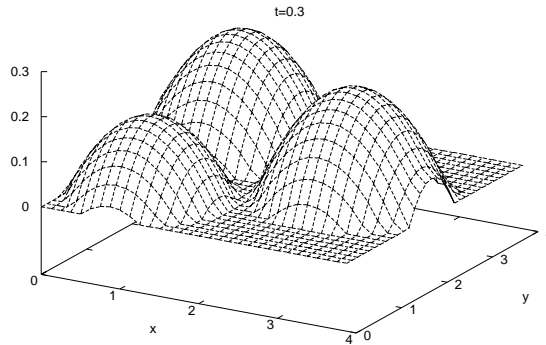


図 8:  $t = 0.3$  での数値解  $u_h(x, y, t)$

に示す．移動境界同士がくっついたり，消失したりしていることが観察される．

## 5 おわりに

移動境界を有する問題には，数学的，数值的，現象的に面白いものを多く見かけることができる．これに関連する国際研究集会 *Free boundary problems: Theory and applications* は定期的で開催されている<sup>3</sup>，他の研究集会でも関連の発表が多く行われている．

本講演では，数値解法を motivation とした話を行った．元の移動境界問題を近似する反応拡散系（特異反応項を含むもの）を見付け出し，それに Threshold Competition Dynamics を適応して，その結果として，移動境界を捉えようというアイデアである．古典的な Stefan 問題と porous medium 方程式を題材にした．研究は始まったばかりで，まだ分かっていないことは多い．行すべきこととして，例えば，

<sup>3</sup>次回は 2008 年にストックホルムで開催予定と聞いています．また，Web ページ <http://fbpnews.org/> には色々なニュースが記載されています．

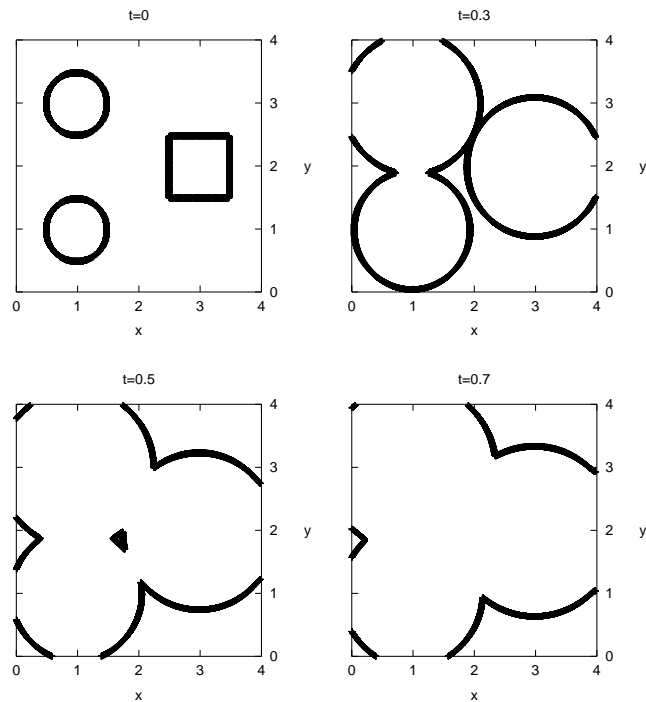


図 9:  $t = 0, 0.3, 0.5, 0.7$  での数値的移動境界

- 色々な移動境界問題に対して，それを近似する反応拡散系を見付けること
- Threshold Competition Dynamics を適用したときの解の数学的な収束性の証明
- コンピュータを使って実際に数値実験を行ったとき，実用上，有効であるかを調べること<sup>4</sup>

などがある．なお，この講演では触れなかったが，村川秀樹氏（富山大学）による 2 相 Stefan 問題に対する結果などがあることを指摘する．多くの分野の方々からの comment や suggestion などを歓迎すると同時に，興味をもって頂ければ，幸甚に存じます．最後に，本発表の機会を与えて下さいました組織委員の皆様へ感謝申し上げます．

<sup>4</sup>収束性が数学的に証明されていることと，実用上有効であることは別の話である．

## 参考文献

- [1] D. G. Aronson, Regularity properties of flows through porous media: A counterexample, *SIAM J. Appl. Math.*, 19 (1970), 299–307.
- [2] V. F. Baklanovskaya, The numerical solution of a one-dimensional problem for equations of nonstationary filtrations, *Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 1 (1961), 461–469.
- [3] G. I. Barenblatt, On some unsteady motions of a liquid and a gas in a porous medium, *Prinkl. Mat. Meh.*, 16 (1952), 67–78.
- [4] G. Barles and C. Georgelin, A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motions by mean curvature, *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 (1995), 484–500.
- [5] H. Brézis, *Operateurs maximaux monotones*, Notas de Matemática 50, North-Holland Pub. Co., 1973.
- [6] L. C. Evans, Convergence of an algorithm for mean curvature motion, *Indiana Univ. Math. J.*, 42 (1993), 533–557.
- [7] R. Eymard, D. Hilhorst, R. van der Hout and L.A. Peletier, A reaction-diffusion system approximation of a one-phase Stefan problem, *Optimal control and partial differential equations*, J. L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (eds), (2000), 156–170.
- [8] D. Hilhorst, R. van der Hout and L.A. Peletier. Nonlinear diffusion in the presence of fast reaction. *Nonlinear Anal.*, **41**, 803–823, 2000.
- [9] R. Ikota, M. Mimura and T. Nakaki, Threshold competition dynamics, preprint.
- [10] R. Ikota, M. Mimura and T. Nakaki, Numerical computation for some competition-diffusion systems on a parallel computer, *Proceedings of 12th international conference on domain decomposition methods*, (2001), 373–379.
- [11] H. Ishii, G. E. Pires and P. E. Souganidis, Threshold dynamics type approximation schemes for propagating fronts, *J. Math. Soc. Japan*, 51 (1999), 267–308.
- [12] B. Merriman, J. K. Bence and S. J. Osher, Motion of multiple junctions: a level set approach, *J. Comput. Phys.*, 112 (1994), 334–363.
- [13] M. Mimura, T. Nakaki and K. Tomoeda, A numerical approach to interface curves for some nonlinear diffusion equations, *Japan J. Appl. Math.*, 1 (1984), 93–139.
- [14] H. Murakawa and T. Nakaki. A singular limit approach to moving boundary problems and its applications. *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **52**, 255–260, 2003.

- [15] H. Murakawa and T. Nakaki. A singular limit method for the Stefan problem, Numerical Mathematics and Advanced Applications, Proceedings of the 5th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Springer-Verlag, 2004, 651–657.
- [16] H. Murakawa. A numerical method for Stefan type moving boundary problems (in Japanese). *MA Thesis, Kyushu University, Japan, 2004.*
- [17] T. Nakaki and H. Murakawa, A numerical method to Stefan problems and its application to the flow through porous media, Proceedings of 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, vol. 2, ISBN 951-39-1869-6, in CD-ROM, 2004.
- [18] T. Nakaki and K. Tomoeda, Numerical approach to the waiting time for the one-dimensional porous medium equation, *Quart. Appl. Math.*, 61 (2003), 601–612.
- [19] 太田隆夫：界面ダイナミクスの数理，チュートリアル：応用数理の最前線，日本評論社，1997年．
- [20] R. E. Pattle, Diffusion from an instantaneous point source with a concentration-dependent coefficient, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 12 (1959), 407–409.
- [21] L.A. Peletier. The porous media equation, Applications of nonlinear analysis in the physical sciences, H. Amann, N. Bazley and K. Kirchgässner (eds), Pitman Publishing Inc., 229–241, 1981.
- [22] S. J. Ruuth, A diffusion-generated approach to multiphase motion, *J. Comput. Phys.*, 145 (1998), 166–192.
- [23] J. A. Sethian, Level set methods, Cambridge monographs on applied and computational mathematics, Cambridge University press, 1996.
- [24] 山口昌哉，野木達夫：ステファン問題，数理解析とその周辺 17，産業図書，昭和 52 年．
- [25] S. Yotsutani, Stefan problems with the unilateral boundary condition on the fixed boundary I, *Osaka J. Math.* 19 (1982), 365–403.

# 走化性方程式系の解の爆発について

仙葉 隆 (宮崎大・工)

## 1 方程式とその背景、そして本講義の目標

単細胞生物である細胞性粘菌は、餌がなくなり飢餓状態になると集合体を形成し、あたかも多細胞生物のようになる。

1970年代に細胞性粘菌の集合体形成現象を数学モデルで記述しようとする研究が始まり、Keller と Segel [6] は偏微分方程式系として記述された数学モデルを提唱した。この数学モデルは、細胞性粘菌の密度と3種類の化学物質の濃度を未知関数とする反応拡散方程式系である。

Nanjundiah [13] は、3種類の化学物質の濃度を表す3つの未知関数を一つの未知関数に帰着させ、その方程式系の解の集中現象について考察した。

これら方程式系については、[9]に記載されているのでそちらを参照して欲しい。

Nanjundiah が考察した方程式系の特別な場合が以下の方程式系である。

$$\begin{cases} u_t = a_1 \Delta u - a_2 \nabla \cdot (u \nabla v), \\ v_t = b_1 \Delta v - b_2 v + b_3 u. \end{cases}$$

ここで、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  は正の定数とする。

変数変換

$$\frac{a_1 b_2}{b_1} t \rightarrow t, \quad \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} x \rightarrow x, \quad \frac{a_1 b_1 b_3}{a_2 b_2} u \rightarrow u, \quad \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} v \rightarrow v$$

を行い、 $\tau = (a_1 b_2)/b_1$  とおくと

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u. \end{cases}$$

となる。

さらに Nagai [8] は、 $\tau = 0$  とおいた以下の初期値境界値問題の球対称な解について、その爆発と時間大域的存在について考察した。

$$(N) \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ 0 = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

以後、上記方程式系を N 系と呼び、本講演では主に N 系の解を考察する。

本講演では、領域  $\Omega$  を滑らかな境界  $\partial\Omega$  を持つ 2 次元の有界領域とし、 $\nu = \nu(x)$  は境界上の点  $x$  における境界に対する長さ 1 の外向き単位法線ベクトルとする。また、 $u_0$  は  $\bar{\Omega}$  における滑らかな非負関数とする。

本講演の目的は、以下の事柄に関する結果とその証明の本質的な部分を紹介する事である。

- 解の時間大域的存在の十分条件
- 解の有限時刻爆発の十分条件
- 爆発解の挙動（爆発時刻における解、解の爆発速度）

例えば紹介した結果が領域とその境界における解の性質に関するものであっても、領域内部における解の性質のみの証明に止めたり、球対称な解についてのみ証明を行うなど、紹介した結果よりも制限された状況でその証明を行う。この事により、証明における本質的なアイデアとは無関係の技術的繁雑さを取り除く事ができると考えたからである。

## 2 古典解の存在、一意性、基本性質

本講演では、N 系の古典解  $(u, v)$  のみを扱う。ここで、 $(u, v)$  が  $\Omega \times (0, T)$  における N 系の古典解であるとは、以下の (i)、(ii)、(iii)、(iv) を満たす事を言う。

(i)  $u$  は  $\bar{\Omega} \times [0, T)$  で連続であり、 $\Omega \times (0, T)$  において  $t$  に関して 1 階連続的微分可能、 $x$  に関して 2 階連続的微分可能である。さらに、 $\bar{\Omega} \times (0, T)$  において  $x$  に関して 1 階連続的微分可能である。

(ii)  $v$  は  $\bar{\Omega} \times [0, T)$  で連続であり、 $\Omega \times (0, T)$  において  $x$  に関して 2 階連続的微分可能である。さらに、 $\bar{\Omega} \times (0, T)$  においても  $x$  に関して 1 階

連続的微分可能である。

(iii)  $u$  と  $v$  は  $\Omega \times (0, T)$  において N 系の第 1 式と第 2 式を満たし、 $\partial\Omega \times (0, T)$  上で第 3 式を満たす。

(iv)  $\Omega$  の各点において、 $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = u_0(x)$  を満たす。

領域  $\Omega$  上の熱方程式  $\partial_t - \Delta$  で斉次ノイマン境界条件  $\partial \cdot / \partial \nu = 0$  をみたす熱核を  $K(x, y, t)$  とおく。従って、 $\bar{\Omega}$  上の連続関数  $u_0$  と  $\bar{\Omega} \times [0, T)$  上の連続関数  $f$  に対して、

$$u(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, t-s) f(y, s) dy ds$$

$((x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T))$  は

$$u_t = \Delta u + f \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \text{ in } \Omega$$

を満たす。また、領域  $\Omega$  上の楕円方程式  $-\Delta + 1$  で斉次ノイマン境界条件  $\partial \cdot / \partial \nu = 0$  をみたすグリーン関数を  $G(x, y)$  とおく。従って、 $\bar{\Omega}$  上での連続関数  $g$  に対して、 $v(x) = \int_{\Omega} G(x, y) g(y) dy$  ( $x \in \bar{\Omega}$ ) は

$$-\Delta v + v = g \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

を満たす。

このとき、 $\Omega \times (0, T)$  における N 系の古典解  $(u, v)$  は

$$u(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, t-s) \nabla \cdot (u(y, s) \nabla v(y, s)) dy ds$$

for  $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T)$ , (1)

$$v(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y) u(y, t) dy$$

for  $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T)$  (2)

を満たし、逆に (1)、(2) を満たす  $(u, v)$  は  $\Omega \times (0, T)$  における N 系の唯一の古典解であることがわかる。

また、最大値原理から解の正值性がわかる。

これらの事をまとめた以下の事柄は、本講演では証明なしで用いる。

定理 1  $\bar{\Omega}$  上の滑らかな非負関数  $u_0$  が与えられたとき、十分小さな正定数  $T$  に対して、 $\Omega \times (0, T)$  上の N 系の古典解  $(u, v)$  が唯一存在し、 $u, v$  は  $\bar{\Omega} \times [0, T)$  において非負となる。

特に  $u_0$  が恒等的に 0 でないとき、 $u, v$  は  $\bar{\Omega} \times (0, T)$  上で正值となる。



ここで  $T_m$  を  $(u, v)$  が  $\Omega \times (0, T)$  の古典解となる  $T$  の上限とし、古典解の最大存在時刻と言う。  $T_m = \infty$  の時、  $(u, v)$  を時間大域解という。

以後、特に断らない限り  $\Omega \times (0, T_m)$  上の N 系の古典解  $(u, v)$  のみを考察の対象とし、それを単に N 系の解  $(u, v)$  と言う。また、本講演では  $u$  の挙動に注目するので、N 系の解  $(u, v)$  における  $u$  について述べる時には、単に N 系の解  $u$  と言う。

定理 2 N 系の解  $(u, v)$  は以下を満たす。

$$(1) \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} v(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx \quad (t \in [0, T_m)).$$

(2)  $T_m < \infty$  ならば、

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow T_m} \max_{x \in \bar{\Omega}} v(x, t) = \infty.$$

定理 2 の (1) は、N 系の第一式、ならびに第 2 式を  $\Omega$  上で積分し、境界条件を用いることで得られる。また、  $\sup_{(x,t) \in \Omega \times (0, T_m)} u(x, t) < \infty$  と仮定すると放物型方程式系の性質 (たとえば、 [7] 参照) より、N 系の解  $(u, v)$  が  $T_m$  を超えて延長できる。つまり、  $T_m < T$  であり、  $(u, v)$  が  $\Omega \times (0, T)$  上の N 系の解であるような  $T$  が存在し、  $T_m$  の定義に矛盾するので、(2) が成り立つ。

$T \in (0, \infty]$  に対して、解  $(u, v)$  が

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x, t) = \limsup_{t \rightarrow T_m} \max_{x \in \bar{\Omega}} v(x, t) = \infty.$$

を満たすとき、(時刻  $T$  で) 爆発するといひ、  $T$  を爆発時刻という。  $T < \infty$  の時は有限時刻爆発、  $T = \infty$  の時は無限時刻爆発という。

本講演では有限時刻爆発のみを考察し、以後単に爆発と言う。そのとき爆発時刻は  $T_m$  と一致する。

また、点  $q \in \bar{\Omega}$  と爆発解  $(u, v)$  に対し、

$$x_n \rightarrow q, \quad t_n \rightarrow T_m, \quad u(x_n, t_n) \rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たす  $\{(x_n, t_n)\} \subset \bar{\Omega} \times (0, T_m)$  が存在するとき、点  $q$  を爆発点と呼ぶ。

### 3 解の時間大域的存在

本節では、解の時間大域的存在に関する以下の結果とその証明の概略について述べる。

定理 3  $\int_{\Omega} u_0(x)dx < 4\pi$  ならば、N 系の解  $(u, v)$  は時間大域的に存在し

$$\sup_{t \geq 0} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x, t) < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} \max_{x \in \overline{\Omega}} v(x, t) < \infty \quad (3)$$

を満たす。

$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ ) で、 $u_0$  が球対称であるときは、 $\int_{\Omega} u_0(x)dx < 8\pi$  ならば、N 系の解  $(u, v)$  は時間大域的に存在し、(3) が成り立つ。

第 5 節で述べるように、解  $u$  が爆発するときは有限個の点に  $L^1$  ノルムが集中する。 $L^1$  ノルムの集中する点が領域内の点の場合、その  $L^1$  ノルムは  $8\pi$  であり、境界上の点の場合は  $4\pi$  となる。

この事から、解  $u$  の  $L^1$  ノルム  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$  が  $4\pi$  に満たなければ、爆発しない。従って、第 5 節の結果から、定理 3 が従うが、ここでは直接証明することを考える。

命題 3.1 N 系の解  $(u, v)$  が

$$\sup_{0 \leq t < T_m} \int_{\Omega} u(x, t) \log u(x, t) dx < \infty \quad (4)$$

を満たすならば、その解は時間大域解であり、(3) を満たす。

命題 3.1 の証明には、精密化されたソボレフの不等式と Moser の方法を用いる。つまり、N 系の第一式に  $u$  をかけ、 $\Omega$  上で積分し、精密化されたソボレフの不等式と (4) を用いて、 $\|u(\cdot, t)\|_2$  の有界性を示す。次に、N 系の第一式に  $u^2$  をかけ、 $\Omega$  上で積分し、 $\|u(x, t)\|_3$  の有界性を示す。この事を次々と繰り返して最終的に  $\|u(\cdot, t)\|_{\infty}$  の有界性を得る。ただし、これはアイデアの説明なので Moser の方法については [1] を、命題 3.1 の証明については [11] を参照して欲しい。

ここで  $1 \leq p \leq \infty$  に対する  $\|f\|_p$  は関数  $f$  の  $\Omega$  上の  $L^p$  ノルムを表す。

(4) の積分は、以下の積分と関係がある。

N 系の解  $(u, v)$  と  $t \in [0, T_m)$  に対して、

$$W(t) = \int_{\Omega} \left( u(x, t) \log u(x, t) - \frac{1}{2} u(x, t) v(x, t) \right) dx \quad (5)$$

とおくとき、以下が成り立つ。

補題 3.1  $N$  系の解  $(u, v)$  に対する (5) の  $W$  は以下を満たす。

$$\frac{d}{dt}W(t) + \int_{\Omega} u(x, t) |\nabla(\log u(x, t) - v(x, t))| dx = 0 \quad (0 < t < T_m).$$

