変分法と幾何学

新居俊作

2023 年 4 月 13 日

概 要

与えられた関数が最小となる点を求める問題は、高校以来微分係数が 0 となる点を探すことによって解の候補を見つけることができることことを学んできた。同様に、与えられた条件下で長さが最小となる曲線や面積が最小となる曲面を求める問題は、長さや面積の曲線や曲面を動かしたときの微分のようなものが 0 になる曲線、曲面を求めることよって候補を見つけることができる。この「微分のようなもの」を求める方法が変分法である。

本講では変分法の考え方を解説し、それを用いて曲面上の最短曲線の方程式や空間内の面積最小曲面の方程式を導く方法を紹介する。

1 光学的距離と Snell の法則

光の屈折、反射について $\dfrac{\text{距離}}{\text{光速}}$(=光がその距離を進むのにかかる時間) で定義される光学的距離を用いて考えるのが幾何光学である。基本原理は、光は光学的距離が最小となる経路を進む、という Fermat(フェルマー) の原理であり、光の経路に関する全ての現象はこの原理で説明される。

Fermat の原理の簡単な応用に次の Snell (スネル) の法則がある：

定理 1. その中での光速が v_I の媒質 I 中を発した光が光速が v_{II} の 媒質 II に入る時、媒質 I と媒質 II の境界面での屈折は入射角を θ_I、屈折角を θ_{II} として次の関係を満たす：

$$\frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_{II}} = \frac{v_I}{v_{II}} \tag{1.1}$$

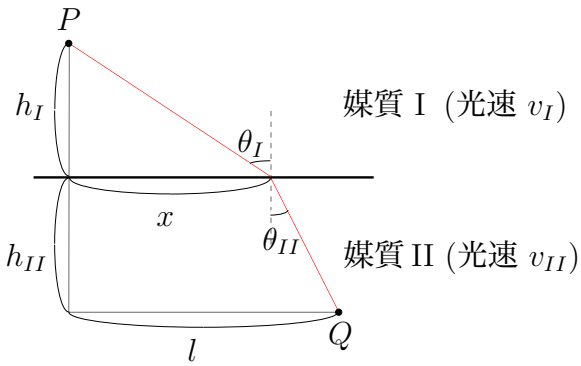

図 1.1:

証明. 図 1.1 で、点 P から点 Q へ至る折線の光学的距離を D と置くと

$$D(x) = \frac{1}{v_I}\sqrt{h_I^2 + x^2} + \frac{1}{v_{II}}\sqrt{h_{II}^2 + (l-x)^2} \tag{1.2}$$

x を動かして折線を変えた時の D の最小値を求める。

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{v_I}\frac{x}{\sqrt{h_I^2 + x^2}} - \frac{1}{v_{II}}\frac{l-x}{\sqrt{h_{II}^2 + (l-x)^2}} \tag{1.3}$$

なので

$$\frac{dD}{dx} = 0 \iff \frac{\frac{x}{\sqrt{h_I^2+x^2}}}{\frac{l-x}{\sqrt{h_{II}^2+(l-x)^2}}} = \frac{v_I}{v_{II}} \tag{1.4}$$

これは (1.1) である。

明らかに $D(x)$ には最小値があり、$\frac{dD}{dx} = 0$ となるのは (1.1) が成り立つときのみなので、これが $D(x)$ が最小となる条件である。 □

2 変分法

Snell の法則を導くにあたって、以下を暗黙のうちに仮定していた：

- 光は一様な媒質中は直線を進み、進路を変えるのは媒質の境界のみである。

この仮定のもとで、屈折点の一を一つの実変数 x で表して微分することができた。しかし、一般的な経路に沿った量の最小値を求める問題は一変数関数に帰着できるとは限らない。そこで、この様な問題を一般的に扱う枠組みを定式化する。

$F(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$, $(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n)$ を滑らかな関数として、閉区間 $[t_1, t_2]$ で定義された $\mathbb{R}^n$ 内の滑らかな曲線 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ に沿った次の形の積分を考える：

$$I(\boldsymbol{x}) = \int_{t_1}^{t_2} F(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1(t), \ldots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \ldots, \frac{dx_n}{dt}(t))dt \tag{2.1}$$

この値は曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ ごとに決まり、$\boldsymbol{x}(t)$ を変えると $I(\boldsymbol{x})$ の値も変わる。例えば、一様ではない媒質中を進む光については、位置 $\boldsymbol{x}$ における光速を $v(\boldsymbol{x})$ として

$$F(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|}{v(\boldsymbol{x})} \tag{2.2}$$

とすると、$I(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}(t_1)$ から $\boldsymbol{x}(t_2)$ への経路 $\boldsymbol{x}$ に沿った光学的距離になる。

一般に、F と両端 $\boldsymbol{x}(t_1)$、$\boldsymbol{x}(t_2)$ が与えられた時、両端 $\boldsymbol{x}(t_1)$、$\boldsymbol{x}(t_2)$ を固定した上で $\boldsymbol{x}(t_1)$ から $\boldsymbol{x}(t_2)$ へのあらゆる経路 $\boldsymbol{x}(t)$ を考えた時の $I(\boldsymbol{x})$ の最小値が存在すると仮定して、その最小値を与える $\boldsymbol{x}$ を求める方法を考える。

そのために多変数関数の微分を思い出そう。

n 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について、$f(\boldsymbol{x}_0)$ と $f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x})$ の関係を以下の様に表示する：

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + (\Delta\boldsymbol{x} \text{ の一次式}) + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|) \tag{2.3}$$

このとき ($\Delta\boldsymbol{x}$ の一次式) とはつまり $\Delta\boldsymbol{x}$ を引数とする線型写像のことなので、これは $\Delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$ として

$$a_1\Delta x_1 + \cdots + a_n\Delta x_n = (\boldsymbol{a}, \Delta\boldsymbol{x}), \quad \text{但し } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

と書かれる。たとえば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において $f(\boldsymbol{x})$ が C^1 級であるとき (2.3) のような表現ができて、$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$ であるのは微分積分で習ったとおりである：

定理 2.

n 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が C^1 級である、すなわち各変数 x_i に対する偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が存在し、更にそれらは連続である時 $\mathbb{R}^n$ 各点の各点 $\boldsymbol{x}_0$ において以下が成り立つ：

