コロナの感染拡大と終息の予測方法

新居俊作 (九州大学数理学研究院)

2020 年 4 月 4 日

コロナウイルスの感染がどの様な経緯を辿って拡大し、最終的に終息するかを予測する方法の基本的な考え方を解説しています。本稿を読むと、特に以下の事が理論的に理解できます：

- 感染拡大期には比例的にではなく指数的[a] に感染者数が増える。
- 一人の感染者がうつす平均的な人数を減らすことは、感染拡大を遅らせるだけではなく、ピーク時の感染者数を抑える効果もある。
- 感染者数ピークでの、非感染者の全人口に対する割合は (時々コロナ関連のニュースで登場する) 基本再生産数 $\mathcal{R}_0$ の逆数で与えられる。

[a]指数的増大の恐さを物語る例として曽呂利新左衛門の逸話が伝えられています。豊臣秀吉が曽呂利新左衛門に褒美を与えるときに本人の希望を聴くと、「一日目は米一粒、二日目は米二粒、三日目は米四粒、. . . 、というように、毎日前の日の二倍の量の米を下さい」と答えたそうです。(期間については一ヶ月から百日まで諸説あるそうです。)

10kg の米が 50 万粒として (一粒 0.02g) 計算すると、20 日目の累積は未だ 20kg にしかならないのに、30 日では 21t、40 日でなんと 22000t、 更に 50 日で 2250 万 t にもなります。(現在の日本のコメの生産量は平成 25 年に間 860 万 t。)