補題 3.1 は、 $N$  系の第一式に  $\log u$  をかけ、 $\Omega$  上で積分し、第 2 式と境界条件を用いて示すことができる。

補題 3.1 より

$$W(t) \leq W(0) \quad (0 \leq t < T_m) \quad (6)$$

が成り立つ事がわかる。

定理 1 は、命題 3.1、(6)、そして次の Jensen の不等式と Trudinger タイプの不等式によって示される。定理の証明は [12] を参照して欲しい。[12] では、Keller-Segel 系の解を扱っているが、同様の議論によってこの定理の証明もできる。

Jensen の不等式.  $\Phi$  を  $(0, \infty)$  から  $\mathbb{R}$  への凸関数、 $f$  を  $\bar{\Omega}$  上の正值連続関数、 $g$  を  $\int_{\Omega} g(x) dx = 1$  を満たす  $\bar{\Omega}$  上の非負連続関数とする。このとき

$$\Phi\left(\int_{\Omega} f(x)g(x) dx\right) \leq \int_{\Omega} \Phi(f(x))g(x) dx$$

が成り立つ。

補題 3.2 (Trudinger タイプの不等式) 任意の  $w \in H^2(\Omega)$  に対して

$$\int_{\Omega} e^{w(x)} dx \leq K \exp\left(\frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |w(x)| dx\right)$$

が成り立つ。

また、 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ ) の時、任意の球対称な  $w \in H^1(\Omega)$  に対して

$$\int_{\Omega} e^{w(x)} dx \leq K \exp\left(\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |w(x)| dx\right)$$

が成り立つ。ここで、 $K$  は  $\Omega$  のみに依存する正定数である。

グリーン関数  $G(x, y)$  の評価. (2) で述べた斉次ノイマン境界条件を満たす  $\Omega$  上の楕円型作用素  $-\Delta + 1$  のグリーン関数  $G(x, y)$  は

$$|G(x, t)| \leq C |\log |x - y|| \quad (x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y),$$

$$|\nabla_x G(x, y)|, |\nabla_y G(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|} \quad (x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y)$$

を満たす。ここで、 $C$  は  $\Omega$  にのみ依存する正定数である。また、

$$R(x, y) = G(x, y) - \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} \quad (x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y)$$

とおくと、 $R \in C^2(\bar{\Omega} \times \Omega) \cup C^2(\Omega \times \bar{\Omega})$  を満たす。

## 4 解の有限時刻爆発

本節では、解が爆発する十分条件に関する結果とその証明の概略を説明する。

定理 4  $q \in \bar{\Omega}$  と十分小さな正定数  $R$  に対して、

$$\frac{1}{R^2} \int_{\{|x-p|<R\} \cap \Omega} u_0(x) |x - p|^2 dx < \eta, \quad \int_{\{|x-p|<R\} \cap \Omega} u_0(x) dx > 4\pi^*$$

を満たすとき、 $N$  系の解は爆発する。ここで、

$$\pi^* = \begin{cases} 2\pi & (q \in \Omega \text{ のとき}), \\ \pi & (q \in \partial\Omega \text{ のとき}). \end{cases}$$

そして正定数  $\eta$  は、 $\|u_0\|_1$  と  $\int_{\{|x-q|<R\} \cap \Omega} u_0(x) dx > 4\pi^*$  にのみ依存する定数である。

$\int_{\{|x-q|<R\} \cap \Omega} u_0(x) dx$  は、点  $q$  の近傍における  $u_0$  の  $L^1$  ノルムであり、 $\int_{\{|x-q|<R\} \cap \Omega} |x - q|^2 u_0(x) dx$  が小さいほど、その局所  $L^1$  ノルムが点  $q$  に集中している事を表している。従って、領域内部のある点に  $8\pi$  より多くの  $L^1$  ノルムが集中しているか、境界上のある点に  $4\pi$  より多くの  $L^1$  ノルムが集中していれば、解は爆発する。

定理 4 の証明のアイデアを説明するために、球対称解に関する以下の命題に対する証明の概略を説明する。

命題 4.1  $\Omega$  を原点を中心とする半径  $L$  ( $0 < L < \infty$ ) の開円盤とし、 $u_0$  は以下をみたす球対称な関数とする。

$$\int_{\Omega} u_0(x) dx > 8\pi, \quad \int_{\Omega} |x|^2 u_0(x) dx \ll 1.$$

このとき、 $N$  系の (球対称) 解は有限時刻で爆発する。

命題 4.1 を示すためには前節で述べたグリーン関数の評価と以下の球対称解に対する評価を用いる。

補題 4.1  $\Omega$  を原点を中心とする半径  $L$  ( $0 < L < \infty$ ) の開円盤とし、 $(u, v)$  を  $N$  系の球対称解とする。そのとき、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$u(x, t) \leq C \quad (\varepsilon \leq |x| \leq L, t \in [0, T_m))$$

が成り立つ。ここで、 $C$  は  $\varepsilon$ 、 $u_0$ 、 $L$  にのみ依存する正定数である。

補題 4.1 の証明は、[8] を参照して欲しい。

## 5 爆発解の挙動

本節では、以下の結果とその証明の概略を説明する。

最初に、爆発解の爆発時刻における極限について述べる。

定理 5  $(u, v)$  を  $N$  系の爆発解とすると、以下が成り立つ。

$$u(\cdot, t) \rightarrow \sum_{q \in B} m_*(q) \delta_q + f \quad \text{in } \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \quad \text{as } t \rightarrow T_m.$$

ここで、 $B \subset \bar{\Omega}$  を満たす有限個の点集合、

$$m_*(q) = \begin{cases} 8\pi & (q \in \Omega), \\ 4\pi & (q \in \partial\Omega), \end{cases}$$

$\delta_q$  は、点  $q$  にサポートを持つデルタ関数、 $f$  は  $\bar{\Omega} \setminus B$  で連続な  $\Omega$  上の  $L^1$  関数、 $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$  は  $\bar{\Omega}$  上の連続関数の空間  $C(\bar{\Omega})$  の双対空間である。

つまり、 $N$  系の爆発解  $u$  は、 $\phi \in C(\bar{\Omega})$  に対して

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx = \sum_{q \in B} m_*(q) \phi(q) + \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$$

が成り立つ。

上記の結果に対する証明は、[18] を参照して欲しい。ただし、解が爆発時刻で有限個のデルタ関数になる事、凝縮する量が  $8\pi$ 、 $4\pi$  以上である事については、[15] でも参照できる。

ここで、定理 5 の有限集合  $B$  を爆発集合と呼び、 $B$  に属する点を爆発点となる。

爆発速度を以下のように分類する。

**Type I 爆発と Type II 爆発の定義.**  $N$  系の解  $(u, v)$  が爆発し、 $q$  を爆発点とする。

全ての正定数  $C$  に対し以下が成立つとき、 $q$  における type I の爆発と言う。

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} (T_m - t) \max_{\{|x-q| \leq C\sqrt{T_m-t}\} \cap \bar{\Omega}} u(x, t) < \infty.$$

ある正定数  $C$  に対し以下が成立つとき、 $(q, T)$  における type II の爆発と言う。

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} (T_m - t) \max_{\{|x-q| \leq C\sqrt{T_m-t}\} \cap \bar{\Omega}} u(x, t) = \infty.$$

そのとき、以下が成り立つ。

**定理 6**  $N$  系の解が爆発するとき、全ての爆発点で *Type II* の爆発となる。

この結果と証明は、[14] を参照して欲しい。

定理 5 と 6 の証明のアイデアを述べるために、球対称解に限って定理を示す。証明は以下の二つに分けて行う。

**命題 5.1**  $\Omega$  を半径  $L > 0$  の開円盤とし、球対称な  $N$  系の解  $u$  が爆発する時、以下が成立つ。

$$u(\cdot, t) \rightarrow m(0)\delta_0 + f \quad \text{in } \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \text{ as } t \rightarrow T_m.$$

ただし、 $m(0)$  は  $m(0) \geq 8\pi$  を満たす定数、 $f$  は  $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  で連続な  $\Omega$  上での  $L^1$  関数である。

**命題 5.2**  $\Omega$  を半径  $L > 0$  の開円盤とし、球対称な  $N$  系の解  $u$  が爆発する時、命題 5.1 の  $m(0)$  は  $8\pi$  と一致し、 $x = 0$  で *Type II* の爆発となる。

## 6 関連する話題

本講演では放物型-楕円型方程式系である N 系を扱ったが、N 系で得られた結果の多くが放物型-放物型方程式系である以下の方程式系

$$(KS) \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

についても成り立つ。ここで、 $\tau$  は正定数であり、 $u_0$  は  $\bar{\Omega}$  における滑らかな非負関数とする。領域  $\Omega$ 、その境界  $\partial\Omega$ 、 $u_0$  についての仮定は、N 系の場合と同様とする。

以後、上記方程式系を Keller-Segel 系と呼ぶ。

例えば、第 2 節で述べた解の存在、一意性、定理 2 が成り立つ。ただし、定理 2 の (1) における  $v$  の  $L^1$  ノルムは

$$\|v(\cdot, t)\|_1 = (1 - e^{-t/\tau})\|u_0\|_1 + e^{-t/\tau}\|v_0\|_1$$

となる。

第 3 節で述べた定理 3 も成り立つ。ここで、Keller-Segel 系の  $W(t)$  は

$$W(t) = \int_{\Omega} \left\{ u(x, t) \log u(x, t) - u(x, t)v(x, t) + \frac{1}{2} (|\nabla v(x, t)|^2 + v(x, t)^2) \right\} dx$$

となり、補題 3.1 の等式は

$$\frac{d}{dt}W(t) + \tau \int_{\Omega} (v_t(x, t))^2 dx + \int_{\Omega} u(x, t) |\nabla(\log u(x, t) - v(x, t))| dx = 0 \quad (0 < t < T_m).$$

と修正される。

しかし、第 4 節の定理 4 は、[16]、ならびに [10] で示された結果である。Keller-Segel 系の解に対して、定理 4 のような爆発の十分条件はまだ知られていない。

[5] では (6) の  $W(0)$  を用いて Keller-Segel 系の解が爆発する十分条件が述べられており、この事は N 系についても同様に成り立つ。しかし、ここで得られた爆発解の爆発時刻が有限なのか無限なのかの判定がつかない。

また、第 5 節の定理 5 は Keller-Segel 系の場合は、有限時刻で爆発し、「爆発点が有限個」であれば定理 5 が成り立つ ([11])。ただし、この場合

の  $m_*(q)$  は「 $q$  が領域の点ならば  $8\pi$  以上、 $q$  が境界上の点ならば  $4\pi$  以上」である事しかわからない。N 系の場合、「爆発点の有限性」は N 系の解については示されているが、Keller-Segel 系の解については得られていない。ただし、Keller-Segel 系の場合も、「球対称解の爆発点は領域の中心に限る」(補題 4.1) が成り立つので、Keller-Segel 系についても命題 5.1 は成り立つ。また、Keller-Segel 系の解の爆発速度について、定理 6 に対応するような定性的な性質は得られていない。ただし、Type II の爆発を起こす球対称解の存在は得られている ([3])。

また、そのほかのタイプの走化性方程式も含めてそれらの数学的な研究をまとめたものとして [4] が参考になる。

## 参考文献

- [1] N.D. Alikakos,  *$L^p$  bounds of solutions of reaction-diffusion equations*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 4 (1979), 827-868.
- [2] M.A. Herrero, and J.J.L. Velázquez, *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann., Vol. 306 (1996), 583-623.
- [3] M.A. Herrero, and J.J.L. Velázquez, *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV, Vol. 35 (1997), 633-683.
- [4] D. Horstmann, *From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. I*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., Vol. 105 (2003), 103-165.
- [5] Horstmann, D., Wang, G., *Blowup in a chemotaxis model without symmetry assumptions*, European J. Appl. Math. 2 (2001), 159-177.
- [6] E.F. Keller, and L.A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol., Vol. 26 (1970), 399-415.
- [7] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Uralt'seva, *"Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type"*, Nauka, Moscow, 1967: English translation; Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.



- [8] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 5 (1995), 581-601.
- [9] 永井 敏隆, 走化性モデルにおける集中現象, 非線形・非平衡現象の数理 3 爆発と凝縮 第3章, (2006), 99-144.
- [10] T. Nagai, *Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, J. Inequal. Appl., Vol. 6 (2001), 37-55.
- [11] T. Nagai, T. Senba, and T. Suzuki, *Concentration behavior of blow-up solutions for a simplified system of chemotaxis*, Hiroshima Math. J. Vol. 30 (2000), 463-497.
- [12] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funckcial. Ekvac., Vol. 40 (1997), 411-433.
- [13] V. Nanjundiah, *Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology*, J. Theor. Biol., Vol. 42 (1973), 63-105.
- [14] T. Senba, *Type II blowup of solutions to a simplified Keller-Segel system in two dimensional domains*, Nonlinear Ana., to appear.
- [15] T. Senba, and T. Suzuki, *Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology*, Adv. Differential Equations, Vol. 6 (2001), 21-50.
- [16] T. Senba, and T. Suzuki, *Parabolic system of chemotaxis: blowup in a finite and the infinite time*, Met. Appl. Ana., Vol. 8 (2001), 349-368.
- [17] T. Senba, and T. Suzuki, *Blowup behavior of solutions to rescaled Jäger-Luckhaus system*, Adv. Differential Equations, Vol. 8 (2003), 787-820.
- [18] T. Suzuki, "Free Energy and Self-Interacting Particles", Birkhäuser, Boston, 2005.

# 平均曲率流の近似問題について\*

## (粘性解理論の応用)

石井 克幸 (神戸大学海事科学部)

**概要.** 本講演では Bence, Merriman, Osher によって考案された平均曲率流に対する近似アルゴリズムの概要を紹介する. 等高面の方法と粘性解理論を用いた平均曲率流の広義解について述べた後, 彼らの近似アルゴリズムの数学的正当性を平均曲率流の広義解と粘性解理論を用いて簡単に説明する.

## 1 序

$\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) における超曲面の族とする. この族が**平均曲率流**であるとは  $\Gamma(t)$  の運動方程式が

$$(1.1) \quad V = \kappa \quad \text{on } \Gamma(t), \quad t > 0$$

で与えられるときを言う.  $V = V(t, x)$  は  $x \in \Gamma(t)$  における法線方向速度,  $\kappa = \kappa(t, x)$  は  $x \in \Gamma(t)$  における平均曲率の  $(N - 1)$ -倍である. この方程式を**平均曲率流方程式**と言う<sup>1</sup>.

平均曲率流方程式が最初に現れたのは材料科学の分野で, Mullins [34] によって金属を焼きなます際の粒界の運動を記述するために提案された. また, 相転移現象に現れる界面の運動はその平均曲率に従うことが Allen - Cahn [1] によって形式的に示され, その数学的証明が多くの人々によって与えられている ([12, 15, 10] etc.). 近年では画像処理への応用も研究されている ([10, 3, 2] etc.). 一方, 滑らかな平均曲率流に関する研究 ([26, 20, 24] etc.) や広義解の理論 ([8, 13, 18] etc.), 特異性の解析 ([25, 27, 4, 28] etc.) 等, 数学的な結果も非常に多い. このように平均曲率流は純粋・応用両方の数学で重要な研究対象の 1 つであり, 今でも活発に研究が進められている.

上述のような応用面において, 平均曲率流の数値解析が大事な役割を果たしていることは言うまでもなく, 多くの人々によってその研究が行われている. ここではその中の 1 つである, Bence, Merriman, Osher の 3 氏によって考案された数値計算アルゴリズム ([7] を参照. 本講演では BMO アルゴリズムと呼ぶことにする) の概要を紹介したい.

以下では特に断らない限り, 「コンパクトな超曲面」と言えば, 境界を持たないことも仮定する.

---

\*2006 年 12 月 13 日 非線形数理冬の学校「発展方程式系の解の挙動」— 反応拡散方程式理論の最先端— (於 東京工業大学)

<sup>1</sup> $\mathbb{R}^2$  において  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は滑らかな曲線の族になる. このとき (1.1) は曲線短縮方程式とも呼ばれる.

## 2 平均曲率流に対する等高面の方法と粘性解

まず, 平均曲率流に関して簡単な例を挙げよう.

**例 2.1**  $\Gamma(0)$  が半径  $R_0$  の  $(N - 1)$  次元球面とし, これを初期曲面とする平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を考える.  $\Gamma(0)$  上の平均曲率は一定なので  $\Gamma(t)$  も球面になると考えられる. その半径を  $R = R(t)$  とおくと内向き法線方向速度は  $V = -dR/dt$  であり, 平均曲率は  $(N - 1)/R$  であることから (1.1) は常微分方程式

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{N-1}{R} \quad (t > 0)$$

となる.  $R(0) = R_0$  の条件の下でこれを解くと,  $\Gamma(t)$  は  $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2(N-1)t}$  を半径とする  $(N-1)$  次元球面であることがわかる. 特に  $N = 2$  のときは半径  $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}$  の円周になる.  $t_0 = R_0^2/2(N-1)$  のとき, 球面や円周の半径は 0 となり, 1 点に縮む.

**例 2.2**  $N = 3$  とする.  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^3$  を  $x_3$  軸を中心とし, 断面の半径が  $R_0$  である円柱面  $\Gamma(0) := \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x'| = R_0\}$  とする. これを初期曲面とする平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を考える. 上の例と同様な理由で  $\Gamma(t)$  は  $x_3$  軸を中心とする円柱面となり, 断面の半径を  $R = R(t)$  とすると (1.1) は

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R} \quad (t > 0)$$

となる.  $R(0) = R_0$  の条件の下でこれを解くと,  $\Gamma(t)$  は  $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}$  を断面の半径とする円柱面となる.  $t_0 = R_0^2/2$  のとき,  $\Gamma(t)$  は  $x_3$  軸に縮む.

さて, 一般の滑らかな平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  を考えよう. その時間局所的な一意存在は放物型偏微分方程式の標準的な方法で示すことができる. また, 以下の結果はよく知られている.

**定理 2.1** (Gage - Hamilton [20], Grayson [24])

$\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^2$  を滑らかな単純閉曲線とする. このとき,  $\Gamma(0)$  を初期曲線とする平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  はある時刻で凸になり, その後有限時刻で 1 点に収縮する.

**定理 2.2** (Huisken [26])

$\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) を凸で滑らかでコンパクトな超曲面とする. このとき,  $\Gamma(0)$  を初期曲面とする平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は凸性を保ちながら有限時刻で 1 点に収縮する.

**注意 2.1** [26, 20] は  $\Gamma(t)$  の縮み方にまで言及している. 興味のある方は参照して欲しい.

上の 2 つの定理を眺めると,  $N \geq 3$ ,  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^N$  が凸とは限らないコンパクトな超曲面の場合に  $\Gamma(0)$  を初期曲面とする平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は凸になって 1 点に収縮するか? という問題が考えられる. これは Grayson [25] によって必ずしも成り立たないことが示された.  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^3$  を軸対称でハンドルの部分が非常に細いバーベル形の超曲面とする.

この  $\Gamma(0)$  を初期曲面とする平均曲率流  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は全体が 1 点に収縮する前にハンドルの部分でちぎれ, 特異点が発生する (図 2.1 参照).