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + (\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\boldsymbol{x}) + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|), \quad \Delta\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

証明.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とし、 $f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の周りで考える。

平均値の定理より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) &= \{f(x_1, x_2, \ldots, , x_n) - f(0, x_2, \ldots, x_n)\} \\ &\quad + \{f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(0, 0, x_3, \ldots, x_n)\} \\ &\quad\quad + \cdots + \{f(0, \ldots, 0, x_n) - f(0, \ldots, 0, 0)\} \\ &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, c_2, x_3 \ldots, x_n) \\ &\quad\quad + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, \ldots, 0, c_n) \end{aligned} \tag{2.6}$$

但し、$0 < c_i < x_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ 。

ここで、$i = 1, 2, \ldots, n$ について

$$\varepsilon_i(0, \ldots, 0, x_i, \ldots, x_n) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \cdots, 0, c_i, x_{i+1} \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) \tag{2.7}$$

とおくと

$$\varepsilon_i(0, \ldots, 0, x_i, \ldots, x_n) \to 0 \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}) \tag{2.8}$$

であり、 (2.6) より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{0}) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{0}) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{0}) \\ + x_1 \varepsilon_1(x_1, \ldots, x_n) + x_2 \varepsilon_2(0, x_2, \ldots, x_n) \\ + \cdots + x_n \varepsilon_n(0, \ldots, 0, x_n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

つまり (2.5) が成り立つ。

一般の $\boldsymbol{x}_0$ についても同様。

□

定義 1.

(2.5) が成り立つとき $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ において全微分可能であるという。

問題 1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (\ (x,y)\neq 0\ )\\ 0 & (\ (x,y)=0\ )\end{cases} \tag{2.10}$$

とするとき、$f(x,y)$ は $(0,0)$ で任意の方向に方向微分可能 (従って特に $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ は存在する) だが全微分不可能であることを示せ。

但し、n 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とゼロベクトルではない $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ について

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) := \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x})}{h} \tag{2.11}$$

が存在する時、これを f の $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分とよぶ。

補題 1.

$f(\boldsymbol{x})$ は任意の $\boldsymbol{x}$ で全微分可能とするとき、f が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ で最小値を取るならば $\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)=0$ が成り立つ。

証明.

仮定より (2.5) が成り立つのが、h を実数として $\Delta\boldsymbol{x}$ に $h\cdot\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)$ を代入すると

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}_0+h\cdot\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0))\\ &=f(\boldsymbol{x}_0)+(\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0), h\cdot\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0))+o\left(\|h\cdot\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)\|\right)\\ &=f(\boldsymbol{x}_0)+h\|\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)\|^2+o(h)\end{aligned} \tag{2.12}$$

従って $\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$ ならば、負で絶対値が十分小さい h について

$$f(\boldsymbol{x}_0+h\cdot\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0))<f(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.13}$$

となる。 □

同様のことを $I(\boldsymbol{x})$ について考える：

$$I(\boldsymbol{x})=\int_{t_1}^{t_2} F(\boldsymbol{x}(t),\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t))dt \tag{2.14}$$

両端 $\boldsymbol{x}(t_1)$、$\boldsymbol{x}(t_2)$ を固定した上で $\boldsymbol{x}(t_1)$ から $\boldsymbol{x}(t_2)$ への経路を $\boldsymbol{x}$ から少しずらしたものを考える。すなわち、滑らかな曲線 $\delta\boldsymbol{x}(t)=(\delta x_1(t),\ldots,\delta x_n(t))$

で $\delta\boldsymbol{x}(t_1)=\delta\boldsymbol{x}(t_2)=\mathbf{0}$ を満たすものを取り、$(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})(t):=\boldsymbol{x}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t)$ として

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}) &= \int_{t_1}^{t_2} F\big((\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})(t), \frac{d(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})}{dt}(t)\big)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} F\big(\boldsymbol{x}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)+\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)\big)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} F\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left\{F\left(\boldsymbol{x}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)+\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right) - F\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)\right\}dt \\
&= I(\boldsymbol{x}) + \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)\delta\boldsymbol{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right\}dt \\
&\qquad + o\left(\sup_{t_1\le t\le t_2}|\delta\boldsymbol{x}(t)| + \sup_{t_1\le t\le t_2}\left|\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right|\right)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

ここで $\delta\boldsymbol{x}(t_1)=\delta\boldsymbol{x}(t_2)=\mathbf{0}$ を用いて部分積分すると右辺の被積分関数の第二項は

$$
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)\delta\boldsymbol{x}(t)dt
\tag{2.16}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&I(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}) \\
&= I(\boldsymbol{x}) + \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right)\right\}\delta\boldsymbol{x}(t)dt \\
&\qquad + o\left(\sup_{t_1\le t\le t_2}|\delta\boldsymbol{x}(t)| + \sup_{t_1\le t\le t_2}\left|\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right|\right) \\
&= I(\boldsymbol{x}) + \left(\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}(\cdot), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(\cdot)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}(\cdot), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(\cdot)\right)\right\}, \delta\boldsymbol{x}(\cdot)\right) \\
&\qquad + o\left(\sup_{t_1\le t\le t_2}|\delta\boldsymbol{x}(t)| + \sup_{t_1\le t\le t_2}\left|\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t)\right|\right)
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

ここで、閉区間 $[t_1,t_2]$ で定義された連続関数 f,g に対し $(f,g):=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t)dt$ で内積を定めている。すなわち

$$
\mathrm{grad}\ I(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}(\cdot), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(\cdot)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}(\cdot), \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(\cdot)\right)
\tag{2.18}
$$

と考えると $I(\boldsymbol{x})$ についても (2.5) と同様の表現が得られたことになる。

(2.5) と同様に次が成り立つ。

定理 3. $I(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0(t)$ で最小値 (極値) を取るならば次が成り立つ：

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}_0(t), \frac{d\boldsymbol{x}_0}{dt}(t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{x}_0(t), \frac{d\boldsymbol{x}_0}{dt}(t)\right) = 0, \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{2.19}$$

$\boldsymbol{x}_0(t)$ についてのこの微分方程式をオイラー・ラグランジュ方程式とよぶ。

この証明には次の補題を使う：

補題 2.

$$r(t) := \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \end{cases} \tag{2.20}$$

とすると $r(t)$ は C^∞ 級で $r^{(n)}(0) = 0,\ (n \in \mathbb{N})$ が成り立つ。

問題 2. 補題 2 を証明せよ。

この $r(t)$ を用いて $\tilde{r}(t) := \frac{r(t)}{r(t)+r(1-t)}$ とすると $\tilde{r}(t)$ は単調増加で

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 1 & (t \geq 1) \end{cases} \tag{2.21}$$

を満たす。よって $\rho(t) := \tilde{r}(t+2)\tilde{r}(2-t)$ と定めると $\rho(t)$ は $-2 < t < -1$ で単調増加 $1 < t < 2$ で単調減少で以下を満たす：

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & (t \leq -2,\ 2 \leq t) \\ 1, & (-1 \leq t \leq 1) \end{cases} \tag{2.22}$$

定理 3 の証明.

先ず $n = 1$ すなわち $\boldsymbol{x}(t) = x(t)$ が $[t_1, t_2]$ から $\mathbb{R}$ への関数の場合を考える。

$$G(t) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0(t), \frac{dx_0}{dt}(t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x_0(t), \frac{dx_0}{dt}(t)\right) \tag{2.23}$$

とおき $I(x(\cdot))$ が $x(t) = x_0(t)$ で最小値を取るならば $G(t) = 0,\ (t_1 \leq t \leq t_2)$ であることを示す。

(2.17) は

$$I(x_0(\cdot)+\delta x(\cdot)) = I(x_0(\cdot)) + (G(\cdot), \delta x(\cdot)) + o\left(\sup_{t_1\le t\le t_2}|\delta x(t)| + \sup_{t_1\le t\le t_2}\left|\frac{d\delta x}{dt}(t)\right|\right) \tag{2.24}$$

となる。

もし $G(\tau)>0$ となる $t_1<\tau<t_2$ が存在するならば、$G(t)$ は滑らかな関数の合成で連続なので、ある $\varepsilon>0$ に対し
$\tau-\varepsilon<t<\tau+\varepsilon$ で $G(t)>0$ となる。

そこで $\delta x(t)=\rho(\frac{2(t-\tau)}{\varepsilon})$ と置くと

$$G(t)\delta x(t)\begin{cases} >0, & (\tau-\varepsilon<t<\tau+\varepsilon) \\ =0, & (t_1\le t<\tau-\varepsilon,\ \text{または}\ \tau+\varepsilon<t\le t_2) \end{cases} \tag{2.25}$$

なので、$\alpha\in\mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} &I(x_0(\cdot)+\alpha\delta x(\cdot)) \\ &= I(x_0(\cdot)) + (G(\cdot), \alpha\delta x(\cdot)) + o\left(\sup_{t_1\le t\le t_2}|\alpha\delta x(t)| + \sup_{t_1\le t\le t_2}\left|\alpha\frac{d\delta x}{dt}(t)\right|\right) \\ &= I(x_0(\cdot)) + \int_{t_1}^{t_2} G(t)\alpha\delta x(t)dt + o\left(\alpha\sup_{t_1\le t\le t_2}|\delta x(t)| + \alpha\sup_{t_1\le t\le t_2}\left|\frac{d\delta x}{dt}(t)\right|\right) \\ &= I(x_0(\cdot)) + \alpha\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} G(t)\delta x(t)dt + o(|\alpha|) \end{aligned} \tag{2.26}$$

$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} G(t)\delta x(t)dt>0$ より第二項は α に比例するので α が負で絶対値が十分小さい時には、$I(x_0(\cdot)+\alpha\delta x(\cdot))<I(x_0(\cdot))$ となり $I(x(\cdot))$ は $x(t)=x_0(t)$ では最小値は取らない。

$G(\tau)<0$ の場合も同様。

$\tau=t_1$ または $\tau=t_2$ で $G(\tau)>0$ となる時は、$G(t)$ の連続性より t_1 または t_2 に十分近い τ で $G(\tau)>0$ となるので、やはり上述の議論ができる。

$n\ge 2$ の場合は、各成分ごとに同じ議論をする。 □

3 測地線の方程式

三次元空間中で地球の中心を原点として、緯度、軽度で地球の表面を表す。但し 中心からの距離：$r=6300$[km] で固定し、 緯度：φ、軽度：

θ を一般的に u_1, u_2 と書き、地表面の位置を $\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$ で表す。

先ず、地表面で２点間の最短距離を結ぶ曲線の満たす方程式を求める。このような曲線は地理の用語では大圏コースと呼ばれ、球面に限らない一般の曲面や超曲面上の曲線について数学用語で測地線とよばれる。

図 3.1: http://rika2.seesaa.net/article/123914825.html より

ここでの問題は、例えば図 3.1 の大圏コースを (u_1, u_2) を座標とする座標系 *i.e.* メルカトル図法の地図で上に描くと図 3.2 のようになって真っ直ぐには見えないということである。

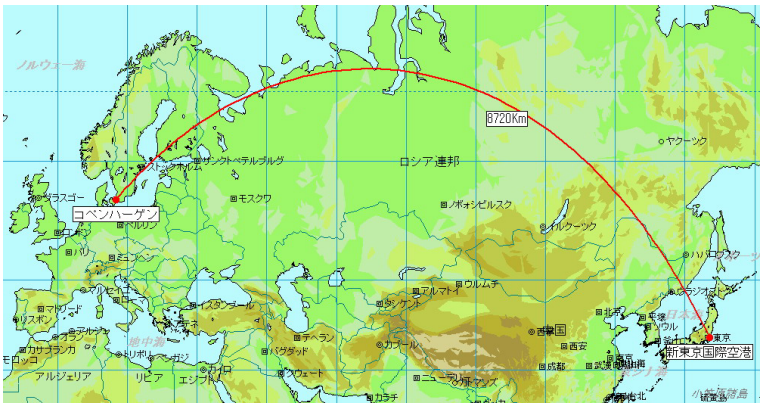

図 3.2: http://rika2.seesaa.net/article/123914825.html より

先ず地表面上を動く曲線 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}\left(u_1(t), u_2(t)\right)$, $(t_0 \leq t)$ の長さを $s(t)$

とすると、これは空間中の曲線の長さなので

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt \tag{3.1}$$

$$\therefore \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\|^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} \cdot \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} \tag{3.2}$$