特異点が生じた後,  $\Gamma(t)$  は 2 つの曲面として別々に平均曲率に従って動くと考えられる. 特異点が生じた後の運動も  $\Gamma(0)$  を初期曲面とする一連のプロセスと捉えようとする, 特異点が生じた後の平均曲率流の接続が問題となる. 特異性を生じた後の解を接続するには, 通常は何らかの意味での弱解の概念を用いる. その 1 つの方法が**等高面の方法**と呼ばれるものであり, Chen - Giga - Goto [13], Evans - Spruck [18] によって独立に提案された.

等高面の方法の基本的な考え方は  $\Gamma(t)$  をある補助関数  $u = u(t, x)$  の 0-等高面と見做して (1.1) を  $u$  の満たす方程式に書き換えた後, それを  $\mathbb{R}^N$  全体に拡張することである (詳細は Giga [21], 儀我 - 陳 [22] 等を参照).

$u$  を  $\Gamma(t)$  上では 0,  $\Gamma(t)$  の内側では正, 外側では負としておく. このとき,  $x \in \Gamma(t)$  における内向き法線ベクトル  $n = n(t, x)$  とこの方向に関する速度  $V = V(t, x)$  はそれぞれ

$$n(t, x) = \frac{Du(t, x)}{|Du(t, x)|}, \quad V(t, x) = -\frac{u_t(t, x)}{|Du(t, x)|}$$

となる. ここで  $Du$  は  $u$  の勾配である. このとき,  $x \in \Gamma(t)$  において  $n = n(t, x)$  に関する平均曲率  $\kappa = \kappa(t, x)$  は

$$\kappa(t, x) = -\operatorname{div} n(t, x) = -\operatorname{div} \left( \frac{Du(t, x)}{|Du(t, x)|} \right)$$

となるので (1.1) に代入すると,

$$\frac{u_t}{|Du|} = \operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right) \quad \text{on } \Gamma(t), \quad t > 0$$

が得られる. 両辺を  $|Du|$  倍し,  $t > 0$  で  $\mathbb{R}^N$  全体に拡張したものを考えると, 以下の方程

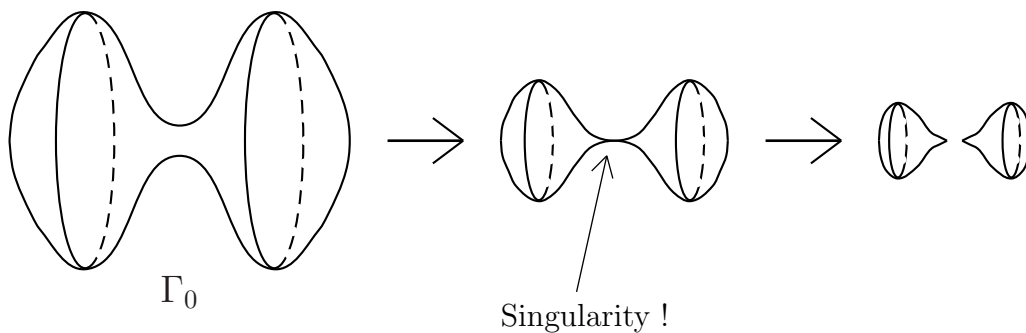


図 2.1

式が得られる.

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_t &= |Du| \operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right) = \operatorname{tr} \left\{ \left( I - \frac{Du \otimes Du}{|Du|^2} \right) D^2u \right\} \\ &= \Delta u - \left\langle D^2u \left( \frac{Du}{|Du|} \right), \left( \frac{Du}{|Du|} \right) \right\rangle \quad \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

但し,  $D^2u$  は  $u$  の Hessian であり,  $\operatorname{tr} A$  は行列  $A$  の trace である. これを (1.1) に対する **等高面方程式** という.

等高面方程式を用いた  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  の構成は以下のようになされる.  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^N$  をコンパクトな超曲面とし, 関数  $g \in C(\mathbb{R}^N)$  を

$$(2.2) \quad f(x) \begin{cases} > 0 & x \in (\Gamma(0) \text{ の内側}), \\ = 0 & x \in \Gamma(0), \\ < 0 & x \in (\Gamma(0) \text{ の外側}), \end{cases}$$

を満たすように取る. そこで初期値問題

$$(2.3) \quad u_t + F(Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}^N,$$

$$(2.4) \quad u(0, x) = f(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$(2.5) \quad F(p, X) := -\operatorname{tr} \left\{ \left( I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right\}$$

を解き, その解  $u$  を用いて  $\Gamma(t) := \{x \mid u(t, x) = 0\}$  とおけばよい. このようにして作った  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は (1.1) に対する **広義解** と呼ばれる<sup>2</sup>.

(1.1) に対する広義解を得るには

**問題 1** 初期値問題 (2.3) - (2.4) の時間大域解の一意存在

**問題 2**  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  の定義の正当性

という問題点がある. これらについて見ていこう.

**問題 1** について

(2.5) で定義される  $F$  は

$$F(p, X + Y) \leq F(p, X) \quad \text{for all } p \in \mathbb{R}^N, X, Y \in \mathbb{S}^N, Y \geq O,$$

を満たすことがわかる. ここで  $\mathbb{S}^N$  は  $N$  次実対称行列の全体であり,  $Y \geq O$  は  $Y$  が半正定値行列であることを表す. この不等式が成り立つとき,  $F$  は **退化楕円型** であるという. 一般に, 退化した方程式には古典解の存在が期待できないので, 解の一意存在を考えるためには弱解の概念が必要である<sup>3</sup>. 更にその定義から  $F$  は **発散形ではない** ので部分積分を

<sup>2</sup>例 2.1, 2.2 のように有限時間で収縮する場合, その後の  $\Gamma(t)$  は空集合と定義する.

<sup>3</sup>(2.3) の退化性については次節で述べる.

基にした超関数の意味での弱解を考えることはできない. このような方程式に対する一意可解性を考えるために粘性解の概念を導入する.

粘性解の定義を与えるために記号を用意する.  $U$  を距離空間またはその部分集合とし,  $V$  を稠密な  $U$  の部分集合とする. このとき, 関数  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  に対して  $f$  の上半連続包  $f^*$ , 下半連続包  $f_*$  をそれぞれ

$$f^*(x) := \limsup_{V \ni y \rightarrow x} f(y), \quad f_*(x) := \liminf_{V \ni y \rightarrow x} f(y)$$

で定義する.

**定義 2.1**  $u : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を有界な関数とする.

- (1)  $u$  が (2.3) の粘性劣解であるとは, 任意の  $\varphi \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  に対して  $u^* - \varphi$  が  $(t_0, x_0)$  で極大値を取るならば,

$$\varphi_t(t_0, x_0) + F_*(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0)) \leq 0$$

を満たすときを言う.

- (2)  $u$  が (2.3) の粘性優解であるとは, 任意の  $\varphi \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  に対して  $u_* - \varphi$  が  $(t_0, x_0)$  で極小値を取るならば,

$$\varphi_t(t_0, x_0) + F^*(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0)) \geq 0$$

を満たすときを言う.

- (3)  $u$  が (2.3) の粘性解であるとは, 粘性劣解, かつ粘性優解であるときを言う.

**注意 2.2** (1) (2.3) に現れる  $F$  は  $F \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^N)$  であり,  $p = 0$  で定義できない. しかし, 各  $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$  に対して  $F^*(p, X), F_*(p, X)$  は有限値なので, これを用いることにより粘性解が定義できる. 実際,  $p \neq 0$  のときは  $F^*(p, X) = F_*(p, X) = F(p, X)$  となり,  $p = 0$  の場合は

$$F^*(0, X) = - \inf_{|\nu|=1} \text{tr}\{(I - \nu \otimes \nu)X\}, \quad F_*(0, X) = - \sup_{|\nu|=1} \text{tr}\{(I - \nu \otimes \nu)X\}$$

となる.

(2) 粘性劣解の定義において, 「極大値」は「狭義極大値」, 「最大値」, 「狭義最大値」に置き換えてもよい. 同様のことが粘性優解の場合にも言える.

(3) 粘性解理論には Crandall - Ishii - Lions [14], Fleming - Soner [19], Barles [5], Koike [32] 等優れた成書があるので興味のある方はこれらを勉強されたい.

初期値問題 (2.3) - (2.4) の時間大域解の一意存在は粘性解理論を用いて, 以下のように述べられる.  $BC(\mathbb{R}^N), BC([0, T] \times \mathbb{R}^N)$  をそれぞれ  $\mathbb{R}^N, [0, T] \times \mathbb{R}^N$  上で有界かつ連続な関数全体とする.

**定理 2.3** (1)  $u, v : [0, T) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  をそれぞれ (2.3) の有界な粘性劣解, 粘性優解とする. このとき,  $u^*(0, \cdot) \leq v_*(0, \cdot)$  in  $\mathbb{R}^N$  ならば,  $u^* \leq v_*$  in  $[0, T) \times \mathbb{R}^N$  である.

(2) 任意の  $f \in BC(\mathbb{R}^N)$  に対して (2.3) - (2.4) の粘性解  $u = u(t, x)$  が唯一つ存在し,  $u \in BC([0, T) \times \mathbb{R}^N)$  である.

この定理の証明は Chen - Giga - Goto [13], Evans - Spruck [18] を参照のこと.

### 問題 2 について

$g \in BC(\mathbb{R}^N)$  を (2.2) を満たすものとする. このとき, 初期値問題 (2.3) - (2.4) に対する粘性解  $u$  を用いて 0-等高面  $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(t, x) = 0\}$  が定義できるが, これは初期条件  $f$  の選び方に依存している可能性がある. 一方, 平均曲率流は初期曲面  $\Gamma(0)$  によってのみ定まることから,  $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(t, x) = 0\}$  が (1.1) に対する広義解と言えるには, それが  $f$  の選び方には依らないことを示す必要がある. そのために, この問題に特有な幾何学的と呼ばれる以下の性質を用いる.

$$(2.6) \quad F(\lambda p, \lambda X) = \lambda F(p, X) \quad (\lambda > 0), \quad F(p, X + \mu p \otimes p) = F(p, X) \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

これを使うと  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  の定義の正当性を示す次の定理が得られる.

**定理 2.4**  $f, g \in BC(\mathbb{R}^N)$  を  $\Gamma(0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid g(x) = 0\}$  を満たすとする.  $u, v \in BC([0, T) \times \mathbb{R}^N)$  をそれぞれ  $u(0, x) = f(x)$ ,  $v(0, x) = g(x)$  を満たす (2.3) の粘性解とする. このとき,

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(t, x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid v(t, x) = 0\} \quad \text{for all } t \in [0, T).$$

定理 2.4 によって (1.1) に対する広義解が定義できることが言えた. ところで, 初期値問題 (2.3) - (2.4) の解の 0-等高面は超曲面とは限らない. つまり, 内点を持つこともあり得る. これは等高面の方法が提案されて以来, 重要な問題となっている.  $\Gamma(t)$  が内点を持つときを肥満化, 肥満現象などと言う. 肥満化については起こる場合も起こらない場合も研究されているが, 本講演では深入りしないことにする.

## 3 BMO アルゴリズム

この講演の主目的である, BMO アルゴリズムを紹介しよう.

$\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^N$  を滑らかでコンパクトな超曲面,  $C_0 \subset \mathbb{R}^N$  を  $\partial C_0 = \Gamma(0)$  となるコンパクト集合とし,  $0 < h \ll 1$  は時間刻み幅とする. そこで,  $u^0 = u^0(t, x)$  を以下のような熱方程式に対する初期値問題の解とする.

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } (0, h] \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1 & x \in C_0, \\ -1 & x \in \mathbb{R}^N \setminus C_0 \end{cases} \end{cases}$$



$u^0$  を用いて  $C_1$  を

$$C_1 := \{x \in \mathbb{R}^N \mid u^0(h, x) \geq 0\}$$

と定義する. 次に,  $u^1 = u^1(t, x)$  を

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } (0, h] \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1 & x \in C_1, \\ -1 & x \in \mathbb{R}^N \setminus C_1 \end{cases} \end{cases}$$

の解とし,  $C_2$  を

$$C_2 := \{x \in \mathbb{R}^N \mid u^1(h, x) \geq 0\}$$

と定義する.

以下, 帰納的にこの操作を繰り返すことにより, コンパクト集合列  $\{C_k\}_{k=0,1,\dots}$  を得る. これを用いて

$$C^h(t) := C_k, \Gamma^h(t) := \partial C^h(t) \quad \text{if } kh \leq t < (k+1)h, \quad k = 0, 1, \dots$$

とする. このとき形式的には各  $t \in [0, T)$  に対して

$$C^h(t) \longrightarrow C(t), \Gamma^h(t) \longrightarrow \Gamma(t) := \partial C(t) \quad (h \rightarrow 0)$$

となり,  $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$  は  $\Gamma(0)$  を初期値とする平均曲率流となる. 以上が BMO アルゴリズムの概要である.

このアルゴリズムには 2 つの特徴がある. 1 つ目は近似曲面を構成するのに, 普通の熱方程式を用いていることである. このため, 近似曲面  $\{\Gamma^h(t)\}_{t \geq 0}$  は (少なくとも数学的には) 簡単に構成できる. 2 つ目は (3.1) での初期条件の選び方にある. (2.1) の最後の等式に現れる

$$(3.2) \quad \left\langle D^2 u \left( \frac{Du}{|Du|} \right), \left( \frac{Du}{|Du|} \right) \right\rangle$$

は  $u$  の等高面  $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(t, x) = c\}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) の法線方向への拡散を示している. 従って, (2.3) は  $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(t, x) = c\}$  の法線方向に退化した方程式である<sup>4</sup>. (3.2) を落とすと (2.3) は普通の熱方程式になるが, 初期条件を (3.1) で課されたように選ぶことで, 短い時間幅  $(0, h)$  では (3.2) による退化性と同等の効果が熱方程式に生じる. 同時に, この場合の  $\Delta u$  は  $\Gamma^h(t)$  の平均曲率になっている. 時刻  $h$  毎に初期条件を取り替えるのはこの効果を持続させるためである.

BMO アルゴリズムが平均曲率流の近似を与えることを見ていきたいが, まずは形式的に考えてみよう. 簡単のため,  $\Gamma(0)$  を  $\mathbb{R}^2$  における滑らかな単純閉曲線とする.  $\Gamma(0)$  上の 1 点を固定し,  $O$  とする.  $O$  を原点として図 2.2 のような直交座標系を考える. 更に  $O$  の近傍では  $\Gamma(0)$  は  $x_2 = \kappa x_1^2 / 2$  ( $\kappa > 0$ ) の形に表されているとする. このとき  $\kappa$  は  $O$  における  $\Gamma(0)$  の曲率であることに注意しておく.

<sup>4</sup>(2.6) の 2 番目の式がこれに対応している.



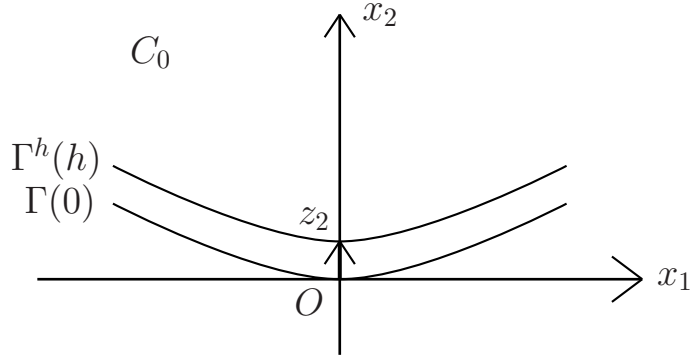


図 2.2 :  $\Gamma_0 : x_2 = \frac{1}{2}\kappa x_1^2$  ( $\kappa > 0$ )

初期値問題 (3.1) の解  $u^0$  の  $t = h$  での値は

$$(3.3) \quad u(h, x) = \int_{C_0} E(h, x - y) dy - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus C_0} E(h, x - y) dy$$

で与えられる. 但し,  $E = E(t, x)$  は熱核である.  $u(h, x) \geq$  (resp.,  $<$ )  $0$  は

$$\begin{aligned} & \text{(密度 } E(h, x - \cdot) \text{ を用いた } C_0 \text{ の面積)} \\ & \geq \text{(resp., } < \text{) (密度 } E(h, x - \cdot) \text{ を用いた } \mathbb{R}^2 \setminus C_0 \text{ の面積)} \end{aligned}$$

と解釈できる. この「面積を比べる」という観点では, 密度は熱核でなくてもよいので, 話を簡単にするためにも  $E$  を

$$(3.4) \quad E(h, x - y) \rightarrow \frac{1}{6h} \chi_{B(x, \sqrt{6h})}(y)$$

に置き換えて積分したものを考える. つまり,

$$(3.5) \quad u^0(t, x) \rightarrow \frac{1}{6h} |C_0 \cap B(x, \sqrt{6h})| - \frac{1}{6h} |(\mathbb{R}^2 \setminus C_0) \cap B(x, \sqrt{6h})|$$

と置き換える. ここで  $\chi_A$  は集合  $A$  に対する定義関数,  $|A|$  は  $A \subset \mathbb{R}^2$  の面積を表す.  $\kappa > 0$  と仮定しているので,

$$|C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})| < |(\mathbb{R}^2 \setminus C_0) \cap B(O, \sqrt{6h})|$$

は明らかである. このとき, 点  $O$  が時刻  $h$  には

$$(3.6) \quad \begin{aligned} |C_0 \cap B((0, z_2), \sqrt{6h})| &= |(\mathbb{R}^2 \setminus C_0) \cap B((0, z_2), \sqrt{6h})| \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^2(B(O, \sqrt{6h})) \end{aligned}$$

を満たす  $x_2$  軸上の点  $(0, z_2)$  に移動したと考えるとその速度  $V = z_2/h$  を求めてみる.

図 2.3 より 2 つの領域  $C_0 \cap B((0, z_2), \sqrt{6h})$ ,  $C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})$  の面積の差は 2 曲線  $\Gamma(0)$ ,  $\Gamma^h(h)$  と 2 つの円周で囲まれた部分のそれに等しく,

$$|C_0 \cap B((0, z_2), \sqrt{6h})| - |C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})| \simeq 2\sqrt{6}z_2\sqrt{h}.$$

と評価できる. 一方, (3.6) と図 2.3 より

$$\begin{aligned} & |C_0 \cap B((0, x_2), \sqrt{6h})| - |C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})| \\ &= \frac{1}{2}|B(O, \sqrt{6h})| - |C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})| \\ &= |\{x_2 \geq 0\} \cap B((0, z_2), \sqrt{6h})| - |C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})|, \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} & |\{x_2 \geq 0\} \cap B((0, z_2), \sqrt{6h})| - |C_0 \cap B(O, \sqrt{6h})| \\ & \simeq \int_{-\sqrt{6h}}^{\sqrt{6h}} \frac{1}{2}\kappa x_1^2 dx_1 = 2\sqrt{6}\kappa h^{3/2}. \end{aligned}$$

に注意すると,  $2\sqrt{6}z_2\sqrt{h} \simeq 2\sqrt{6}\kappa h^{3/2}$  となる. 従って

$$(3.7) \quad V = \frac{z_2}{h} = \kappa + o(1) \quad (h \rightarrow 0)$$

を得る.

上で述べたことを各  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) について考えると  $\Gamma^h(t)$  ( $:= \partial C_k, kh \leq t < (k+1)t$ ) は (近似的には) 曲率に従って動いていると言える.

今度は BMO アルゴリズムの収束について厳密な形で述べよう. そのために前節で導入した等高面の方法を用いる.  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^N$  をコンパクトな超曲面とし,  $\{\Gamma(t)\}_{0 \leq t < T}$  を前節で定義した (1.1) の広義解とする.

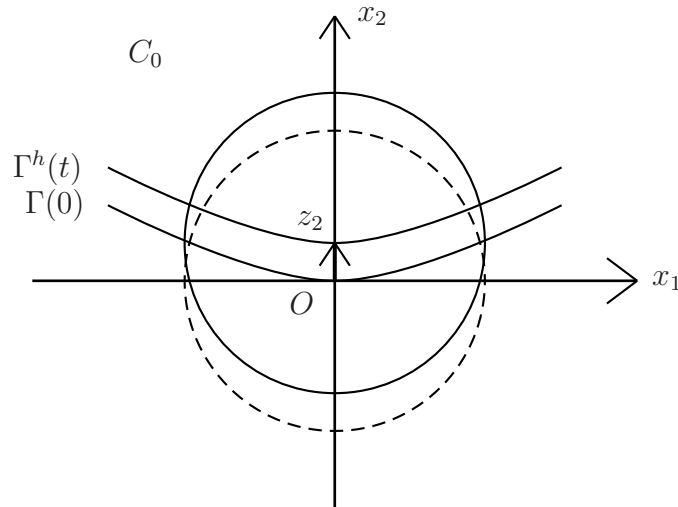


図 2.3: 実線は  $(0, z_2)$  を中心とする円周, 破線は  $O$  を中心とする円周. 半径はいずれも  $\sqrt{6h}$ .

**定理 3.1** 各  $t \geq 0$  に対して  $\Gamma(t)$  が超曲面ならば, 任意の  $T' \in (0, T)$  に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T']} d_H(\Gamma^h(t), \Gamma(t)) = 0.$$

が成り立つ.

**注意 3.1** (1) 前節の最後で触れたように  $\Gamma(t)$  は肥満化することがある. 「 $\Gamma(t)$  が超曲面」という仮定をおくことで  $\Gamma(t)$  が肥満化している場合を排除している.

(2)  $d_H(A, B)$  は集合  $A, B \subset \mathbb{R}^N$  に対する Hausdorff 距離であり,

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in B} \text{dist}(x, A), \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B) \right\}$$

で定義される.

定理 3.1 の証明の方針はその前で述べた形式的な考察を数学的に正当化すればよい. そのためのアイデアを Evans [17] に従って述べよう.

$\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^N$  をコンパクトな超曲面,  $C_0 \subset \mathbb{R}^N$  を  $\partial C_0 = \Gamma(0)$  となるコンパクト集合とする. このとき, 定理 2.4 より  $\Gamma(t) = \mathcal{M}(t)\Gamma(0)$  となる作用素の族  $\{\mathcal{M}(t)\}_{t \geq 0}$  が定義できる. また,  $C(0) := C_0$  から  $\Gamma(t)$  を境界とするコンパクト集合  $C(t)$  を対応させる写像も同じ記号を使って,  $C(t) = \mathcal{M}(t)C_0$  とおく<sup>5</sup>. コンパクト集合  $C \subset \mathbb{R}^N$  に対し, 作用素  $\mathcal{H}_h$  を

$$\mathcal{H}_h C := \{x \in \mathbb{R}^N \mid v(h, x) \geq 0\}$$

とする. ここで,  $v$  は熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} v_t = \Delta v & \text{in } (0, h] \times \mathbb{R}^N, \\ v(0, x) = \begin{cases} 1 & x \in C, \\ -1 & x \in \mathbb{R}^N \setminus C \end{cases} \end{cases}$$

の解である. すると  $C_k$  は

$$C_k = (\mathcal{H}_h)^k C_0 := \underbrace{(\mathcal{H}_h \circ \cdots \circ \mathcal{H}_h)}_{k \text{ times}} C_0$$

と表すことができ, 今までの形式的な考察から

$$(3.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0, kh \rightarrow t} (\mathcal{H}_h)^k C_0 = \mathcal{M}(t)C_0.$$

となることが期待できる. よって作用素  $\mathcal{H}_h$  の性質を調べればよさそうである. しかし,  $\mathbb{R}^N$  のコンパクト集合の族が定義域となる作用素の解析はやりにくそうである. そこで等高面の方法を用いて  $\mathcal{M}(t)$ ,  $\mathcal{H}_h$  の代用となる作用素を関数空間上に定義することを考える.

<sup>5</sup>このようにしても以後の議論には支障がないであろう.

まず,  $M(t)$  に代わる作用素を定義する.  $BUC(\mathbb{R}^N)$  を  $\mathbb{R}^N$  上で有界, かつ一様連続な関数の全体とし,

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|$$

によってノルムを定義する.  $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$  を

$$(3.9) \quad f(x) \begin{cases} > 0 & x \in \text{int}(C_0), \\ = 0 & x \in \Gamma(0), \\ < 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus C_0, \end{cases}$$

となるように取る. ここで  $C_0 \subset \mathbb{R}^N$  は  $\Gamma(0) = \partial C_0$  となるコンパクト集合.  $u \in BUC([0, T) \times \mathbb{R}^N)$  を (2.3) - (2.4) の粘性解とすると,  $u(t, x) = [M(t)f](x)$  となる作用素の族  $\{M(t)\}_{t \geq 0}$  が定義できる.

$\mathcal{H}_h$  の代用となる作用素を次のように定義する.  $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$  に対して

$$[H_h f](x) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid E(h, \cdot) * \chi_{[f \geq \lambda]}(x) \geq E(h, \cdot) * \chi_{[f < \lambda]}(x)\}$$

とおく. 但し,  $[f \geq \lambda] := \{y \in \mathbb{R}^N \mid f(y) \geq \lambda\}$ ,  $[f < \lambda] := \{y \in \mathbb{R}^N \mid f(y) < \lambda\}$ . このとき,  $H_h : BUC(\mathbb{R}^N) \rightarrow BUC(\mathbb{R}^N)$  は次の性質をもつ.  $f_1, f_2, f \in BUC(\mathbb{R}^N)$  に対して

(1-i)  $f_1 \leq f_2$  in  $\mathbb{R}^N$  ならば,  $H_h f_1 \leq H_h f_2$  in  $\mathbb{R}^N$ .

(1-ii)  $c \in \mathbb{R}$  とすると  $H_h(f + c) = H_h f + c$ .

(1-iii)  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を BMO アルゴリズムで構成したコンパクト集合とし,  $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$  を (3.9) を満たすように取ると,

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^N \mid [(H_h)^k f](x) \geq 0\}.$$

最初の 2 つの性質より, 以下が得られる.

(2-i)  $\|H_h f_1 - H_h f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$ .

(2-ii)  $\|H_h f\| \leq \|f\|$ .

これらの性質に注目すると (3.8) の代わりに次の定理を証明すれば, 定理 3.1 が示せそうである.

**定理 3.2**  $[0, T) \times \mathbb{R}^N$  上で広義一様に

$$(3.10) \quad \lim_{h \rightarrow 0, kh \rightarrow t} [(H_h)^k g](x) = [M(t)g](x) = u(t, x).$$

が成り立つ.

従って  $\mathcal{H}_h$  の代わりに  $H_h$  を解析すればよいことがわかるだろう. そこで次の補題を証明しよう.

**補題 3.1**  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $z \in \mathbb{R}^N$ ,  $\varepsilon > 0$  とし,  $D\varphi(z) \neq 0$  と仮定する. このとき,  $\delta > 0$  が存在して以下が成り立つ: 任意の  $x \in B(z, \delta)$ ,  $h \in (0, \delta]$  に対して

$$(3.11) \quad H_h\varphi(x) \leq \varphi(x) + (-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) + \varepsilon)h,$$

$$(3.12) \quad H_h\varphi(x) \geq \varphi(x) + (-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) - \varepsilon)h.$$

ここで  $F$  は (2.5) で定義されたものである.

(3.11), (3.12) をまとめると

$$\frac{H_h\varphi(x) - \varphi(x)}{h} \simeq -F(D\varphi(z), D^2\varphi(z))$$

となる. この式を見ると上の補題は定理 3.1 の前で述べた (3.7) の解析的表現と言える. また半群理論の観点からは,  $H_h$  の generator が  $F$  であることを言っている. ここでは Ishii [29, Theorem 3.1] に沿って証明の概略を述べる.

**補題 3.1 の証明の概略.** (3.12) も同様に示せるので, (3.11) のみを証明する. 簡単のため,  $N = 2$ ,  $z = 0$ ,  $a = -F(D\varphi(0), D^2\varphi(0))$  とする. 更に  $H_h$  の定義において,  $E$  を (3.4) のように置き換える.

$H_h$  の定義より, 示すべきは以下の事柄である: ある  $\delta > 0$  が存在し, 任意の  $x \in B(z, \delta)$ ,  $h \in (0, \delta]$  に対して

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{6h} |\{z \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(z) \geq \varphi(x) + (a + \varepsilon)h\} \cap B(x, \sqrt{6h})| \\ & < \frac{1}{6h} |\{z \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(z) < \varphi(x) + (a + \varepsilon)h\} \cap B(x, \sqrt{6h})|. \end{aligned}$$

$D\varphi(0) \neq 0$  より

$$(3.14) \quad D\varphi(x) \neq 0, \quad a + \varepsilon > -F(D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \quad \text{for all } x \in B(0, \delta_1)$$

となる  $\delta_1 > 0$  がとれる. また,

$$(3.15) \quad U(x) \left( \frac{D\varphi(x)}{|D\varphi(x)|} \right) = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{for all } x \in B(0, \delta_1)$$

となるような連続な行列の族  $\{U(x)\}_{x \in B(0, \delta_1)} \subset O(2)$  を選んでおく.

変数変換  $z = x + \sqrt{h}U^*(x)y$  ( $U^*(x)$  は  $U(x)$  の転置行列) によって (3.13) は

$$(3.16) \quad |\{y \in B(0, \sqrt{6}) \mid \varphi(x + \sqrt{h}U^*(x)y) \geq \varphi(x) + (a + \varepsilon)h\}| < 3\pi$$

と同値になるのでこれを示せばよい.

(3.16) の左辺にある集合を  $y_2 \geq ky_1^2 + l$  の形の 2 次不等式を使って評価する.

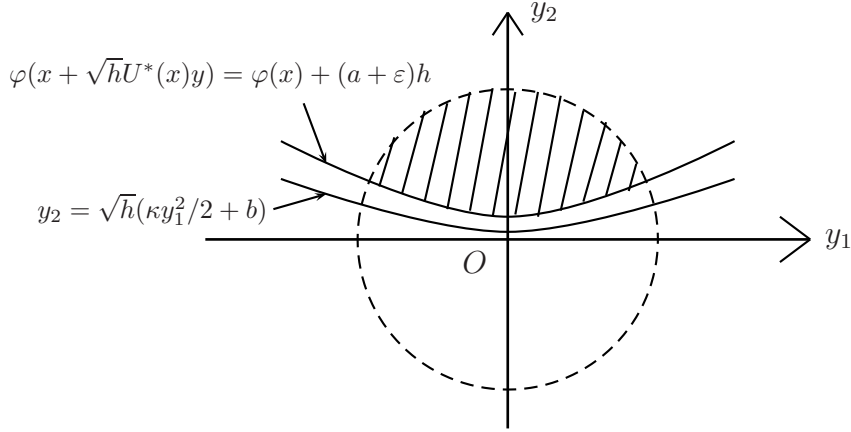


図 2.4 : (3.17) を図示したもの. 破線は中心  $O$ , 半径  $\sqrt{6}$  の円周.

$\varphi(x + \sqrt{h}U^*(x)y)$  を  $x$  の周りで Taylor 展開した後, 細かい計算を行うと,  $\gamma > 0$  が存在して  $\sqrt{h}|y| \leq \gamma$  のとき,

$$y_2 \geq \frac{\sqrt{h}}{|D\varphi(0)|} \left\{ a - \frac{1}{2}(D_{x_1x_1}\varphi(0) + 3\varepsilon)y_1^2 \right\}$$

が得られる. ここで  $\kappa := -(D_{x_1x_1}\varphi(0) + 3\varepsilon)/|D\varphi(0)|$ ,  $b = a/|D\varphi(0)|$  とおくと

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & \{y \in B(0, \sqrt{6}) \mid \varphi(x + \sqrt{h}U^*(x)y) \geq \varphi(x) + (a + \varepsilon)h\} \\ & \subset \left\{ y \in B(0, \sqrt{6}) \mid y_2 \geq \sqrt{h} \left( \frac{1}{2}\kappa y_1^2 + b \right) \right\} \end{aligned}$$

が得られる (図 2.4 を参照).

ところで,  $\{y \in B(0, \sqrt{6}) \mid y_2 \geq \sqrt{h}(\frac{1}{2}\kappa y_1^2 + b)\}$  の面積は

$$(3.18) \quad S_h := 2 \int_0^{c_h} \left\{ \sqrt{6 - y_1^2} - \sqrt{h} \left( \frac{1}{2}\kappa y_1^2 + b \right) \right\} dy_1$$

で与えられる. ここで  $c_h > 0$  は被積分関数の零点で

$$(3.19) \quad c_h \simeq 6 - c_1 h \quad (h \rightarrow 0)$$

の形で与えられる. 但し,  $c_1 > 0$  は  $h$  によらない定数. また,  $\kappa$  に関しては (3.15) を使って計算すると

$$F(D\varphi(0), D^2\varphi(0)) = |D\varphi(0)|\kappa - 3\varepsilon$$

が示せるので, この等式, (3.14), (3.18) より

$$\begin{aligned} S_h & < 3\pi + \frac{2\sqrt{h}}{|D\varphi(0)|} \left\{ (-F(D\varphi(0), D^2\varphi(0)) - 3\varepsilon) \int_0^{c_h} \frac{1}{2}y_1^2 dy_1 - a \int_0^{c_h} dy_1 \right\} \\ & < 3\pi + \frac{2\sqrt{h}}{|D\varphi(0)|} \left\{ (a - 2\varepsilon) \int_0^{c_h} \frac{1}{2}y_1^2 dy_1 - a \int_0^{c_h} dy_1 \right\} \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{2} y_1^2 dy_1 = \int_0^{\sqrt{6}} dy_1 = \sqrt{6}$$

に注意すると, (3.19) より

$$S_h < 3\pi + \frac{2\sqrt{h}}{|D\varphi(0)|} (C\sqrt{h} - 2\varepsilon)$$

を得る. 従って,  $\delta > 0$  を十分小さく取ると, 任意の  $x \in B(0, \delta)$ ,  $h \in (0, \delta]$  に対して (3.16) が成り立つことが示される.  $\square$

定理 3.2 の証明の概略を Ishii [29, Theorem 2.1] に沿った形で述べたい. その前に非常に直感的な説明を与えておこう.  $h > 0$  に対して

$$(3.20) \quad u^h(t, x) := [(H_h)^k f](x) \quad \text{for } kh \leq t < (k+1)h, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad k = 0, 1, \dots, [T/h]$$

とする. 補題 3.1 で  $\varphi(x) = u^h(t, x)$  とおいてみると

$$\frac{u^h(t+h, x) - u^h(t, x)}{h} \simeq -F(Du^h(t, x), D^2u^h(t, x))$$

が得られる. もし,  $\lim_{h \rightarrow 0} u^h(t, x) = u(t, x)$  が導関数まで込めて成り立つとすれば, この両辺において  $h \rightarrow 0$  とすることで,  $u$  が (2.3) を満たすことが証明できるだろう. しかし  $u^h$ ,  $u$  は滑らかな関数とは限らないので, このまま  $h \rightarrow 0$  とするわけにはいかない. そこで粘性解理論を用いて,  $u$  が (2.3) を満たすことを示す.

**定理 3.2 の証明の概略.**  $u^h(t, x)$  を (3.20) で定義した関数とし,  $\bar{u} = \bar{u}(t, x)$ ,  $\underline{u} = \underline{u}(t, x)$  を

$$\bar{u}(t, x) := \limsup_{h \rightarrow 0, s \rightarrow t, y \rightarrow x} u^h(s, y), \quad \underline{u}(t, x) := \liminf_{h \rightarrow 0, s \rightarrow t, y \rightarrow x} u^h(s, y),$$

とおく. まず,  $\bar{u}$  が (2.3) の粘性劣解であることを示そう.

任意の  $\varphi \in C^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  に対して  $\bar{u} - \varphi$  が  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$  で狭義最大値を取ったとする. Taylor 展開を考慮すると,  $\varphi(t, x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(x)$  ( $\varphi_1 \in C^1(0, T)$ ,  $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ) と考えてよい. また  $\varphi_1, \varphi_2$  は有界としておく.

$D\varphi_2(x_0) \neq 0$  とし,

$$(3.21) \quad \varphi_t(t_0, x_0) + F(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0)) = \varphi_1'(t_0) + F(D\varphi_2(x_0), D^2\varphi_2(x_0)) \leq 0$$

を証明する.  $a := -F(D\varphi_2(x_0), D^2\varphi_2(x_0))$  とおき, 差分商  $(\varphi_1(t) - \varphi_1(s))/(t - s)$  ( $t, s \rightarrow t_0$ ) を  $a$  と補題 3.1 を使って評価する.

補題 3.1 より, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta_1 > 0$  が存在して

$$(3.22) \quad H_h\varphi_2(x) \leq \varphi_2(x) + (a + \varepsilon)h \quad \text{for all } x \in B(x_0, \delta_1) \text{ and } h \in (0, \delta_1]$$

となるが, 話を簡単にするために任意の  $x \in \mathbb{R}^N$  でこの評価が成り立つと仮定する.

$(t_0, x_0)$  が  $\bar{u} - \varphi$  の狭義最大点であることと  $\bar{u}$  の定義より,  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{(t_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が

$$(3.23) \quad h_n \longrightarrow 0, (t_n, x_n) \longrightarrow (t_0, x_0), u^{h_n}(t_n, x_n) \longrightarrow \bar{u}(t_0, x_0) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$(3.24) \quad u^{h_n}(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n) + \varepsilon h_n > u^{h_n}(t, x) - \varphi(t, x) \quad \text{for all } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N,$$

を満たすように取れる.  $t_n = k_n h_n$  ( $k_n \in \mathbb{N}$ ) とおく.

(3.24) より

$$u^{h_n}((k_n - 1)h_n, x) \leq \varphi_1((k_n - 1)h_n) + \varphi_2(x) + \varepsilon h_n + u^{h_n}(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N$$

なので, (1-i) と (3.22) より  $x \in B(x_0, \delta_1)$ ,  $h \in (0, \delta_1]$  に対して

$$u^{h_n}(t_n, x) = [H_{h_n} u^{h_n}((k_n - 1)h_n, \cdot)](x) \leq \varphi_1((k_n - 1)h_n) + \varphi_2(x) + (a + \varepsilon)h_n + \varepsilon h_n + u^{h_n}(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)$$

を得る. 十分大きな  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $x_n \in B(x_0, \delta_1/2)$  なので, 上の不等式に  $x = x_n$  を代入すると,

$$\varphi_1(t_n) - \varphi_1((k_n - 1)h_n) \leq h_n(a + \varepsilon) + \varepsilon h_n$$

を得る.  $t_n = k_n h_n$  なので, 両辺を  $h_n$  で割って  $n \rightarrow +\infty$  とした後,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると所望の不等式を得る.  $D\varphi_2(x_0) = 0$  の場合は省略する.