ここで $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}$ は曲線によらず各点で決まっているので、 $\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$ のみから (曲線が与えれらなくても) 計算可能である。

$$g_{i,j}(u_1, u_2) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} \tag{3.3}$$

とおいて第一基本量とよぶ。

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j} g_{i,j} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} \tag{3.4}$$

をよく dt を省略して

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{i,j} du_i du_j \tag{3.5}$$

と書く。これより地表面で緯度経度が (u_1, u_2) の点と $(u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2)$ の点の距離は $\sqrt{\sum g_{i,j}\Delta u_1 \Delta u_2}$ なので、地図上で距離の測り方が分かれば地球の形を知らなくても $g_{i,j}$ は計算可能である。

大圏コースは地表面上の２点を結ぶ最も短い曲線なので、$\boldsymbol{r}(u_1(t), u_2(t))$ が大圏コースをたどる曲線であれば、(3.4) より

$$F(u_1, u_2, \dot{u_1}, \dot{u_2}) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j} \dot{u}_i \dot{u}_j} \tag{3.6}$$

として $(u_1(t), u_2(t))$ はオイラー・ラグランジュ方程式 (2.19) を満たす。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u_l} &= \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}\dot{u}_i\dot{u}_j}}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\dot{u}_i\dot{u}_j\right) \\
\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_l} &= \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}\dot{u}_i\dot{u}_j}}\left(\sum_{i} g_{i,l}\dot{u}_i + \sum_{j} g_{l,j}\dot{u}_j\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}\dot{u}_i\dot{u}_j}}\left(\sum_{i} g_{i,l}\dot{u}_i\right), \quad (\because g_{i,j} = g_{j,i})
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

なので、オイラー・ラグランジュの方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}}}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}}}\sum_{i} g_{i,l}\frac{du_i}{dt}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\sum_{i} g_{i,l}\frac{du_i}{dt}\right\} \qquad (\because (3.4)) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} + \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\sum_{i} g_{i,l}\frac{du_i}{dt} \\
&\qquad - \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j}\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} - \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\sum_{i} g_{i,l}\frac{d^2u_i}{dt^2} \\
&= 0, \quad (l = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

これは u_1, u_2 についての微分方程式なので、u_1, u_2 について t による微分回数の降順に並べ、全体に $-\frac{ds}{dt}$ をかけて、$\sum_{i,j}\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i}\right)$ であることを利用して整理すると：

$$
\sum_{i} g_{i,l}\frac{d^2u_i}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\right)\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} - \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}\sum_{i} g_{i,l}\frac{du_i}{dt} = 0, \ (l = 1, 2)
\tag{3.9}
$$

$g_{i,j} = g_{j,i}$ より

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i g_{1,i}\frac{d^2u_i}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_1}\right)\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} - \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}\sum_i g_{1,i}\frac{du_i}{dt} = 0 \\ \displaystyle\sum_i g_{2,i}\frac{d^2u_i}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_2}\right)\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} - \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}\sum_i g_{2,i}\frac{du_i}{dt} = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

行列 $(g_{i,j})$ の逆行列を $(g^{i,j})$ と書くと、

$$\begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{1,1}u_1 + g_{1,2}u_2 \\ g_{2,1}u_1 + g_{2,2}u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

なので、(3.10) に左から $(g^{i,j})$ をかけると

$$\begin{cases} \displaystyle\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_l g^{1,l}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\right)\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} - \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}\frac{du_1}{dt} = 0 \\ \displaystyle\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_l g^{2,l}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\right)\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} - \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}\frac{du_2}{dt} = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

t_1 から t までの曲線の長さ $s(t)$ は t の単調増加で滑らかな関数なので、その逆関数 $t = t(s)$ も単調増加で滑らかである。よって、曲線のパラメタを t から s に変えると

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2}{ds^2} \tag{3.13}$$

から

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_l g^{k,l}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\right)\frac{du_j}{dt}\frac{du_i}{dt} = 0,\ (k = 1, 2) \tag{3.14}$$

が得られる。これを測地線の方程式とよぶ。

注意 1. 地表面上の 2 点を結ぶ大圏コースは (3.14) を満たすが、逆は必ずしも成り立たない。地表面上の 2 点を結び (3.14) を満たす曲線は 2 本あるが、これらの 2 点が地球の丁度反対側にない限りはそれは長さが違い、最短コースは一方のみである。

(3.14) の第二項の $\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}$ 係数を $\Gamma^k_{i,j}$ と書き、クリストッフェルの記号 (Christoffel symbol) とよぶ：

$$\Gamma^k_{i,j} := \frac{1}{2}\sum_l g^{k,l}\left(\frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l}\right) \tag{3.15}$$

測地線の方程式は第一基本量 $g_{i,j}$ すなわち地図上での距離の測り方のみから決定される。つまり、地球を外部から見た形を知らなくてもメルカトル図法の地図上での距離が分かればわかる。

注意 2. 測地線の方程式を、地表面に拘束された外力を受けない質点の運動方程式として求めることもできる。詳しくは [大森] 参照。

4 ガウス曲率

問い：メルカトル図法で書かれた地図から地球が丸いことが分かるか？

第 3 節で述べたように、第一基本量は地図のみを見て、地球を外から見る視点を持たずに計算することができる。従って、それから計算されるクリストッフェルの記号も同様である。この節と次の節では、地球の丸さをクリストッフェルの記号から計算することが可能であり、その結果として、地球の外からの視点を持たずとも (各点間の距離の分かる) 地図だけをみて地球が丸いこととその半径が導けることを説明する。

地表面の一点 $P = \boldsymbol{r}(u_1^0, u_2^0)$ とそこでの単位法線 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_P$ を固定し、P における地表面への接平面 T_P を考える。このとき $f(u_1, u_2) := (\boldsymbol{r}(u_1, u_2) - \boldsymbol{r}(u_1^0, u_2^0)) \cdot \boldsymbol{n}_P$ は点 $\boldsymbol{r}(u_1, u_2)$ が T_P からどれだけの高さにあるかを示している。

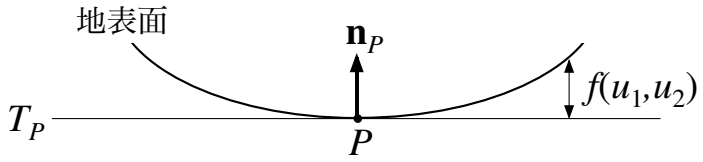

図 4.1:

当然

$$f(u_1^0, u_2^0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1^0, u_2^0) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}(u_1^0, u_2^0) \cdot \boldsymbol{n}_P = 0 \tag{4.1}$$

又

$$h_{i,j}(u_1^0, u_2^0) := \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_1^0, u_2^0) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j}(u_1^0, u_2^0) \cdot \boldsymbol{n}_P \tag{4.2}$$

と定め、この $(h_{i,j})$ を第二基本量とよび

$$H = \sum_{i,j}^{2} h_{i,j} du_i du_j \tag{4.3}$$

等と書く。この $(h_{i,j})$ は地図だけ見ても分からない。(地球を外から見ている。)

座標変換 $(u_1, u_2) \mapsto (v_1, v_2)$ をして P は (v_1, v_2) 座標の原点、従って $f(0,0) = 0$ であり、更に $\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_i}(0,0) \right\| = 1$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_1}(0,0) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_2}(0,0) = 0$ となるようにして $f(v_1, v_2)$ を Taylor 展開すると：

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} v_1 v_2 + ((3\,\text{次以上の項})) \\ &= \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v_1 \partial v_2} v_1 v_2 + ((3\,\text{次以上の項})) \\ &= \sum_{i,j=1} h_{i,j}\,(0,0)\, v_1 v_2 + ((3\,\text{次以上の項})) \end{aligned} \tag{4.4}$$

定義により $(h_{i,j})$ は対称行列なので、平面上の直交変換 $(v_1, v_2) \mapsto (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ により $(h_{i,j})$ の固有値 λ、μ を用いて

$$\sum_{i,j=1} h_{i,j} v_1 v_2 = \lambda \tilde{v}_1^2 + \mu \tilde{v}_2^2 \tag{4.5}$$

とできる。 $\lambda\mu > 0$ なら 地表面は P の近くで楕円体であり、$\lambda\mu < 0$ なら 地表面は P の近くで双曲面である。

この λ, μ を P における主曲率とよび、その積 $\lambda\mu$ をガウス曲率 (Gaussian curvature) とよぶ。$\lambda\mu = \det(h_{i,j})$ である。

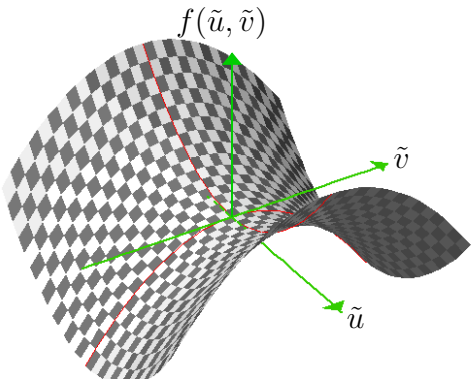

図 4.2: $f(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2$, ガウス曲率 $= -1$

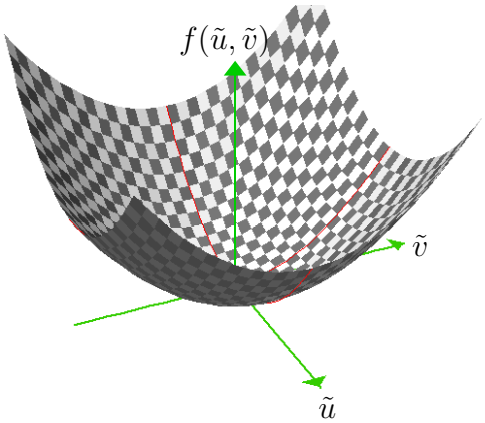

図 4.3: $f(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$, ガウス曲率 $= 1$

特に赤道上では簡単に $(h_{i,j})$ が計算できて φ：緯度、θ：経度として $v_1 = r\varphi$、$v_2 = r\theta$ ととると $\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ なので $\det(h_{i,j}) = \dfrac{1}{r^2}$ となる。地球は球面なので、これは場所によらない。

5 地図だけを見て地球の曲率を計算する

以下、ガウス曲率を第一基本量から求めることを考える。唐突だが

$$R^l_{i,j,k} := \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma^l_{i,k} - \frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma^l_{i,j} + \sum_a \Gamma^a_{i,k}\Gamma^l_{a,j} - \sum_a \Gamma^a_{i,j}\Gamma^l_{a,k} \tag{5.1}$$

とおいて $(R^l_{i,j,k})$ をリーマンの曲率テンソル (Riemann curvature tensor) とよぶ。この様な量を考える理由は後の (5.19) を見ると分かる。

$$R_{h,i,j,k} = \sum_l g_{h,l} R^l_{i,j,k} \tag{5.2}$$

とおく。

$g_{i,j} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}$ を u_l で微分すると

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_l \partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_l \partial u_j} \tag{5.3}$$

なので

$$\frac{\partial g_{j,l}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i,l}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_l} = 2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j} \tag{5.4}$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u_1, u_2)$ を各点での地表面に対する法線として

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_k \alpha_k \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k} + h_{i,j} \boldsymbol{n} \tag{5.5}$$

と分解すると、$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l}$ は地表面に接するベクトルなので $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ (l = 1, 2)$ であることより

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} + \alpha_2 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \\ \alpha_1 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} + \alpha_2 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

なので

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{j,1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i,1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_1} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{j,2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i,2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_2} \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{i,j} \\ \Gamma^2_{i,j} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

つまり

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k} + h_{i,j} \boldsymbol{n} \tag{5.8}$$

また

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5.9}$$

であるので

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{5.10}$$

を u_k で微分して

$$h_{i,k} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_k} = 0 \tag{5.11}$$

ここで

$$\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_k}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_k}1 = 0 \tag{5.12}$$

より $\boldsymbol{n} \perp \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_k}$ なので

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_k} = \sum_l \Lambda_k^l \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} \tag{5.13}$$