$\underline{u}$  が (2.3) の粘性優解であることも同様の議論で証明できる. また,  $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$  であることと,  $H_h$  の性質 (1-i) より  $\bar{u}(0, \cdot) = \underline{u}(0, \cdot) = f(\cdot)$  in  $\mathbb{R}^N$  が示せる. 従って定理 2.3 より  $\bar{u} = \underline{u} = u$  in  $[0, T) \times \mathbb{R}^N$  が言える. 最後に Crandall - Ishii - Lions [14, Section 5] より, 定理の主張が示される.  $\square$

最後に定理 3.1 を証明しよう.

**定理 3.1 の証明の概略.**  $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$  を (3.9) を満たすように取る.  $u$  を初期値問題 (2.3) - (2.4) の粘性解とする. 各  $t \in [0, T)$  に対して  $C(t) \subset \mathbb{R}^N$  を  $\partial C(t) = \Gamma(t)$  とするよなコンパクト集合とする. このとき,  $f$  の選び方と  $\Gamma(t)$  が超曲面であることより

$$u(t, \cdot) > 0 \quad \text{in } \text{int}(C(t)), \quad u(t, \cdot) < 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus C(t),$$

となる. 更に,  $u \in BUC([0, T) \times \mathbb{R}^N)$  より  $t \mapsto \Gamma(t)$  は Hausdorff の距離に関して  $[0, T)$  上連続である.  $u^h$  を (3.20) で定義した関数とする.  $\varepsilon > 0$  と  $T' \in (0, T)$  を固定する.  $\Sigma^\varepsilon(t), \Sigma_\varepsilon(t)$  をそれぞれ

$$\Sigma^\varepsilon(t) := \{x \in C(t) \mid \text{dist}(x, \Gamma(t)) \geq \varepsilon\}, \quad \Sigma_\varepsilon(t) := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus C(t) \mid \text{dist}(x, \Gamma(t)) \geq \varepsilon\},$$

とおく.

定理 3.2 を使うと, ある  $h_0 > 0$  が存在して

$$\inf_{t \in [0, T], x \in \Sigma^\varepsilon(t)} u^h(t, x) > 0, \quad \sup_{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^N \setminus \Sigma^\varepsilon(t)} u^h(t, x) < 0 \quad \text{for all } h \in (0, h_0).$$



が言える. これを使うと

$$\sup_{x \in \Gamma^h(t)} \text{dist}(x, \Gamma(t)) < \varepsilon \quad \text{for all } t \in [0, T'] \text{ and } h \in (0, h_0).$$

が得られる.

次に

$$(3.25) \quad \sup_{x \in \Gamma(t)} \text{dist}(x, \Gamma^h(t)) < \varepsilon \quad \text{for all } t \in [0, T'] \text{ and } h \in (0, h_0).$$

を示すために背理法を使う. ある  $T_0 \in (0, T)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $h_n \searrow 0$  が存在して,

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \sup_{x \in \Gamma(t)} \text{dist}(x, \Gamma^{h_n}(t)) \geq 2\varepsilon_0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{N}$$

と仮定する. このとき, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $t_n \in [0, T_0]$ ,  $x_n \in \Gamma(t_n)$  が  $\text{dist}(x_n, \Gamma^{h_n}(t_n)) \geq 5\varepsilon_0/3$  を満たすように取れる. 必要ならば部分列を取ることにより,

$$t_n \longrightarrow \tilde{t} \in [0, T_0], \quad x_n \longrightarrow \tilde{x} \in \Gamma(\tilde{t}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

としてよい. すると, 十分大きな  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\text{dist}(\tilde{x}, \Gamma^{h_n}(t_n)) \geq 4\varepsilon_0/3$  である. 従って, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\hat{x}_n \in \Gamma^{h_n}(t_n)$  を  $\text{dist}(\hat{x}_n, \Gamma(\tilde{t})) \geq \varepsilon_0$  を満たすように取れる. やはり部分列を取ることによって

$$\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x} \quad (n \rightarrow +\infty), \quad \text{dist}(\hat{x}, \Gamma(\tilde{t})) \geq \varepsilon_0$$

と仮定してよい.

$\hat{x}_n$  の取り方より  $u^{h_n}(t_n, \hat{x}_n) = 0$  なので,  $n \rightarrow +\infty$  とすると定理 3.2 より  $u(\tilde{t}, \hat{x}) = 0$  となる. ところが,  $\text{dist}(\hat{x}, \Gamma(\tilde{t})) \geq \varepsilon_0$  なので  $u(\tilde{t}, \hat{x}) \neq 0$  となり矛盾が生じる. 従って (3.25) が示され, 定理 3.1 の証明が終わる.  $\square$

## 4 最後に

前節までで平均曲率流に対する等高面の方法と BMO アルゴリズムの収束について粘性解理論を用いて概説してきた. このアルゴリズムにはいくつかの別証明や拡張が研究されている.

まず, 別証明については

Barles - Goergelin [6]

部分積分と Taylor 展開を使って (3.3) を直接計算することによる初等的な証明.

Leoni [33], Goto - Ishii - Ogawa [23]

Allen - Cahn 方程式に対する漸近解析の方法の応用.

等がある. また, 拡張については

(3.3) において熱核を一般の積分核に置き換えたもの  
Ishii [29], Ishii - Pires - Souganidis [31]

熱方程式を一般の放物型方程式に置き換えたもの  
Vivier [36], Leoni [33], Chambolle - Novaga [11]

境界条件や非局所項付きの平均曲率流への応用  
Ishii - Ishii [30], Slepčev [35]

等がある。また Caselles - Chambolle [9], Chambolle - Novaga [11] 等を見ると BMO アルゴリズムと変分法の間には何らかの関連があるように思われる。

このように BMO アルゴリズムは様々な観点から研究されている。最近、講演者が聞いたところでは surface diffusion や Willmore flow の近似に BMO アルゴリズムが応用されているようである (Esedoglu - Ruuth - Tsai [16])。BMO アルゴリズムは比較的簡単なアルゴリズムなので、工夫次第では今までに扱われなかった曲線や曲面の運動の近似に応用できるかもしれない。

**謝辞.** 今回の講演の機会を与えていただいた非線形数理「冬の学校」の世話人の先生方に深く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] S. Allen and J. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta. Metal.*, 27:1084–1095, 1979.
- [2] L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions, and J.-M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123:199–257, 1992.
- [3] L. Alvarez, P.-L. Lions, and J.-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 29:845–866, 1992.
- [4] S. Angenent and J. J. L. Velázquez. Degenerate neckpinches in mean curvature flow. *J. für Reine Ang. Math.*, 482:16–66, 1997.
- [5] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, *Mathématiques & Applications*. Springer -Verlag, Paris, 1994.
- [6] G. Barles and C. Georgelin. A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motion by mean curvature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:484–500, 1995.
- [7] J. Bence, B. Merriman, and S. Osher. Diffusion generated motion by mean curvature. in “Computational Crystal Growers Workshop”, J. Taylor ed. *Selected Lectures in Math.*, *Amer. Math. Soc., Providence*, 1992.

- [8] K. A. Brakke. *The motion of a surface by its mean curvature*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978.
- [9] V. Casells and A. Chambolle. Anisotropic curvature-driven flow of convex sets. *Nonlinear Anal.*, 65:1547–1577, 2006.
- [10] F. Catte, P.-L. Lions, J.-M. Morel, and T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:182–193, 1992.
- [11] A. Chambolle and M. Novaga. Convergence of an algorithm for the anisotropic and crystalline mean curvature flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 37:1978–1987, 2006.
- [12] X. Chen. Generation and propagation of the interface for reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations*, 96:116–141, 1992.
- [13] Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geometry*, 33:749–786, 1991.
- [14] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. A. M. S.*, 27:1–67, 1992.
- [15] P. de Mottoni and M. Schatzman. Geometrical evolution of developed interfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347:1533–1589, 1995.
- [16] S. Esedoğlu, S. J. Ruuth, and R. Tsai. Threshold dynamics for high order geometric motions. preprint, 2006.
- [17] L. C. Evans. Convergence of an algorithm for mean curvature motion. *Indiana Univ. Math. J.*, 42:533–557, 1993.
- [18] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. *J. Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.
- [19] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [20] M. Gage and R. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geometry*, 23:69–95, 1986.
- [21] Y. Giga. *Surface Evolution Equations – A Level Set Approach –*. Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 2006.
- [22] Y. Giga and Y.-G. Chen. 動く曲面を追いかけて – チュートリアル 応用数理の最前線 –. 日本評論社, 東京, 1996.

- [23] Y. Goto, K. Ishii, and T. Ogawa. Method of the distance function to the Bence-Merriman-Osher algorithm for motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 4:311–339, 2005.
- [24] M. A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Differential Geometry*, 26:285–314, 1987.
- [25] M. A. Grayson. A short note on the evolution of surfaces via mean curvature. *Duke Math. J.*, 58:555–558, 1989.
- [26] G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geometry*, 20:237–266, 1984.
- [27] G. Huisken. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geometry*, 31:285–299, 1990.
- [28] G. Huisken and C. Sinestrari. Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 8:1–14, 1999.
- [29] H. Ishii. A generalization of the Bence, Merriman and Osher algorithm for motion by mean curvature. in *Curvature flows and related topics*, (ed. A. Damblamian, J. Spruck, A. Visintin), *Gakko Tosho, Tokyo*, 00:111–127, 1995.
- [30] H. Ishii and K. Ishii. An approximation scheme for motion by mean curvature with right-angle boundary condition. *SIAM J. Math. Anal.*, 33:369–389, 2001.
- [31] H. Ishii, G. E. Pires, and P. E. Souganidis. Threshold dynamics type approximation schemes for propagating fronts. *J. Math. Soc. Japan*, 50:267–308, 1999.
- [32] S. Koike. *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, *MSJ Memoirs*. Tokyo, Math. Soc. Japan, 2004.
- [33] F. Leoni. Convergence of an approximation scheme for curvature-dependent motion of sets. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39:1115–1131, 2001.
- [34] W. W. Mullins. Two-dimensional motion of idealized grain boundaries. *J. Appl. Phys.*, 27:900–904, 1956.
- [35] D. Slepčev. Approximation schemes for propagation of fronts with nonlocal velocities and neumann boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 52:79–115, 2003.
- [36] L. Vivier. Convergence of an approximation scheme for computing motions with curvature dependent velocities. *Differential Integral Equations*, 13:1263–1288, 2000.

# スカラー反応拡散方程式の環境効果と 多重安定定常解について

倉田 和浩 (Kazuhiro Kurata)

首都大学東京・理工学研究科・数理情報科学専攻

kurata@comp.metro-u.ac.jp

空間非一様な効果を含んだいくつかのスカラー反応拡散方程式の定常問題において、非自明な安定定常解の存在とその多重性について、主に変分法の視点から概観したい。ここでの安定性は主に対応するエネルギー汎関数の local minimizer の意味で使う。力学系の視点での研究、特異摂動法での研究による深い研究も数多くなされているが、それらについては西浦先生の本 [1] などを参照していただきたい。また、パターン形成の問題としては、空間一様な方程式系において非一様な安定定常パターンの出現が興味深い問題であり、エキサイティングな分野であるが、ここではそうした拡散反応系についても一切扱わない ([1] および [2] 参照)。

そういった意味で、以下に解説する話題は、主に環境効果によって引き起こされる安定パターンの存在、多重存在というもので、素朴な問題を扱う。それでも、いくつか環境効果によって安定定常パターンの生まれる非自明な構造が浮き彫りになっていると感じていただければと願っている。また、安定な解以外に不安定であるが興味深い解の存在も研究されている問題も多いが、それについてもあまり解説せず、興味をもたれる方への関連文献の紹介にとどめることとする。

それでもなお題材の選択および文献引用において偏りがあることをお断りしておきたい。たとえば、非局所的な非線形項を持つ問題、非線形境界条件を持つ問題、4 階の方程式の問題など興味深い話題が数多くあることを一言つけくわえておきたい。

# 1 Unbalanced Bistable Nonlinearity

ここでは、次の反応拡散方程式の定常解を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta u + f(x, u), \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^N, \quad t > 0.$$

ここで  $\epsilon > 0$  は定数、 $\Omega$  は有界領域でその境界は滑らかとする。この節では、非線形項  $f(x, t) = t(1-t)(t-a(x))$  で、 $a(x)$  は  $a \in C(\bar{\Omega})$  で  $0 < a(x) < 1$  ( $x \in \bar{\Omega}$ ) を満たすとする。この方程式は集団遺伝学、数理生態学における個体数増殖モデルや相分離現象などに現れるもので、拡散項  $\Delta u$  を無視した常微分方程式とみなした際に、各  $x \in \Omega$  を止めて考えて、 $u = 0$  及び  $u = 1$  という2つの安定平衡点と  $u = a(x)$  という不安定平衡点をもつということで、双安定なモデルと呼ばれる。

以下、Neumann 境界条件 (Dirichlet 境界条件でもよいが) のもとでの次の定常問題のみを考える。

$$\epsilon^2 \Delta u + u(1-u)(u-a(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

これは変分構造をもち、解  $u$  は  $H^1(\Omega)$  上での次のエネルギー汎関数

$$J_\epsilon(u; \Omega) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x, u) dx$$

の critical point と捉えることができる。ここで

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds, \quad f(x, s) = s(1-s)(s-a(x)).$$

今、

$$A = \{x \in \Omega \mid \frac{1}{2} < a(x) < 1\}, \quad B = \{x \in \Omega \mid 0 < a(x) < \frac{1}{2}\}$$

とおいて、 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$  であるような状況を考える。このとき、 $x \in A$  なら、 $-F(x, 1) > -F(x, 0) = 0$ 、 $x \in B$  なら、 $-F(x, 0) = 0 > -F(x, 1)$  であり、 $a(x) = 1/2$  なる  $x$  では  $-F(x, 0) = -F(x, 1) = 0$  となることに注意する。

注: このことは、エネルギーの観点から見て、 $A$  の場所では  $u = 0$  という状態のほうが  $u = 1$  という状態より低いエネルギーを持ち、逆に  $B$  の場所では  $u = 1$  という状態のほうが  $u = 0$  という状態より低いエネルギーをもつことを意味する。このように  $A \neq \emptyset$  あるいは  $B \neq \emptyset$  のとき、(常微

分方程式の観点から見て) 安定な2つの状態  $u = 0$  と  $u = 1$  とのもつエネルギーに大小が付き、エネルギーバランスが崩れるという。これに対して、 $A = B = \emptyset$  の場合、常にエネルギーバランスがとれておりいたるところで  $u = 0$  と  $u = 1$  とは同じエネルギーをもつ。

次の最小化問題を考える。

$$\sigma_\epsilon = \inf\{J_\epsilon(u; \Omega) \mid u \in H^1(\Omega)\}.$$

このとき、常に最小値を実現する  $u = u_\epsilon \in H^1(\Omega)$  が存在することが標準的な変分法の直接法によってわかる。(この  $u_\epsilon$  を global minimizer という。) global minimizer  $u_\epsilon$  の大雑把な profile について次がわかる。

**命題 1.1**  $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$  と仮定する。このとき、任意のコンパクト集合  $K_0 \subset A$  および  $K_1 \subset B$  に対して、 $\epsilon \rightarrow 0$  で  $K_0$  上一様に  $u_\epsilon(x) \rightarrow 0$ ,  $K_1$  上一様に  $u_\epsilon(x) \rightarrow 1$  が成り立つ。

このことは、先の2つの安定状態  $u = 0$  と  $u = 1$  のエネルギーバランスを考えれば至極もつともなことで理解できる。実は、さらに上の global minimizer ではなく non-trivial local minimizer の存在がわかる ([3],[5], 他に [9] もある)。このことを Dancer-S.Yan[5] に基づいて、一般的な主張でなく典型的な状況で述べる。 $A$  がいくつかの連結成分を持っており、その1つの成分  $A_1$  と開集合  $\Omega_1$  で、 $A_1 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$  かつ  $\partial\Omega_1$  上で  $a(x) < \frac{1}{2}$  なるものがあるとしよう。このとき次が成り立つ。

**定理 1.1** (Dancer-Yan[5]) local minimizer  $\tilde{u}_\epsilon$  が存在して、任意のコンパクト集合  $K_0 \subset A \setminus \overline{A_1}$  および  $K_1 \subset B \cup \overline{\Omega_1}$  に対して、 $\epsilon \rightarrow 0$  で  $K_0$  上一様に  $\tilde{u}_\epsilon(x) \rightarrow 0$ ,  $K_1$  上一様に  $\tilde{u}_\epsilon(x) \rightarrow 1$  が成り立つ。

証明は、非線形項を変更して(一種のペナルティ法)の最小化問題の解を求めて、エネルギー比較によって、求めたい漸近 profile をもつことを示すことによって、もとの解になっていることを示す。

- global minimizer  $u_\epsilon$  と違って、上で構成された local minimizer  $\tilde{u}_\epsilon$  は、 $A$  の1つの連結成分がまわりを  $B$  の領域で囲まれているとき、そこでエネルギーの低い0の状態よりエネルギーの高いもう1つの安定状態1に近い値をとるものである。このような  $A_1$  のとり方(その個数も含めて)のバリエーションがありうるとき、異なる漸近 profile をもった local minimizer がたくさん存在することとなる。また、 $B$  の連結成分  $B_1$  でそのまわりを  $A$  の領域で囲まれるときも同様の non-trivial local minimizer の構成が可能となる。

•空間次元  $N = 1$  のときに, [3] によってこうした安定解の構成が subsolution-supersolution 法によってなされていたが, Dancer-Yan によって空間多次元でも上のような漸近 profile をもつ non-trivial local minimizer の構成が容易になった. [9] でも空間多次元の non-trivial local minimizer の構成がなされているが, 少なくとも  $A, B$  の境界にある程度の滑らかさを仮定している. また, 少し読みづらい気がする.

•  $a(x) = 1/2$  の領域付近では遷移層をもつことになるが, その遷移層付近の詳しい漸近 profile までは出ていない(たとえ,  $A, B$  の境界がなめらかでも).

不安定ではあるが, 空間 1 次元では Hale-Sakamoto, Nakashima-Tanaka[18], Ai-Chen-Hasting, Nakashima-Urano-Yamada, 空間多次元で Dancer-Yan[6] などによって, spike 状の解や cluster 解などの興味深い解の存在の研究もある.

ここでは, 命題 1 や定理 1 の証明をはじめ, このノート全体の基礎となる 2 つの補題を紹介しておこう. 以下の議論は, [5] および [19] に依る.

**補題 1.1**  $D = \{x \mid |x| < \delta\}$ ,  $g \in C^1(\mathbf{R}^1)$  で, ある  $T > 0$  があって  $g(t) > 0$  ( $t < 0$ ),  $g(T) = 0$ ,  $g(t) < 0$  ( $t > T$ ) とする.