と書ける。従って

$$h_{i,k} + \sum_l g_{i,l}\Lambda_k^l = 0 \tag{5.14}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_k^1 \\ \Lambda_k^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h_{1,k} \\ h_{2,k} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \Lambda_k^1 \\ \Lambda_k^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1,k} \\ h_{2,k} \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \Lambda_k^l = -\sum_a g^{l,a} h_{i,k} \tag{5.16}$$

$$\therefore \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_k} = -\sum_{a,l} g^{l,a} h_{a,k} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} \tag{5.17}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u_k \partial u_i \partial u_j} &= \sum_l \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\Gamma_{i,j}^l\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} + \sum_l \Gamma_{i,j}^l \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_l \partial u_k} \\ &\qquad + \frac{\partial h_{i,j}}{\partial u_k}\boldsymbol{n} + h_{i,j}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_k} \\ &= \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma_{i,j}^l + \sum_a \Gamma_{i,j}^a \Gamma_{a,k}^l - \sum_a h_{i,j} h_{a,k} g^{l,a} \right\} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} \\ &\qquad + \left\{ \frac{\partial h_{i,j}}{\partial u_k} + \sum_l \Gamma_{i,j}^l h_{l,k} \right\} \boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{5.18}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u_j \partial u_i \partial u_k} - \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u_k \partial u_i \partial u_j} \\
=& \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma^l_{i,k} - \frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma^l_{i,j} + \sum_a \Gamma^a_{i,k} \Gamma^l_{a,j} - \sum_a \Gamma^a_{i,j} \Gamma^l_{a,k} \right. \\
& \qquad \left. - \sum_a h_{i,k} h_{a,j} g^{l,a} + \sum_a h_{i,j} h_{a,k} g^{l,a} \right\} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_l} \\
& + \left\{ \frac{\partial h_{i,k}}{\partial u_j} + \sum_l \Gamma^l_{i,k} h_{l,j} - \frac{\partial h_{i,j}}{\partial u_k} - \sum_l \Gamma^l_{i,j} h_{l,k} \right\} \boldsymbol{n}
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

なので

$$
\begin{cases}
R^l_{i,j,k} = \displaystyle\sum_a g^{l,a} \left\{ h_{i,k} h_{a,j} - h_{i,j} h_{a,k} \right\} \\
\dfrac{\partial h_{i,j}}{\partial u_k} - \dfrac{\partial h_{i,k}}{\partial u_j} + \displaystyle\sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma^l_{i,j} h_{h,k} - \Gamma^l_{i,k} h_{l,j} \right) = 0
\end{cases}
\tag{5.20}
$$

$\sum_l g_{h,l} g^{l,a} = \delta_{h,a}$ より

$$
R_{h,i,j,k} = h_{i,k} h_{h,j} - h_{i,j} h_{h,k} \tag{5.21}
$$

よって特に

$$
R_{1,2,1,2} = h_{2,2} h_{1,1} - h_{2,1} h_{1,2} = \det \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{pmatrix} \tag{5.22}
$$

従って $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} = 0,\ \left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \right\| = 1,\ (i = 1, 2)$ となるように座標 (u_1, u_2) をとると、これはガウス曲率に一致する。$R_{h,i,j,k}$ は第一基本量 $(g_{i,j})$ から計算できるので、距離の測り方が分かれば地図のみから (地球を外から見なくても) ガウス曲率が計算できる。よって地球が半径 r の球であることが地図のみから分かる。ガウスはこれを驚愕の定理とよんだ。

6 表面張力と極小曲面

シャボン玉はなぜ丸いか？

シャボン玉は作る時に内部にストローで空気を吹き込むので囲まれた内部の体積は決まっているが、形は柔軟に変化することができて、実際、風に煽られると大きく歪むことは見たことがあるだろう。しかし、風がない静かな状態で空中に浮かんでいるシャボン玉は常に丸いのは普段見慣れている通りである。

実は石鹸膜 (およびその他の多くの膜) には表面張力が働いていて、面積が可能な限り小さい形状を取ることが知られている。シャボン玉が丸くなるのは、この表面張力の結果として、同じ体積を囲む図形の中で面積が最小である球形になっている。(実は重力の効果で少し歪んでいるが。)

シャボン玉以外でも、適当な枠に石鹸膜を張ると、やはり表面張力の効果でその形は同じ枠を張る曲面の中で面積が最小のものになる。以下ではこのような曲面が数学的にどのように特徴付けられるか考える。

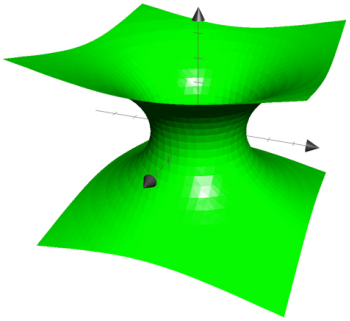

図 6.1: 懸垂曲面 $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$

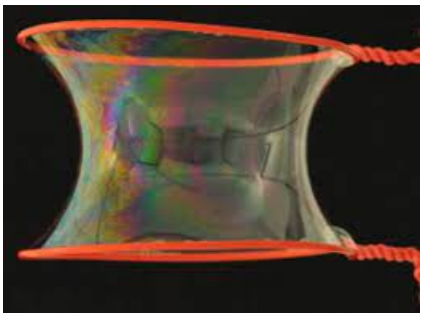

図 6.2: 石鹸膜の懸垂曲面 [毎] より

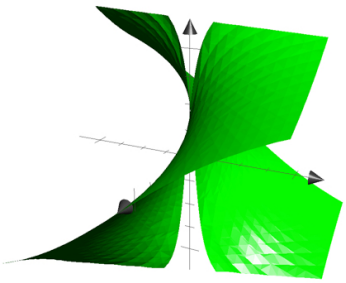

図 6.3: 常螺旋面 $\frac{y}{x}=\tan z$

図 6.4: 石鹸膜の常螺旋面 [Kl] より

定理 4.

三次元空間 $\mathbb{R}^3$ の内の曲面が、ある平面内の有界領域 D で定義された C^2 級の二変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとして与えられているとする。

この曲面が同じ境界 $f(\partial D)$ をもつ局面 (ただし ∂D は D の境界とする) の中で面積が最小であるならば、以下の極小曲面方程式が成り立つ：

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0 \tag{6.1}$$

これは二次元平面に対するオイラー・ラグランジュ方程式なので、まずそれを導く。

$F(u, \boldsymbol{p})$, $(u \in \mathbb{R}, \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n)$ を滑らかな関数、$D \subset \mathbb{R}^n$ を有界な領域とし、$f(\boldsymbol{x})$ を D で定義された滑らかな関数とするとき、次の積分を考える：

$$I(f) := \int_D F\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) dx_1 \cdots dx_n \tag{6.2}$$

$f|_{\partial D}$ を固定してグラフを少しずらしたものを考える。すなわち D 上の滑らかな関数 δf で $\delta f|_{\partial D} \equiv 0$ であるものを取り、$(f+\delta f)(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + \delta f(\boldsymbol{x})$ として

$$\begin{aligned}
&I(f + \delta f) \\
=&\int_D F\big((f + \delta f)(\boldsymbol{x}), (f + \delta f)_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, (f + \delta f)_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) dx_1 \cdots dx_n \\
=&\int_D F\big(f(\boldsymbol{x}) + \delta f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}) + (\delta f)_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x}) + (\delta f)_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) dx_1 \cdots dx_n \\
=&\int_D F\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) dx_1 \cdots dx_n \\
&+ \int_D \frac{\partial F}{\partial u}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) \delta f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&\quad + \int_D \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_k}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) (\delta f)_{x_k}(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&\qquad + o\left(\max_{\boldsymbol{x} \in D} |\delta f(\boldsymbol{x})| + \max_{\boldsymbol{x} \in D} |\delta f_{x_1}(\boldsymbol{x})| + \cdots + \max_{\boldsymbol{x} \in D} |\delta f_{x_n}(\boldsymbol{x})|\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I(f) \\
&+ \int_D \frac{\partial F}{\partial u}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big)\delta f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&+ \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big), \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_n}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) \right) \cdot \nabla(\delta f)(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&\qquad + o\left(\max_{\boldsymbol{x}\in D} |\delta f(\boldsymbol{x})| + \max_{\boldsymbol{x}\in D} |\delta f_{x_1}(\boldsymbol{x})| + \cdots + \max_{\boldsymbol{x}\in D} |\delta f_{x_n}(\boldsymbol{x})| \right)
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

ここで微分積分学続論 I で習った次のガウスの発散定理をもちいる。

定理 5 (証明は微分積分学続論 I の教科書参照)**.**
$D \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つ有界領域とし、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ を境界を込めて D で定義された滑らかなベクトル場とする。この時次が成り立つ：

$$
\int_D \nabla \cdot \boldsymbol{v} dv = \int_{\partial D} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{6.4}
$$

但し、$\boldsymbol{n}$ は ∂D の外向き法線ベクトルとする。

これより以下の部分積分の公式が成り立つ

定理 6.
上と同じ仮定で、さらに $u(\boldsymbol{x})$ は境界を込めて D で定義された滑らかな関数とすると次が成り立つ：

$$
\int_D \nabla u \cdot \boldsymbol{v} dv = \int_{\partial D} u(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) dS - \int_D u \nabla \cdot \boldsymbol{v} dv \tag{6.5}
$$

証明. ガウスの発散定理の $\boldsymbol{v}$ に $u\boldsymbol{v}$ を代入すると積の微分公式より

$$
\int_D u \nabla \cdot \boldsymbol{v} dv + \int_D \nabla u \cdot \boldsymbol{v} dv = \int_{\partial D} u(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) dS \tag{6.6}
$$

□

この公式を $u = \delta f$、$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial p_1}\right)$ として (6.3) に適用すると：

$$
\begin{aligned}
&\int_D \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big), \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_n}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) \right) \cdot \nabla(\delta f)(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big), \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_n}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) \right) \cdot \boldsymbol{n}\ \delta f(\boldsymbol{x}) dS \\
&\qquad - \int_D \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial p_k}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) \right) \delta f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

ここで $\delta f|_{\partial D} \equiv 0$ なので、一項目の ∂D 上での積分は 0 である。

以上の計算をまとめると

$$
\begin{aligned}
&I(f+\delta f)\\
=&I(f)\\
+&\int_D \left(\frac{\partial F}{\partial u}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big)\right)\delta f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n\\
&\qquad + o\left(\max_{\boldsymbol{x}\in D}|\delta f(\boldsymbol{x})| + \max_{\boldsymbol{x}\in D}|\delta f_{x_1}(\boldsymbol{x})| + \cdots + \max_{\boldsymbol{x}\in D}|\delta f_{x_n}(\boldsymbol{x})|\right)
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

よって定理 3 と同様の議論により次が成り立つ：

定理 7.

$I(f)$ が最小値を取るような f においては以下のオイラー・ラグランジュ方程式が成り立つ：

$$
\frac{\partial F}{\partial u}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\big(f(\boldsymbol{x}), f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\big) = 0 \tag{6.9}
$$

問題 3. 定理 7 を証明せよ。

平面内の領域 D で定義された関数 $f(x,y)$ のグラフの表面積は

$$
\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy \tag{6.10}
$$

で与えられるので、

$$
F(u,p_1,p_2) := \sqrt{1+p_1^2+p_2^2} \tag{6.11}
$$

としてオイラー・ラグランジュ方程式は

$$
(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0 \tag{6.1 再掲}
$$

で与えられる*。

問題 4. 懸垂曲面 (図 6.1) と常螺旋面 (図 6.3) が極小曲面方程式 (6.1) を満たすことを確認せよ。

*シャボン玉は内部に空気を含むので、同一容積をもつ曲面の中で面積最小な曲面 (球面) になり、極小曲面にはならない。ここでの議論は、針金に張った空間を囲まない石鹸膜に適用される。

7　極小曲面と平均曲率

極小曲面を関数ではなく曲面の量で表現することを考える。
第二基本量

$$h_{i,j}(u_1^0, u_2^0) := \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_1^0, u_2^0) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j}(u_1^0, u_2^0) \cdot \boldsymbol{n}_P \qquad (4.2\text{ 再掲})$$

を用いて $f(0,0) = 0$ かつ $\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_i}(0,0) \right\| = 1$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_1}(0,0) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_2}(0,0) = 0$ となる座標 (v_1, v_2) で $f(v_1, v_2)$ を表すと

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} v_1 v_2 + ((3\text{ 次以上の項})) \\ &= \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v_1 \partial v_2} v_1 v_2 + ((3\text{ 次以上の項})) \qquad (4.4\text{ 再掲}) \\ &= \sum_{i,j=1} h_{i,j}\,(0,0)\, v_1 v_2 + ((3\text{ 次以上の項})) \end{aligned}$$