(1)  $G(t) = \int_0^t g(s) ds$  は  $t = T$  でただ 1 つの最大値をとるとする. このとき,  $u_\epsilon \in H_0^1(D)$  を次の最小化問題の *minimizer* とする:

$$\inf\{J_\epsilon(u; D) \mid u \in H_0^1(D)\},$$

ここで

$$J_\epsilon(u; D) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D G(u) dx.$$

このとき,  $0 \leq u_\epsilon(x) \leq T$ , ( $x \in D$ ) であり, かつ  $u_\epsilon(x) = u_\epsilon(|x|)$  で, 任意のコンパクト集合  $K \subset D$  に対して,  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $K$  上一様に  $u_\epsilon(x) \rightarrow T$  となる.

(2)  $G(t)$  が  $t = 0$  でただ 1 つの最大値をとる場合には,  $u_\epsilon \in H_0^1(D)$  を次の最小化問題の *minimizer* とする:

$$\inf\{J_\epsilon(u; D) \mid u - T \in H_0^1(D)\}.$$

このとき,  $0 \leq u_\epsilon(x) \leq T$ , ( $x \in D$ ) であり, かつ  $u_\epsilon(x) = u_\epsilon(|x|)$  で, 任意のコンパクト集合  $K \subset D$  に対して,  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $K$  上一様に  $u_\epsilon(x) \rightarrow 0$  となる.

**Proof.** まず (1) の場合を示す.  $u_\epsilon$  は

$$-\epsilon^2 \Delta u = g(u), \quad (x \in D = \{x \mid |x| < \delta\}), \quad u = 0, \quad (|x| = \delta)$$



を満たす.  $g(t)$  の条件と最大値原理より,  $0 \leq u_\epsilon(x) \leq T$ ,  $(x \in D)$  はすぐ  
にわかる. また Gida-Ni-Nirenberg の定理から,

$$u_\epsilon(x) = u_\epsilon(|x|), u'_\epsilon(r) < 0, (r = |x| > 0).$$

十分小さい  $\epsilon > 0$  に対して,  $w_\epsilon(x) = T, |x| \leq \delta - \epsilon$ , であって  $w_\epsilon(x) =$   
 $-\frac{T}{\epsilon}(|x| - \delta), \delta - \epsilon < |x| \leq \delta$  なる  $w_\epsilon \in H_0^1(D)$  を定めると,  $u_\epsilon$  が minimizer  
であることから

$$-\int_D G(u_\epsilon) dx \leq J_\epsilon(u_\epsilon; D) \leq J_\epsilon(w_\epsilon; D).$$

ここで, ある定数  $C_0$  が存在して,

$$\begin{aligned} J(w_\epsilon; D) &\leq \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\{|x| \delta - \epsilon < |x| \leq \delta\}} |\nabla w_\epsilon|^2 dx - G(T)|B(0, \delta)| + G(T)|\{x | \delta - \epsilon < |x| \leq \delta\}| \\ &\leq -G(T)|D| + C_0\epsilon \end{aligned}$$

となる. よって

$$\int_D (G(T) - G(u_\epsilon)) dx \leq C_0\epsilon.$$

$G(t)$  は  $t = T$  で最大となるので  $G(T) - G(u_\epsilon) \geq 0$  on  $D$ . 今, 任意の  
 $r_0 \in (0, \delta)$  をとるとき,  $\sigma \in (0, \delta - r_0)$  に対して,

$$\begin{aligned} \int_D (G(T) - G(u_\epsilon)) dx &\geq \int_{\{r_0 \leq |x| \leq r_0 + \sigma\}} (G(T) - G(u_\epsilon)) dx \\ &= (G(T) - G(u_\epsilon(r_\epsilon)))|\{x | r_0 \leq |x| \leq r_0 + \sigma\}| \end{aligned}$$

が, 平均値の定理から, ある  $r_\epsilon \in (r_0, r_0 + \sigma)$  に対して成り立つ.  $|\{x | r_0 \leq$   
 $|x| \leq r_0 + \sigma\}|$  は  $\epsilon$  に無関係な正値なので, 以上より  $\epsilon \rightarrow 0$  において

$$0 \leq G(T) - G(u_\epsilon(r_\epsilon)) \leq C_1\epsilon$$

となり,  $G(t)$  が  $t = T$  でただ1つの最大値をもつという仮定から  $u_\epsilon(r_\epsilon) \rightarrow$   
 $T$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  を得る. ここで  $u_\epsilon(x) = u_\epsilon(|x|)$  と  $u'_\epsilon(r) < 0$  に注意して,

$$u_\epsilon(r_\epsilon) \leq u_\epsilon(r) = u_\epsilon(|x|) \leq T, \quad r = |x| \leq r_0 \leq r_\epsilon$$

が成り立つ. 従って, 特に

$$\max_{\{x | |x| \leq r_0\}} |u_\epsilon(x) - T| \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

を得る. (さらに, 必要ならコンパクト性の議論より,  $u_\epsilon(x)$  は  $D$  上局所一様に  $T$  に収束することがわかる.)

(2) の場合を考える.  $u_\epsilon$  は

$$-\epsilon^2 \Delta u = g(u), \quad (x \in D = \{x \mid |x| < \delta\}), \quad u = T, \quad (|x| = \delta)$$

を満たし,  $v_\epsilon(x) = T - u_\epsilon(x)$  とおくことで,  $\bar{g}(t) = -g(T - v)$  として,

$$-\epsilon^2 \Delta v = \bar{g}(v), \quad (x \in D = \{x \mid |x| < \delta\}), \quad v = 0, \quad (|x| = \delta)$$

となる.  $\bar{G}(t) = \int_0^t \bar{g}(s) ds$  とおくと, この  $\bar{G}$  がちょうど (1) の条件を満たす状況となるので, (1) の結果を用いて  $v_\epsilon$  は局所一様に  $T$  に収束することになり, 従って  $u_\epsilon = T - v_\epsilon$  は 0 に局所一様に収束することがわかる.

(証明終わり)

次に,  $g_1(x, t), g_2(x, t)$  ( $t$  に関して  $C^1$  級ぐらいを仮定しておく) に対して

$$G_i(x, t) = \int_0^t g_i(x, s) ds, \quad i = 1, 2,$$

とし,  $\eta_i \in H^1(D), i = 1, 2$  として最小化問題

$$\inf \{J_i(u; D) \mid u - \eta_i \in H_0^1(D)\}, \quad J_i(u; D) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D G_i(x, u) dx$$

の minimizer をそれぞれ  $u_i \in H^1(D), i = 1, 2$  とする. このときエネルギー比較原理ともいふべき便利な補題が成り立つ.

**補題 1.2**  $u_i \in H^1(D), i = 1, 2$  を上の最小化問題の minimizer とする. 今, ある定数  $m < M$  があって次が成り立つとする.

- (a)  $m \leq u_i(x) \leq M, i = 1, 2, x \in D.$
- (b)  $g_1(x, t) \geq g_2(x, t), x \in D, t \in [m, M].$
- (c)  $\eta_1(x) \geq \eta_2(x), x \in D.$

このとき,  $u_1(x) \geq u_2(x), x \in D$  が成り立つ.

**Proof.**  $\eta_j \in C(\bar{D})$  で,  $\eta_1(x) \not\equiv \eta_2(x)$  on  $\partial D$  として示す. (以下の応用でもこの場合だけでも十分である.)

$M = \{x \in D \mid u_2(x) > u_1(x)\}$  として  $M \neq \emptyset$  と仮定する. ここで仮定より  $D \setminus M$  はある空でない開集合を含むことに注意する.  $\phi(x) = (u_2 - u_1)^+$

とおくと仮定から  $\phi \in H_0^1(D)$  であって,  $\phi \not\equiv 0$  on  $D$ , かつ  $\phi(x) = 0$  on  $D \setminus M$  となる. それぞれが minimizer であることから,

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_1(u_1 + \phi) - J_1(u_1) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \int_M (|\nabla(u_1 + \phi)|^2 - |\nabla u_1|^2) dx - \int_M \int_{u_1(x)}^{u_1(x)+\phi(x)} g_1(x, s) ds dx \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{2} \int_M (|\nabla(u_1 + \phi)|^2 - |\nabla u_1|^2) dx - \int_M \int_{u_1(x)}^{u_1(x)+\phi(x)} g_2(x, s) ds dx \\ &= J_2(u_2) - J_2(u_2 - \phi) \leq 0. \end{aligned}$$

このことは  $u_1 + \phi$  も  $J_1$  の minimizer であることになり,

$$-\epsilon^2 \Delta(u_1 + \phi) = g_1(x, u_1 + \phi)$$

従って, ある有界な関数  $c(x)$  があって

$$-\epsilon^2 \Delta \phi = g_1(x, u_1 + \phi) - g_1(x, u_1) = c(x)\phi$$

を満たす. 最大値原理あるいは一意接続性定理から矛盾が起こる. よって,  $M = \emptyset$  となる. (証明終わり)

命題 1.1 の証明: 任意の  $x_0 \in B$  をとり,  $B(x_0, 2\delta) \subset B$  となる十分小さな  $\delta > 0$  をとる.  $a = \max_{x \in \overline{B(x_0, \delta)}} a(x)$  とおくと仮定から  $0 < a < \frac{1}{2}$  である. よって  $\bar{f}(t) = t(1-t)(t-a)$  とおくと,

$$f(x, t) \geq \bar{f}(t), \quad x \in B(x_0, \delta), 0 \leq t \leq 1.$$

$$\bar{F}(t) = \int_0^t \bar{f}(s) ds,$$

$$J(u) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_{B(x_0, \delta)} |\nabla u|^2 dx - \int_{B(x_0, \delta)} \bar{F}(u) dx$$

として  $w_\epsilon$  を次の最小化問題の minimizer とする.

$$\inf\{J(u) \mid u \in H_0^1(B(x_0, \delta))\}.$$

$u_\epsilon(x) > 0$ ,  $x \in \Omega$  に注意して,  $w_\epsilon(x) = 0 \leq u_\epsilon(x)$  が  $\partial B(x_0, \delta)$  上で成り立つので, 補題 1.2 より

$$w_\epsilon(x) \leq u_\epsilon(x) (\leq 1), \quad x \in B(x_0, \delta)$$

を得る. 一方補題 1.1 から  $w_\epsilon(x)$  は  $B(x_0, \frac{\delta}{2})$  上で一様に 1 に収束する. よって,  $u_\epsilon(x)$  も  $B(x_0, \frac{\delta}{2})$  上で一様に 1 に収束する. コンパクト性の議論より, 任意のコンパクト部分集合  $K_1 \subset B$  上で  $u_\epsilon(x)$  は一様に 1 に収束することが結論できる.

同様に  $x_0 \in A$  を任意にとつて,  $B(x_0, 2\delta) \subset A$  となる十分小さな  $\delta > 0$  をとる.  $b = \min_{x \in \overline{B(x_0, \delta)}} a(x)$  とおくと仮定から  $1 > b > \frac{1}{2}$  である. よって  $\bar{f}(t) = t(1-t)(t-b)$  とおくと,

$$f(x, t) \leq \bar{f}(t), \quad x \in B(x_0, \delta), 0 \leq t \leq 1.$$

$$\bar{F}(t) = \int_0^t \bar{f}(s) ds,$$

$$J(u) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_{B(x_0, \delta)} |\nabla u|^2 dx - \int_{B(x_0, \delta)} \bar{F}(u) dx$$

として  $w_\epsilon$  を次の最小化問題の minimizer とする.

$$\inf\{J(u) \mid u - 1 \in H_0^1(B(x_0, \delta))\}.$$

$u_\epsilon(x) < 1$ ,  $x \in \Omega$  に注意して,  $w_\epsilon(x) = 1 \geq u_\epsilon(x)$  が  $\partial B(x_0, \delta)$  上で成り立つので, 補題 1.2 より

$$w_\epsilon(x) \geq u_\epsilon(x) (\geq 0), \quad x \in B(x_0, \delta)$$

を得る. 一方補題 1.1 から  $w_\epsilon(x)$  は  $B(x_0, \frac{\delta}{2})$  上で一様に 0 に収束する. よって,  $u_\epsilon(x)$  も  $B(x_0, \frac{\delta}{2})$  上で一様に 0 に収束する. コンパクト性の議論より結論を得る. (証明終わり)

定理 1.1 の証明:  $\Omega_1$  上で非線形項を修正する. それには,  $0 \leq t \leq 1$  での  $f(x, t)$  の正の最大値を  $0 < M(x) < 1$  でとるとし,  $t \geq M(x)$  では  $f_1(x, t) = f(x, t)$  とし,  $t \leq M(x)$  では  $f_1(x, t) = f(x, M(x))$  と修正した関数とする. そして,

$$g(x, t) = \chi_{\Omega \setminus \overline{\Omega_1}} f(x, t) + \chi_{\overline{\Omega_1}} f_1(x, t),$$

$$G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds$$

とおく.

$$\tilde{J}(u) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} G(x, u) dx$$

として, 最小化問題

$$\inf\{\tilde{J}(u) \mid u \in H^1(\Omega)\}$$

の minimizer を  $\tilde{u}_\epsilon$  とする.

Case (i):  $x_0 \in \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$  とする. その近傍では  $g(x, t) = f(x, t)$  なので, 命題 1.1 と同様の議論で十分小さな  $\delta > 0$  に対して,  $B(x_0, \delta) \subset A$  なら,  $B(x_0, \delta/2)$  上で一様に 0 に,  $B(x_0, \delta) \subset B$  なら,  $B(x_0, \delta/2)$  上で一様に 1 に, それぞれ収束する.

Case (ii):  $x_0 \in \Omega_1$  とする. その近傍では  $g(x, t) = f_1(x, t)$  である. 今十分小さな  $\theta > 0$  で

$$f_1(x, t) \geq g_\theta(t) = -\theta(t - 1), \quad x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1,$$

を満たすものが取れる.  $\delta > 0$  を十分小さくにとって  $B(x_0, 2\delta) \subset \Omega_1$  となるようにしておく. また,

$$F_1(x, t) = \int_0^t f_1(x, s) ds \quad G_\theta(x, t) = \int_0^t g_\theta(x, s) ds$$

とおくとき,  $F_1(x, t)$  は  $t = 1$  でただ 1 つの最大値をもつことに注意しておく.  $w_\epsilon$  を

$$\inf\left\{\frac{\epsilon^2}{2} \int_{B(x_0, \delta)} |\nabla u|^2 dx - \int_{B(x_0, \delta)} G_\theta(x, u) dx \mid u \in H_0^1(B(x_0, \delta))\right\}$$

の minimizer とするとき, 補題 1.1 から  $B(x_0, \delta/2)$  上で一様に  $w_\epsilon(x) \rightarrow 1$  であり, また補題 1.2 から  $w_\epsilon(x) \leq \tilde{u}_\epsilon(x)$  on  $B(x_0, \delta)$  なので  $B(x_0, \delta/2)$  上で一様に  $\tilde{u}_\epsilon(x) \rightarrow 1$  となる.

Case (iii):  $x_0 \in \partial\Omega_1$  とする. 仮定から十分小さい  $\delta$  に対して,  $B(x_0, 2\delta) \subset B$  とできる.  $a = \max_{x \in \overline{B(x_0, \delta)}} a(x) \in (0, 1/2)$  とおくと,

$$g(x, t) \geq f(x, t) \geq \bar{f}(t) = t(1 - t)(t - a), \quad x \in B(x_0, \delta), 0 \leq t \leq 1$$

となることに注意する.  $\bar{F}(x, t) = \int_0^t \bar{f}(x, s) ds$  とおき,  $w_\epsilon$  を

$$\inf\left\{\frac{\epsilon^2}{2} \int_{B(x_0, \delta)} |\nabla u|^2 dx - \int_{B(x_0, \delta)} \bar{F}(x, u) dx \mid u \in H_0^1(B(x_0, \delta))\right\}$$

の minimizer とするとき, 補題 1.1 から  $B(x_0, \delta/2)$  上で一様に  $w_\epsilon(x) \rightarrow 1$  であり, また補題 1.2 から  $w_\epsilon(x) \leq \tilde{u}_\epsilon(x)$  on  $B(x_0, \delta)$  なので  $B(x_0, \delta/2)$  上で一様に  $\tilde{u}_\epsilon(x) \rightarrow 1$  となる. 以上より, 結論を得る.

## 2 Balanced Bistable Nonlinearity

次の定常問題を考える.

$$\epsilon^2 \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + h(x)^2(a(x)^2 - u^2)u = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

ここで  $k, h, a \in C(\bar{\Omega})$  (必要に応じてさらになめらかさを課すこともある) で  $0 < a(x), 0 < h(x), 0 < k(x)$  とする. この問題では, 常に  $u = \pm a(x)$  が同じエネルギーをもつという状況で領域全体で  $u_\epsilon \sim a(x)$  あるいは  $u_\epsilon \sim -a(x)$  という漸近挙動をもつ解 (実際, global minimizer はこの挙動をもつ) 以外に, non-trivial な安定解を見つけることはデリケートな問題となる.

空間 1 次元の場合の研究として次のようなものがある.  $\Omega = (0, 1)$  で  $k(x) \equiv 1, h(x) \equiv 1$  とする. Nakashima[16] は,  $a \in C^2[0, 1]$  で  $a(x)$  が非退化な最小値を  $x_0 \in (0, 1)$  でとるならば,  $\epsilon \rightarrow 0$  で,  $u_\epsilon(x) \sim -a(x)$  on  $(0, r_0)$  かつ  $u_\epsilon(x) \sim a(x)$  on  $(r_0, 1)$  なる内部遷移層をもった安定解が存在することを精密な subsolution-supersolution の構成によって示した. Matsuzawa[14] は,  $a(x)$  がある区間でべったり最小値を取るような退化した場合にこの結果を拡張した. また,  $k(x) \equiv 1, a(x) \equiv 1$  の場合に, Nakashima[17] は,  $h$  の極小値の付近に内部遷移層をもった安定解の存在とその性質を調べた. [17] では, さらにより一般の多様な位置に内部遷移層をもつ解の存在と性質を調べている. また Nakashima-Tanaka[18] で, 変分法によってそうした解の構成をより組織的に調べられた. 多次元での研究は少ないが, [6],[7] を挙げておく.

ここでは, まず次の問題における Nascimento の結果 [8] を 1 つ紹介しておこう.

$$\epsilon^2 \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + (1 - u^2)u = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

ここでは,  $k(x)$  の非一様性の効果による非定数の安定解の存在について着目する. 実は,  $k \equiv 1$  の場合でも, 領域がダンベル型領域ならば非定数の安定解が存在するという Matano[13] による結果は有名であるが, ここでの証明方法と同様の方針をとる. ただし, ここでは例え領域が凸領域であっても,  $k(x)$  の影響で非定数安定解が存在しうることが示される. このこと自体は, 空間 1 次元で Fusco-Hale, Hale-Rocha, Yanagida らによっても研究されている.

$\epsilon = 1$  とし,

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k(x) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx$$

とおく. ここで  $f(t) = t(1 - t^2)$ ,  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ . 今なめらかな閉曲面  $S \subset \Omega$  があって,  $\Omega$  が  $S$  の内部  $\Omega_i$  と外部  $\Omega_e$  に分離されているとする. またなめらかな境界をもつ 2 つの開集合  $D_1, D_2$  があって次を満たすとする.

$$\overline{D_1} \subset \Omega_i, \overline{D_2} \subset \Omega_e.$$

そうして

$$k_{i,m} = \min_{x \in D_i} k(x), \quad i = 1, 2$$

とし,  $\lambda_2(D_i) > 0$  を  $-\Delta$  の  $D_i$  上での Neumann 固有値問題の第 2 固有値とする, i.e.

$$\int_{D_i} |\nabla v|^2 dx \geq \lambda_2(D_i) \int_{D_i} |v - \bar{v}|^2 dx, \quad v \in H^1(D_i), i = 1, 2$$

ここで  $\bar{v} = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} v dx$ . そこで,

$$\epsilon_0 = F(1) \times \min\{|D_1| \min(\lambda_2(D_1)k_{1,m}, 1), |D_2| \min(\lambda_2(D_2)k_{2,m}, 1)\} > 0$$

とおく. また次の最小化問題を考える.

$$\sigma = \inf\{J(u) \mid u \in \mathcal{A}\},$$

ここで

$$\mathcal{A} = \{u \in H^1(\Omega) \mid \int_{D_1} u dx < 0, \int_{D_2} u dx > 0\}.$$

このとき次が成り立つ.

**定理 2.1** もし  $\sigma < \epsilon_0 - F(1)|\Omega|$  が成り立てば,  $\sigma$  を実現する  $u \in \mathcal{A}$  が存在する. この  $u$  は  $H^1(\Omega)$  上での *local minimizer* となる.

**証明の outline:**  $\sigma$  に対する minimizing sequence をとると,  $H^1(\Omega)$  での有界列であることがわかる. その弱極限を  $w$  とするとき  $J(w) \leq \sigma$  となるが,  $\int_{D_1} w dx \leq 0$  あるいは  $\int_{D_2} w dx \geq 0$  となる可能性がある. しかし, もし  $\int_{D_1} w dx = 0$  と仮定すると,  $\lambda_2(D_1)$  の定義と定理の仮定のもとでは矛盾が生じることを示すことができる. よって, 実は  $\int_{D_1} w dx < 0$ , かつ

$\int_{D_2} w \, dx > 0$  が成立することになり,  $w \in \mathcal{A}$  であってかつ  $J(w) = \sigma$  をえる.

このことを用いて, 適当な試験関数を代入して  $\sigma$  を評価することによって, 次のような主張が得られることとなることがわかる.

系 2.1  $k(x)$  が  $S$  の付近で十分小さく,  $D_1 \cup D_2$  で十分大きい値をとるならば, 非定数の安定解が存在する.

証明の outline: 関数  $d(x)$  を,  $x \in \Omega_i$  では,  $d(x) = \text{dist}(x, S)$ ,  $x \in \Omega_e$  では,  $d(x) = -\text{dist}(x, S)$  とおく. 十分小さい  $\delta > 0$  に対して,  $Q_\delta$  を  $S$  の管状近傍とし,  $D_1, D_2, Q_\delta$  は disjoint であるとしてよい.  $\xi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  を  $\xi(t) = -1, (t \leq -\delta/2); = (2t)/\delta, (|t| \leq \delta/2); = 1, (t \geq \delta/2)$  なる関数とし,  $w(x) = \xi(d(x))$  とおく. このとき作り方より,  $w \in \mathcal{A}$  であることがわかる. また,  $k_{j,m}$  が  $D_1 \cup D_2$  では十分大きい値をとるといふ仮定のもとでは,  $\epsilon_0 = F(1) \times \min(|D_1|, |D_2|)$  であることに注意する. ここで

$$\begin{aligned} \sigma \leq J(w) &\leq -F(1)|\Omega| + \int_{Q_\delta} \frac{k(x)}{2} |\nabla w|^2 \, dx \\ &\leq -F(1)|\Omega| + \frac{k_{M,\delta}}{2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \int_{Q_\delta} |\nabla d|^2 \, dx \\ &\leq -F(1)|\Omega| + \frac{k_{M,\delta}}{2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 |Q_\delta| \end{aligned}$$

を得る. ここで  $k_{M,\delta} = \max_{x \in Q_\delta} k(x)$ . 従って,

$$\frac{k_{M,\delta}}{2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 |Q_\delta| < F(1) \times \min(|D_1|, |D_2|)$$

を満たすくらい  $k_{M,\delta}$  が小さければ十分となることがわかる. (証明終わり)

次に,

$$\epsilon^2 \Delta u + (a(x)^2 - u^2)u = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

で,  $a(x) = \chi_D(x)$  というようにある部分領域  $D \subset \bar{D} \subset \Omega$  の場合の非自明な安定解の存在について述べる.

簡単のため,  $D = D_1 \cup D_2, \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$  であって,  $\partial D_1, \partial D_2$  は滑らかとする. このとき次を得る.



定理 2.2 ([12]) 十分小さい  $\epsilon > 0$  に対して, *local minimizer*  $u_\epsilon$  で次の漸近挙動をするものが存在する.  $u_\epsilon$  は  $D_1$  上局所一様に 1 に近づき,  $D_2$  上局所一様に  $-1$  に近づき,  $\Omega \setminus (\overline{D})$  上局所一様に 0 に近づく.

- $D$  がいくつかの連結成分で構成されるとき, 上の定理は勝手に連結成分を 2 組に分類して, 1 組の連結成分たちの上では 1 に近く, もう一方の連結成分たちの上では  $-1$  に近い漸近挙動をする *local minimizer* が構成できることをいっている. 従って, 多重安定パターンができることになる.

- 上の定理は驚くことではなく自然なものと思うが, 新しい結果と思われる. そもそも  $a(x)$  がある部分領域でべったりゼロとなるような上記の方程式を研究したものはあまり見当たらない.

- 証明は比較的自然的なアイデアによって *subsolution-supersolution* を構成することを試みるが,  $\partial D$  の近くでのつなぎ目での評価がポイントとなる.  $\partial D_i$  の滑らかさがあまり必要でないと思われるが, 現時点では技術的理由で  $C^2$  級を仮定して証明している.

### 3 Population Growth Model with Allee Effect

この節では, 数理生態学の個体増殖モデルのうち, 一種の Allee 効果をもつ次のような定常問題の多重安定パターンの存在について述べる.

$$\epsilon^2 \Delta u + u^2(b(x) - u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

$d\Delta u + f(x, u) = 0, f(x, t) = tg(x, t)$  と書くとき,  $g(x, t)$  を増殖率関数というが, 通常のリジスチックモデルの場合  $g(x, t) = b(x) - t$  で,  $u$  に関して単調減少関数であるのに対して, 上記モデルでは  $g(x, t) = b(x)t - t^2$  となっており,  $b(x) > 0$  の領域で,  $g(x, t)$  は  $t$  に関して最初増加し, あるところから減少するという性質を持っている. こうした性質は一般に Allee 効果と呼ばれている. 大雑把に言って, 個体数が少ない状態では, パートナーを見つけにくいなどの理由で増殖率関数は最初  $t$  が小さいとき小さくなるべきというように解釈される.  $t$  が大きくなるとリジスチックモデルでもそうであったように飽和効果 (あるいは混雑効果) によって増殖率関数は減少に転じる.

さてここでは, 環境因子ともいうべき関数  $b(x)$  は,  $\pm 1$  のみとるとし,

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \mid b(x) = 1\}, \quad \Omega_- = \{x \in \Omega \mid b(x) = -1\}$$

と置く.  $\Omega_+$  は個体にとってよい環境領域であることを意味し,  $\Omega_-$  は悪い環境領域であることを意味する. 対応するエネルギー関数を次のように置く.

$$J_\epsilon(u) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{3} \int_\Omega b(x)|u|^3 dx + \frac{1}{4} \int_\Omega |u|^4 dx.$$

**定理 3.1** ([10])  $|\Omega_+| \neq 0$  とし, さらに  $\int_\Omega b(x) dx < 0$  を仮定する.

(1) このとき, 十分小さい  $\epsilon > 0$  に対して2つのタイプの正値解  $\bar{u}_\epsilon, \underline{u}_\epsilon$  が存在する.  $\bar{u}_\epsilon$  は  $J_\epsilon(u)$  の  $H^1(\Omega)$  上の *global minimizer* として,  $\underline{u}_\epsilon$  は *Mountain Pass* 解としてつかまるもので,  $J_\epsilon(\bar{u}_\epsilon) \leq -C_0 < 0$ ,  $J_\epsilon(\underline{u}_\epsilon) > 0$  が成り立つ.

(2) さらに,  $N = 1$  であって,  $\Omega_+$  の連結成分の個数が  $p$  個あって, それぞれが”よく分離されている”とする. このとき, 少なくとも  $2^p - 1$  個のタイプの安定解が存在する.

- ロジスチックモデル

$$\epsilon^2 \Delta u + u(b(x) - u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

ではいかなる環境  $b(x)$  であっても, 正値解は一意的であることが知られている (容易にわかることでもある). しかしながら, この Allee 効果をもったモデルでは多重安定パターンが起こりうることを示している. 第1節で扱った unbalanced bistable 非線形項も Allee 効果を持ったもので, すでに多重安定パターンの出現することは第1節でみてきたとおりであるが, このモデルはある意味で退化した場合となっており, 第1節の方法は使えない. 実際, 適切な supersolution の構成法に部分的領域での *global minimizer* と別の領域での *Mountain Pass* 解とをつなぎ合わせるという手法を用いることが新しい.

[10] では, 空間1次元ということで *phase plane analysis* を用いて必要な解の評価を得たが, その後, 空間多次元でも適応可能な手法が変分法を用いて確立でき, 1次元の結果をほぼ多次元に拡張できたとともに, 1次元のときの証明もよりフレキシブルになった.

**定理 3.2** ([11])  $\Omega_+ = A_1 \cup \dots \cup A_p \cup B$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_p, B$  は *disjoint* で,  $\bar{A}_j \subset \Omega$  ( $j = 1, \dots, p$ ) とし, さらに各  $A_j, B$  達どうし, また各  $A_j$  と  $\partial\Omega$  は, それぞれ十分離れているとする. このとき, *local minimizer*  $u_\epsilon$  で  $u_\epsilon \sim 0$  on  $A_1 \cup \dots \cup A_p \cup \Omega_-$ , かつ  $u_\epsilon \sim 1$  on  $B$  なるものが存在する.

- 適切な supersolution の構成がキーポイントであり,  $A_j$  を含んだある領域での Mountain Pass 解とその他の領域上での global minimizer とを接続して構成する. 接続箇所での微分の評価を得るために  $\Delta u = u^2$  on  $D$ ,  $u(x) \rightarrow +\infty$  as  $d(x, \partial D) \rightarrow 0$  の一意正值解を用いる.

- この証明法は, より一般の  $b(x)$  に対しても適応可能である.

- Brezis-Nirenberg[4] の  $C^1$ -local minimizer が  $H^1$ -local minimizer となることを利用して, 求めた解がもとのエネルギー汎関数の local minimizer であることがわかる.

## REFERENCES.

- [1] 「非線形問題 1」西浦廉政著, 岩波講座・現代数学の展開, 岩波書店, 1999.
- [2] 「爆発と凝集」柳田英二(編), 東京大学出版会, 2006.
- [3] S.B. Angeniet, J.Mallet-Paret, L.A. Peletier, Stable transition layers in a semilinear boundary value problem, *J.Dif.Eq.* **67**, 212-242(1987).
- [4] H.Brezis, L.Nirenberg,  $H^1$  versus  $C^1$  local minimizers, *C.R. Academic Science Paris Ser. I* **317**, 465-472(1993).
- [5] E.N.Dancer, Shusen Yan, Construction of various types of solutions for an elliptic problems, *Calc.Var.* **20**, 93-118(2004).
- [6] N.Dancer, Shusen Yan, Multi-layer solutions for an elliptic problem, *J.Diff.Eq.* **194**, 382-405(2003).
- [7] A.S. do Nascimento, Local minimizers induced by spatial inhomogeneity with inner transition layer, *J.Diff.Eq.* **133**, 203-223(1997).
- [8] A.S. do Nascimento, On the role of diffusivity in some stable equilibria of a diffusion equation, *J. Diff. Eq.* **155**, 231-244(1999).
- [9] A.S. do Nascimento, Stable transition layers in a semilinear diffusion equation with spatial inhomogeneities in  $N$ - dimensional domains, *J.Diff.Eq.* **190** 16-38(2003).
- [10] T.Ide, K.Kurata, K.Tanaka, Multiple stable patterns for some reaction-diffusion equation in disrupted environments, *Discrete and Conti. Dyna. Sys.* **14**, 93-116(2006).
- [11] K.Kurata, Shusen Yan, in preparation.
- [12] K.Kurata, H.Matsuzawa, in preparation.
- [13] H.Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear differential equations, *Publ. Res.Inst.Math.Sci.* **15**(2), 401-454(1979).

- [14]H.Matsuzawa, Stable transition layers in a balanced bistable equation with degeneracy, *Nonlinear Analysis*, **58**, 45–67(2004).
- [15]H.Matsuzawa, Asymptotic profile of a radially symmetric solution with transition layers for an unbalanced bistable equation, *Electronic J. Diff.Eq.***2006**,No.05, 1–12(2006).
- [16]K.Nakashima, Stable transition layers in a balanced bistable equation, *Diff. Integral Eq.***13**, 1025-1038(2000).
- [17]K.Nakashima, Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation, *J. Diff.Eq.***191**,234–276(2003).
- [18]K.Nakashima, K.Tanaka, Clustering layers and boundary layers in spatially inhomogeneous phase transition problems, *Ann.Inst.H.Poincaré. Non Linéaire* **20**, 107–143(2003).
- [19] Shusen Yan, A Note on the talk at Tokyo Metropolitan University, 2004.

# 熱方程式の最大点挙動

石毛和弘 (東北大・理)

## 1 Introduction

本講演では, 全空間, 半空間, 球の外部領域などの非有界領域  $\Omega$  における熱方程式  $u_t = \Delta u$  の解  $u = u(x, t)$  の最大点集合 (Hot Spots)

$$H(t) = \left\{ x \in \bar{\Omega} : u(x, t) = \max_{y \in \bar{\Omega}} u(y, t) \right\}$$

の時間無限大における挙動について考察する. 一般的に, 関数の最大点 (最小点) の位置, 個数やその値は関数の形状に関する基本的な情報を与えることから, 熱方程式の解の最大点集合  $H(t)$  について研究することは重要であると考えられる. また, これらの解の形状研究は, 線形に限らず, 非線形拡散方程式の解の形状を調べる際, (将来的に) 有用な情報を与えるであろうということも研究の動機付けとしている.

具体的な問題としては,  $H(t)$  が空集合ではないという条件の下で

- (a) 時間無限大における  $H(t)$  の収束点, または, 無限遠点に発散するならば
  - 発散する方向, 発散する速さ
- (b)  $H(t)$  の個数

また, これらの応用・発展または副産物として

- (c) 臨界点の挙動
- (d) 解の微分の減衰の速さ
- (e) 等高面の形状 (凸性など)

などの問題が考えられる. 本講演では, Dirichlet 条件や Neumann 条件の下での熱方程式  $u_t = \Delta u$  の最大点挙動について考察する. さらに, それらの応用として, potential 項がついた線形熱方程式  $u_t = \Delta u - V(|x|)u$  の解の最大点挙動を扱うことによって, 裏に隠されている正值調和関数の果たす役割が明らかになっていくと思われる. また, 時間があれば, その応用として, 微分の減衰の速さなどについても解説したと考えている.

### 有界領域と非有界領域の違いについて

熱方程式の解の最大点を調べる際、有界領域と非有界領域を扱うのは大きくことなる。実際、次の熱方程式に対する初期値・境界値問題を考察してみる。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ただし、 $\Omega$  は滑らかな境界をもつ有界領域、 $\nu$  を  $\Omega$  に対する外向き単位法線ベクトル、 $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ 、 $\phi \in C(\bar{\Omega})$  とする。このとき、 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ) を固有値問題を

$$-\Delta\varphi = \lambda_k\varphi \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_\nu\varphi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の固有値とし、 $P_k$  を  $L^2(\Omega)$  における  $\lambda_k$  に対する固有空間への直交射影とする。特に

$$\lambda_1 = 0, \quad P_1 f = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) dx$$

が成立する。ただし、 $|\Omega|$  は領域  $\Omega$  の面積とする。このとき、

$$u(x, t) = P_1\phi + e^{-\lambda_2 t}(P_2\phi)(x) + O(e^{-\lambda_3 t}) \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

(収束ノルムは  $C^2(\bar{\Omega})$ .) ここで、異なる固有値に対する固有空間の直交性より

$$\int_\Omega P_2\phi dx = 0.$$

よって、 $P_2\phi \not\equiv 0$  in  $\Omega$  を仮定すると

$$\mathcal{M}(P_2\phi) \equiv \left\{ x \in \bar{\Omega} : (P_2\phi)(x) = \max_{x \in \bar{\Omega}} (P_2\phi)(y) \right\} \neq \Omega$$

であり、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{|x - y| : x \in H(t), y \in \mathcal{M}(P_2\phi)\} = 0.$$

よって、“ほとんどの”の初期値に対して、解の最大点集合の挙動は第二 Neumann 固有関数の形状によって決定される。例えば、 $\Omega = (0, 1)$  の場合、第二 Neumann 固有関数は  $\cos \pi x$  となるので、“ほとんどの”の初期値に対して  $H(t)$  は境界に近づいていくことがわかる。この考察は 1975 年に Rauch によって Rauch observation と呼ばれている。その後、 $\Omega$  が凸の場合、その第

二 Neumann 固有関数の最大点 (最小点) は境界にのみ存在するという “hot spots conjecture” が Kawohl (1985) によって提唱されたが, その解析は困難であり, 固有関数が具体的に計算できる場合以外では [1], [8] で扱われている特殊な 2 次元領域について考察が為されているのみである. ただし,  $\Omega$  が凸でない場合には, 第二 Neumann 固有関数の最大値を内点において達成する例があることも知られている ([2] を参照).

非有界領域においては, 固有関数に対応する解の挙動を決定する指標となるべきものがない. また, 基本解を用いて具体的に解を表示して解の最大点挙動を研究する方法では球の外部領域という最も単純な非有界領域に対しては, 十分な解析は現段階では困難である場合が多い. 本講演では, 全空間および球の外部領域という単純な非有界領域のみを扱うものとする.

## 2 $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合について

ここでは, 全空間における熱方程式の初期値問題

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty), \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^N$$

について扱うものとする. ただし,

$$\phi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \int_{\mathbf{R}^N} \phi dy > 0$$

とする. 全空間における熱方程式の解の最大点挙動は, Chavel & Karp (1990) によって初めて考察された ([3] を参照). 彼らの結果を解の具体的表示を用いて追ってみることにする.