となり行列 $\begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{pmatrix}$ の固有値 λ, μ の積 $\lambda\mu$ をガウス曲率とよんだ。これに対し λ, μ の平均 $\frac{\lambda + \mu}{2}$ を平均曲率とよぶ。

これを元の (u_1, u_2) 座標で表す。

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = \sum_j \alpha_{i,j} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_j} \quad (i, j = 1, 2) \tag{7.1}$$

とすると、合成関数の微分法則より

$$\alpha_{i,j} = \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \tag{7.2}$$

である。

この $\alpha_{i,j}$, $(i, j = 1, 2)$ を用いて

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

とおくと、第一基本量 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}$, $(i,j=1,2)$ は $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ を横ベクトル表示したとして

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & {}^t\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \\
&= A \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_1} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_1} & {}^t\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_2} \end{pmatrix} {}^tA \\
&= A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tA \\
&= A\ {}^tA
\end{aligned} \tag{7.4}$$

である。

ここで $\frac{\partial f}{\partial v_i}(0,0)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_i}(0,0)\cdot\boldsymbol{n}_P=0$ より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \\
&= A \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_2} \end{pmatrix} {}^tA
\end{aligned} \tag{7.5}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_2} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix} {}^tA^{-1} \tag{7.6}$$

これより

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda+\mu}{2} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_1\partial v_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_2\partial v_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{ A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix} {}^tA^{-1} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{ {}^tA^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix} \right\} \qquad (\because \mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{ \left(A\ {}^tA\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

以下記号が煩雑になるのを避ける為に、次の一般的な微分幾何の教科書の記号を用いると：

$$\frac{\lambda+\mu}{2}=H,\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2\partial u_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

$$H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} \tag{7.9}$$

となる。

以下この平均曲率 H で極小曲面 (面積最小曲面) を特徴づける。

曲面 S が (局所的に) 変数 (u_1,u_2) でパラメタづけられているとする、すなわち S 上の点は $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ で表されているとする。このとき S の面積要素は高等学校で習うベクトルの内積の性質より

$$\begin{aligned} dS &= \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right\| du_1du_1 \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right)-\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right)^2}\ du_1du_1 \\ &= \sqrt{EG-F^2}du_1du_2 \end{aligned} \tag{7.10}$$

である。

S 上の滑らかな関数 $h(u_1,u_2)$ で $h(\partial S)\equiv 0$ であるものに対し

$$\delta\boldsymbol{r}(u_1,u_2):=h(u_1,u_2)\boldsymbol{n}(u_1,u_2) \tag{7.11}$$

とし、$\alpha\in\mathbb{R}$ に対し

$$(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})(u_1,u_2):=\boldsymbol{r}(u_1,u_2)+\alpha\delta\boldsymbol{r}(u_1,u_2) \tag{7.12}$$

とする。但し、$\boldsymbol{n}(u_1,u_2)$ は S 上の 各点 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2)$ での単位法ベクトルとする。このとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}+2\alpha\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \delta\boldsymbol{r}}{\partial u_1}+\alpha^2\alpha\frac{\partial \delta\boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \delta\boldsymbol{r}}{\partial u_1} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}+2\alpha h\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_1}+\alpha^2h^2\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_1} \end{aligned} \tag{7.13}$$

だが、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{7.14}$$

を微分して

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_1 \partial u_1} \cdot \boldsymbol{n} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_1} = L + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_1} = 0 \tag{7.15}$$

なので

$$\frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} = E - 2\alpha h L + o(\alpha^2) \tag{7.16}$$

となる。同様にして

$$\frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2} = F - 2\alpha h M + o(\alpha^2) \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2} = G - 2\alpha h N + o(\alpha^2) \tag{7.18}$$

である。これらより

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2}\right)^2 \\
&= EG - F^2 - 2\alpha h(EN + GL - 2FM) + o(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

以上より、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r}$ が定める曲面の面積を $A(\boldsymbol{r})$、$A(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r})$ とすると

$$\begin{aligned}
&A(\boldsymbol{r} + \alpha\delta\boldsymbol{r}) \\
&= \int \sqrt{\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{r}+\alpha\delta\boldsymbol{r})}{\partial u_2}\right)^2} du_1 du_2 \\
&= \int \sqrt{EG - F^2 - 2\alpha h(EN + GL - 2FM) + o(\alpha^2)} du_1 du_2 \\
&= \int \sqrt{EG - F^2} du_1 du_2 + \int \sqrt{EG - F^2 - 2\alpha h(EN + GL - 2FM) + o(\alpha^2)} - \sqrt{EG - F^2} du_1 du_2 \\
&= A(\boldsymbol{r}) + \int \frac{-2\alpha h(EN + GL - 2FM) + o(\alpha^2)}{\sqrt{EG - F^2 - 2\alpha h(EN + GL - 2FM) + o(\alpha^2)} + \sqrt{EG - F^2}} du_1 du_2 \\
&= A(\boldsymbol{r}) - \alpha \int \frac{h(EN + GL - 2FM)}{\sqrt{EG - F^2}} du_1 du_2 + o(\alpha^2) \\
&= A(\boldsymbol{r}) - 2\alpha \int hH\sqrt{EG - F^2} du_1 du_2 + o(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

従って、これまでの議論と同様に以下が成立する。

定理 8.
曲面 S が境界 ∂S を固定したなかで面積最小とすると、その平均曲率は S 全体でゼロである：

$$H \equiv 0 \tag{7.21}$$

問題 5. 懸垂曲面 (図 6.1) と常螺旋面 (図 6.3) について (7.21) が成り立つことを確認せよ。

参考文献

[大森] 大森英樹 著
「力学的な微分幾何」 日本評論社 (2010 年)

[新居] 新居俊作 著
「フーリエ級数と偏微分方程式」
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/Fourier.pdf

[毎] 毎日頭條
「一個直觀而複雜的難題：追求「極小」」
https://kknews.cc/education/z9mn5vq.html

[Kl] Erica Klarreich
"Math Duo Maps the Infinite Terrain of Minimal Surfaces"
https://www.quantamagazine.org/math-duo-maps-the-infinite-terrain-of-minimal-surfaces-20190312/