$\text{supp } \phi \subset B(0, R)$  となるように  $R > 0$  をとっておく. このとき,

$$u(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbf{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \phi(y) dy$$

であるから,

$$(4\pi t)^{\frac{N}{2}} u(0, t) \geq e^{-\frac{R^2}{4t}} \int_{\mathbf{R}^N} \phi dy,$$

$$(4\pi t)^{\frac{N}{2}} u(x, t) \leq e^{-\frac{(2R)^2}{4t}} \int_{\mathbf{R}^N} \phi dy \quad |x| \geq 3R.$$

よって、任意の  $t > 0$  に対して  $H(t) \neq \emptyset$  であり  $H(t) \subset B(0, 3R)$ . さらに、 $x \in B(0, 3R)$ ,  $t \gg 1$  に対して

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{\frac{N}{2}} \partial_{x_i} u &= - \int_{\mathbf{R}^N} \frac{x_i - y_i}{2t} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \phi(y) dy \\ &= - \int_{\mathbf{R}^N} \frac{x_i - y_i}{2t} \phi dy + O(t^{-2}), \\ (4\pi t)^{\frac{N}{2}} (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)(x, t) &= \int_{\mathbf{R}^N} \left[ -\frac{\delta_{ij}}{2t} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{4t^2} \right] (1 + o(1)) \phi dy \\ &= -\frac{\delta_{ij}}{2t} (1 + o(1)) \int_{\mathbf{R}^N} \phi dy. \end{aligned}$$

$x \in H(t)$  ならば、 $x \in B(0, 3R)$  かつ  $(\nabla_x u)(x, t) = 0$  であるから、ある  $T > 0$  と曲線  $x = x(t) \in C^\infty([T, \infty) : \mathbf{R}^N)$  が存在して

$$H(t) = \{x(t)\}, \quad t \geq T, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \int_{\mathbf{R}^N} y \phi dy / \int_{\mathbf{R}^N} \phi dy$$

が成立する. この他に、領域に関する折り返しと比較原理を用いる方法により、すべての  $t$  に対して、 $H(t)$  は初期値関数  $\phi$  の support の凸閉に含まれることもわかる

次に、領域が半空間  $\mathbf{R}_+^N = \{x_N > 0\}$  の場合について考えてみる. 半空間の場合については、神保 & 坂口 (1994) ([9] を参照) について初めて考察されたが、ここでは、Neumann 境界条件の下で考察してみる.  $u$  を  $\mathbf{R}_+^N$  における熱方程式の解とし、

$$u_{x_N} = 0 \quad \text{on} \quad \{x_N = 0\} \times (0, \infty), \quad \phi \in C_0(\mathbf{R}_+^N)$$

とする. このとき、

$$\int_{\mathbf{R}_+^N} \phi dy > 0$$

を仮定しておく. このとき、 $u(x', x_N, t) = u(x', -x_N, t)$  とすることによって、 $u$  は全空間における熱方程式の解となる. よって、十分時間が経過すると、 $H(t)$  は一点になり、 $u$  の対称性から、ある  $T > 0$  と曲線  $x = x(t) \in C^\infty([T, \infty) : \mathbf{R}_+^N)$  が存在して  $H(t) = \{x(t)\}$ ,  $t \geq T$  かつ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \int_{\mathbf{R}_+^N} y_i \phi dy / \int_{\mathbf{R}_+^N} \phi dy \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad x_N(t) = 0$$

が成立する.



**Remark 2.1** *Dirichlet* 条件の場合も, 解の具体的な表示により,  $H(t)$  の挙動を調べることができ,  $t^{1/2}$  の早さで無限に発散していく.

### 3 球の外部領域における $H(t)$ の挙動

ここでは, 熱方程式に対する初期値・境界値問題

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

及び

$$(3.2) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

の解の最大点挙動について考察する. ただし,  $\Omega = \{|x| > 1\}$  とし,

$$(3.3) \quad \phi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx > 0$$

を仮定する. これらの場合は, 神保・坂口 [9] によって初めて考察されたが, 基本解による具体的な表示による解析手法はこの単純な外部領域でさえも有効でなく, 彼らは初期値に球対称性を仮定し解析を行った. これにより, Neumann 条件の場合には, ある  $T > 0$  が存在し

$$(3.4) \quad H(t) \subset \partial\Omega = \{|x| = 1\}, \quad t \geq T,$$

Dirichlet 条件の場合には,  $N = 3$  の場合のみ

$$H(t) = \{|x| = r(t)\}, \quad t \geq T, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (2t)^{-1/2} r(t) = 1$$

が示された. ここで, 「初期値の球対称性を仮定しない場合, どうなるのか」という疑問が湧く. この問題に対して, 2005年に石毛 [5], [6] によって次の結果が得られている. 以下の結果は  $\phi \in C_0(\Omega)$  という仮定を  $\phi \in L^2(\Omega, e^{|x|^2/4} dx)$  に一般化しても成立する.

#### Neumann 条件の場合

Neumann 条件下における初期値  $\phi$  に対する重心に相当する量

$$A_N(\phi) = \int_{\Omega} y \left( 1 + \frac{|y|^{-N}}{N-1} \right) \phi dy / \int_{\Omega} \phi dy$$

を導入する. このとき,

$$A_D(u(t)) = A_D(\phi), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} y \phi dy / \int_{\Omega} \phi dy = A_N(\phi)$$

が成立する. まず, (3.4) の拡張に相当する結果を与える.

**Theorem 3.1**  $u$  を (3.1) の解とし, (3.3) を仮定する. このとき,  $A_N(\phi) \in B(0,1)$  ならば, ある  $T > 0$  が存在し

$$H(t) \subset \partial\Omega = \{|x| = 1\}, \quad t \geq T.$$

次に, 一般的には (3.4) は成立しないことを示す定理を与える.

**Theorem 3.2** Theorem 3.1 と同じ仮定をする. さらに

$$A_N(\phi) \neq 0$$

とする. このとき,

$$x_* = A_N(\phi) \quad \text{if } A_N(\phi) \in \Omega, \quad x_* = \frac{A_N(\phi)}{|A_N(\phi)|} \quad \text{if } A_N(\phi) \notin \Omega$$

とおくと,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup\{|x - x_*| : x \in H(t)\} = 0$$

が成立する (つまり,  $H(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  に対して点  $x_*$  に近づいていく).

### **Dirichlet 条件の場合**

Dirichlet 条件の場合の結果を与えるために, 対応する初期値の総熱量, 重心を導入する.

$$V_D(\phi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{|x|^{N-2}}\right) \phi dy & \text{if } N \geq 3, \\ \int_{\Omega} \phi \log |x| dy & \text{if } N = 2 \end{cases}$$

$$A_D(\phi) = \int_{\Omega} y \phi \left(1 - \frac{1}{|x|^N}\right) dy / V_D(\phi)$$

これらは, それぞれ保存量となっている. このとき, 次の定理が成立する.

**Theorem 3.3**  $u$  を (3.2) の解とし,  $V_D(\phi) > 0$  を仮定する. このとき,  $N \geq 3$  ならば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(x, t) dx = V_D(\phi),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{N}{2}} u(x, t) = (4\pi)^{\frac{N}{2}} V_D(\phi) \left(1 - \frac{1}{|x|^N}\right)$$

(収束は広義一様). また,  $N = 2$  ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\log t) \int_{\Omega} u(x, t) dx = 2V_D(\phi),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t (\log t)^2 u(x, t) = \pi^{-1} V_D(\phi) \log |x|$$

が成立する (収束は広義一様).

この定理より,  $H(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  に対して, 無限遠点に向かって逃げていくことがわかる. 次の  $H(t)$  の逃げる速さに関する結果を与える.

**Theorem 3.4** Theorem 3.3 と同じ仮定をする. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in H(t)} \{\zeta(t)^{-1} |x|^N - 1\} = 0.$$

ただし,

$$\zeta(t) = 2(N-2)t \quad \text{if } N \geq 3, \quad \zeta(t) = 2t(\log t)^{-1} \quad \text{if } N = 2.$$

次に  $H(t)$  の数, 逃げる方向性に関する結果を与える.

**Theorem 3.5** Theorem 3.3 と同じ仮定をする. さらに,  $A_D(\phi) \neq 0$  を仮定する. このとき, ある  $T > 0$  と曲線  $x = x(t) \in C^\infty([T, \infty) : \bar{\Omega})$  が存在し,

$$H(t) = \{x(t)\}, \quad t \geq T, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{A_D(\phi)}{|A_D(\phi)|}.$$

さらに,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = C(\phi) \quad \text{if } C(\phi) \in \Omega, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{C(\phi)}{|C(\phi)|} \quad \text{if } C(\phi) \notin \Omega.$$

本講演は, これらの定理の証明のアイデアとその応用について解説するものである.

## 4 $H(t)$ の挙動の解析手法について

熱方程式の解の挙動を調べるには様々な手法があるが, ここでは自己相似変換に基づいた変換を行って解挙動を求めていく. これを通して, 本質的な解析の困難点も明らかになると思われる.

まず, Neumann 条件下における  $H(t)$  の挙動を調べることにし,

$$v(y, s) = (1+t)^{\frac{N}{2}} u(x, t), \quad y = (1+t)^{-\frac{1}{2}} x, \quad s = \log(1+t)$$

とおくと,

$$\begin{cases} \partial_s v = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho \nabla_y v) + \frac{N}{2} v & \text{in } \bigcup_{s>0} (\Omega(s) \times \{s\}), \\ \partial_\nu v = 0 & \text{on } \bigcup_{s>0} (\partial\Omega(s) \times \{s\}), \\ v(y, 0) = \phi(y) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

をみtas. ただし,  $\rho(y) = e^{\frac{|y|^2}{4}}$ ,  $\Omega(s) = \{|y| > e^{-s/2}\}$  とする. このとき, 固有値問題

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho \nabla_y \varphi) = \lambda \varphi \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad \varphi \in H^1(\mathbf{R}^N, \rho dy).$$

を考察することができ, その固有関数は  $e^{-\frac{|y|^2}{4}}$  の空間微分によって与えられ, その固有値は  $(N+i)/2$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) と与えることができる. これにより,  $\Omega = \mathbf{R}^N$  の場合であれば, あたかも有界領域の場合であるかのように Fourier 級数展開ができ,  $L^2(\mathbf{R}^N, \rho dy)$  における解の挙動を調べることができ, さらに解の regularity theorem を用いることにより,  $C^2(K)$  ( $K$  は任意の有界閉集合) における解の挙動を調べることができる.

今,  $\Omega = \{|x| > 1\}$  であるから,  $\mathbf{R}^N$  の場合の議論がそのままで行くわけではないが,  $s$  が十分大きければ,  $\Omega(s)$  における固有値問題の解は全空間の場合で近似できることは予想でき, 実際, うまくいく. よって, Fourier 級数展開もどきが可能であり,  $L^2(\Omega(s), \rho dy)$  における解の漸近挙動を解析できる. ここから本質的な困難さが現れる.  $\partial\Omega(s)$  の曲率は  $s \rightarrow \infty$  につれて無限大に発散するために, 解の regularity theorem を用いることができず,  $L^2$  で求めた極限から解の微分の情報を得ることはできない. ただし, 変数を元に戻して, 解の regularity theorem を適応することも考えられるが, これらを正当化するためには, 熱方程式の解の微分減衰に関する不等式

$$\|(\nabla_x^j u)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \exists C t^{-\frac{N+|j|}{2}} \|\phi\|_{L^1(\Omega)}, \quad t \gg 1, \quad |j| = 1, 2, 3$$

が必要であるが、この不等式が成立するかどうか不明であった。(最近、壁谷氏との共同研究によって一般には成立しないと共に、最適な減衰の速さについて結果を得ている [7].) そもそも、 $L^2(\Omega(s), \rho dy)$  における解の漸近挙動は境界条件に依存しないので、それ自体が矛盾に満ちているとも言える。

これらの問題点を解消するために、以下の考察を行っていく。まず、 $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  を  $\Delta_{\mathbf{S}^{N-1}}$  の固有値、つまり  $\omega_k = k(N+k-2)$  とし、 $\omega_k$  に対応する固有空間の次元を  $l_k$ 、固有関数を  $Q_{k,i}(x/|x|)$  ( $i = 1, \dots, l_k$ ) と書くことにする。これらを用いて、初期値を球対称関数と球面調和関数の積の和として、以下のように表現しておく：

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{l_k} \phi_{k,i}(|x|) Q_{k,i} \left( \frac{x}{|x|} \right) \quad \text{in } L^2(\Omega, \rho dy).$$

さらに、 $u_{k,i}$  を初期値  $\phi_{k,i}(|x|) Q_{k,i}(x/|x|)$  に対応する熱方程式の解とする。このとき、 $v_{k,i}$  を

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v - \frac{\omega_k}{|x|^2} v & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_\nu v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi_{k,i}(|x|) & \text{in } \mathbf{R}^N \end{cases}$$

の解とする。このとき、 $v_{k,i}$  は球対称関数であり、

$$u_{k,i}(x, t) = v_{k,i}(x, t) Q_{k,i} \left( \frac{x}{|x|} \right) \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty)$$

をみたしている。この  $v_{k,i}$  について変数変換を行い、

$$w_{k,i}(y, s) = (1+t)^{\frac{N+k}{2}} v_{k,i}(x, t), \quad y = (1+t)^{-\frac{1}{2}} x, \quad s = \log(1+t)$$

とし、この  $w_{k,i}$  に対して  $L^2(\Omega(s), \rho dy)$  における固有関数展開を行って解挙動を調べる。この解析を通して、 $\|w_{k,i}(s)\|_{L^2(\Omega(s), \rho dy)}$  の有界性がわかり、

$$\|v_{k,i}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \exists C t^{-\frac{N}{4} - \frac{k}{2}} \|\phi\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}, \quad t > 0$$

がわかる。さらに、 $0 < \epsilon < L$  に対して、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} w_{k,i}(y, s) = \exists c |y|^k e^{-\frac{|y|^2}{4}}$$

が成立する (ただし, この収束は  $\epsilon \leq |y| \leq L$  をみたす  $y$  に対して一様).

一方,  $U_k$  を常微分方程式

$$U'' + \frac{N-1}{r}U' - \frac{\omega_k}{r^2}U = 0 \quad \text{in } (1, \infty), \quad U(0) = 1, \quad U'(0) = 0$$

の解とする. このとき,  $U_k(r) \sim r^k$  as  $r \rightarrow \infty$  が成立する. また,  $[0, \infty)$  上の連続関数  $f$  に対する

$$U'' + \frac{N-1}{r}U' - \frac{\omega_k}{r^2}U = f \quad \text{in } (1, \infty), \quad U(0) = U'(0) = 0$$

の解を  $F_k[f]$  と書くことにすると

$$F_k[f](r) = r^k \int_1^r s^{1-N-2k} \left( \int_1^s \tau^{N+k-1} f(\tau) \right) ds.$$

このとき,  $v_{k,i}$  は任意の  $t > 0$  に対して

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_{k,i} + \frac{\partial}{\partial r} v_{k,i} - \frac{\omega_k}{r^2} v_{k,i} = \partial_t v_{k,i} \quad r = |x| \in (1, \infty)$$

をみたしているので, 常微分方程式の解の一意性定理より

$$(4.1) \quad v_{k,i}(x, t) = \exists \zeta_k(t) U_k(|x|) + F_k[(\partial_t v_{k,i})(t)](|x|), \quad x \in \Omega.$$

ここで,  $|x| = (1+t)^{1/2}$  となる  $x \in \Omega$  に対して,

$$v_{k,i}(x, t) \sim \exists c'(1+t)^{-\frac{N+k}{2}} \sim \zeta_k(t) U_k((1+t)^{1/2})(1+o(1))$$

as  $t \rightarrow \infty$ . これにより,

$$(4.2) \quad \zeta_k(t) \sim c't^{-\frac{N+k}{2}} [U_k((1+t)^{1/2})]^{-1} \sim \exists c''t^{-\frac{N}{2}-k}$$

as  $t \rightarrow \infty$ . したがって, (4.1), (4.2) より,  $v_{k,i}$  の微分を含めた挙動を調べることが可能になる. また,  $k=0$  の場合は,  $U_0 \equiv 1$  というとても単純な関数が現れ過ぎて, あまり解の形状に情報を与えないが,  $\partial_t v_{k,i}$  に同様の解析を行い公式を得て, それを (4.1) に代入することによって詳しい解挙動を調べることが可能になる. これらを通して,  $u$  の微分の挙動を調べることが可能になり, 結果的に  $H(t)$  の挙動を調べることが可能になる.

## 5 その後の進展について

最近, 大阪府立大の壁谷善継氏との挙動研究を通して, potential 項付きの熱方程式

$$\partial_t u = \Delta u - V(|x|)u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

の解挙動について研究を行っている. ただし,  $\Omega = \mathbf{R}^N$  または  $\Omega = \{|x| > 1\}$  とし,  $V$  に対して

$$V \geq 0, \quad V(r) = \frac{\omega}{r^2}(1 + o(1)) \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

を仮定する. 既に前の議論でも片鱗は見せているが, 微分を含めた解の挙動において, 次の常微分方程式の解

$$U'' + \frac{N-1}{r}U' - V(r)U = 0$$

の解の形状が重要な役割をみせる. 実際,  $U$  の  $r = \infty$  における増大度とその微分が解の減衰速度を決定しているとさえ言える. 例えば,  $\Omega = \{|x| > 1\}$  とし, 解の境界条件を

$$\mu u + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

と置くと,  $U$  の形状を見ることによって,

$$\|(\nabla_x u)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \exists C t^{-\frac{N}{2p} - \frac{1}{2}} \|\phi\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \gg 1$$

がすべての  $\phi \in L^p(\Omega)$  に対して成立するための必要十分条件は

$$\omega \geq \omega_1 = N - 1 \quad \text{or} \quad V \equiv 0, \mu = 0 \quad (\text{Neumann 条件の場合})$$

となる. また,  $H(t)$  もこの  $U$  の形状によって無限遠点へ発散していく速度が決定できることもわかってきている.

これらの研究を通して, 非有界領域における時間無限大における線形熱方程式の解の形状は正值調和関数によって決定されることが示唆されるが, その解析はまだまだ始まったばかりと言っても良い. また, 半線形拡散方程式などの非線形方程式への応用はこれからであり, 今後の発展が多いに期待されるものと考えている.

## References

- [1] R. Banūelos and K. Burdzy, On the “Hot Spot Conjecture” of J. Rauch, *Jour. Func. Anal.*, 164 (1999), 1-33.
- [2] K. Burdzy and W. Werner, A counterexample to the “hot spots” conjecture, *Ann. of Math.*, (1999), 309-317.
- [3] I. Chavel and L. Karp, Movement of hot spots in Riemannian manifolds, *J. Analyse Math.*, 55 (1990), 271-286.
- [4] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, *Nonlinear Anal. T. M. A.*, 11 (1987), 1103-1133.
- [5] K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Neumann boundary condition, *J. Diff. Eqns.*, 212 (2005), 394-431.
- [6] K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Dirichlet boundary condition, preprint.
- [7] K. Ishige and Y. Kabeya, Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball, preprint.
- [8] D. Jerison and N. Nadirashvili, The “hot spots” conjecture for domains with two axes of symmetry, *J. Amer. Math. Soc.*, 13 (2000), 741-772.
- [9] S. Jimbo and S. Sakaguchi, Movement of hot spots over unbounded domains in  $\mathbf{R}^N$ , *J. Math. Anal. Appl.* 182 (1994), 810-835.
- [10] B. Kawohl, *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*, Springer Lecture Notes in Math. 1150 (1985).
- [11] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
- [12] N. Mizoguchi, H. Ninomiya, and E. Yanagida, Critical exponent for the bipolar blowup in a semilinear parabolic equation, *J. Math. Anal. Appl.* 218 (1998), 495-518.



- [13] J. Rauch, Five problems: An introduction to the qualitative theory of partial differential equations, in *Partial Differential Equations and Related Topics*, Springer Lecture Notes in Math. 446 (1975).