流石の秀吉も、何百台もの荷車を引き連れて褒美を取りにきた曽呂利新左衛門に、止めるように懇願したそうです。

最初に読者の便宜のために、本文で用いている記号の意味をメモとしてまとめておきます。

S_n**:** 国内にコロナウイルスが広がり始めて n 日目の、コロナウイルスに感染していない (Susceptible=感染しうる) 人数。

N**:** 全人口=国内にコロナウイルスが広がり始める前のコロナウイルス非感染者数。

I_n**:** 国内にコロナウイルスが広がり始めて n 日目の、現在コロナウイルスに感染している (Infected) 人数。

R_n**:** 国内にコロナウイルスが広がり始めて n 日目の、コロナウイルスに一度感染して回復した (Recovered)、その結果免疫を持っている人数。

β**:** 一人の感染者が「周りにいるのは非感染者だけ」であるときに一日にうつす人数の平均。

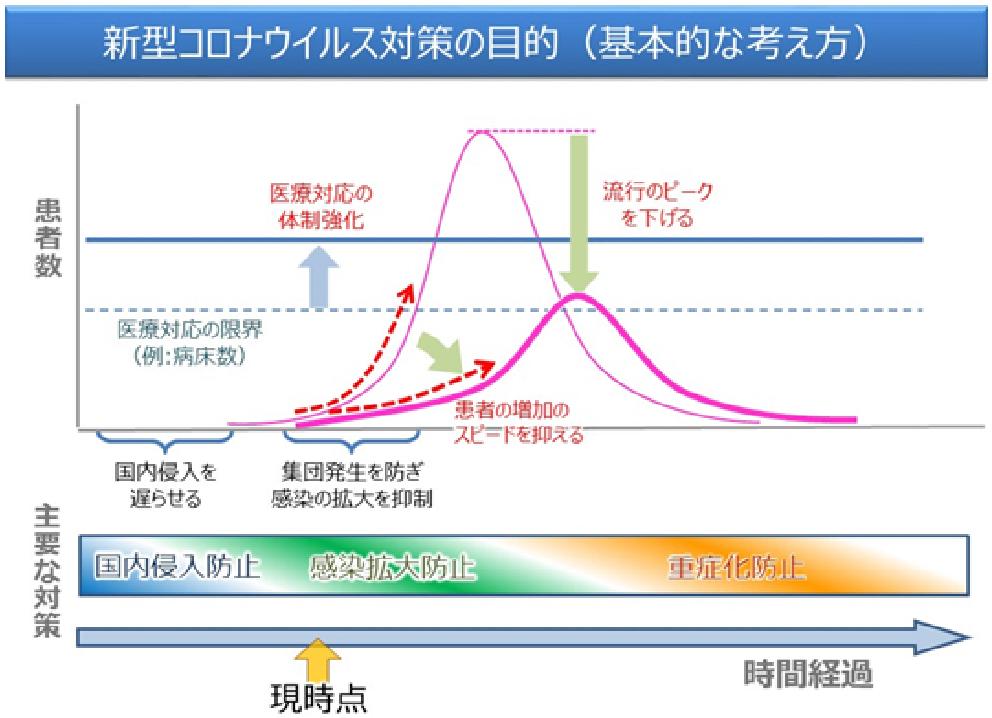
γ**:** 一人の感染者が一日で回復する確率。

$\mathcal{R}_0$**:** $:= \dfrac{\beta}{\gamma}$: 基本再生産数。「周りにいるのは非感染者だけ」の時に一人の感染者が感染してから回復するまでにうつす人数の平均。

$\mathcal{R}_e$**:** $:= \dfrac{\beta}{\gamma}\dfrac{S_n}{N}$: 実効再生産数。「周りにいる非感染者の割合が $\dfrac{S_n}{N}$」である時に一人の感染者が感染してから回復するまでにうつす人数の平均。

下掲は厚労省の Webpage で公表されていた文書中 (2 月中に公表された文書で、もう削除されてます) の図ですが、同様の図はテレビ等にも何度も現れています。

この様な感染拡大と終息の様子がどの様にして予測されるかを解説します。



通常これは SIR モデルと呼ばれる微分方程式を用いて考えるのですが、ここでは高校で文系数学しか勉強していなくてもわかる様に、数列の漸化式を用いて説明します。(微分方程式でも考え方は同じです。)

国外との人の出入りは無い (全人口と比べて無視できるくらいに少ない) として、国内にコロナウイルスが広がり始めて n 日目を考えます。コロナウイルスに非感染者数を S_n、現在かかている人数を I_n、コロナウイルスに一度感染して回復した (その結果として免疫があって二度と感染しない) 人数を R_n とします。少数ながら知られているような、回復後再発する事例は非常に少なくて無視できるとします。この文字を使って、感染者数がどう変化するかを考えていきます。

先ず非感染者数の n 日目から $n+1$ 日目への変化ですが、これは次で与えられます：

$$S_{n+1} - S_n \tag{1}$$

これは $n+1$ 日目の新規感染者数の -1 倍なので、この人数を考えましょう。

一人の感染者が「周りにいるのは非感染者だけ」であるときに一日にうつす人数の平均を β とします。そうすると「周りにいるのは非感染者だけ」であるときには、I_n 人の感染者全体で

$$\beta I_n \tag{2}$$

人にうつすことになります。

この β は更に次の様に分解できます：

$$(\text{一人が一日に接触する人数の平均}) \times (\text{一回の接触でうつす確率}) \tag{β の意味}$$

「周りにいるのは非感染者だけ」ではないときにはどうなるかですが、そのときについては次の様に考えます。

仮に全人口の半分が感染者又は、回復者であるとしましょう。この時は、一人の感染者と濃厚接触する人の半分が感染者又は回復者なので、一人の感染者が一日に濃厚接触する非感染者の数は、「周りにいるのは非感染者だけ」であるときと比べて半分になるでしょう。ということは一人の感染者がうつす人数も半分になって $\frac{\beta}{2}$ となるでしょう。従って I_n 人の感染者全員で $\frac{\beta}{2}I_n$ 人にうつすでしょう。

同様に考えると、全人口を N として、非感染者数が S_n である時に一日に新たに感染する人数は以下のようになります：

$$\beta\frac{S_n}{N}I_n \tag{3}$$

(1) は (3) の -1 倍と等しいはずなので次が成り立ちます。

$$S_{n+1} - S_n = -\beta\frac{S_n}{N}I_n \tag{S の式}$$

次に回復した人数の n 日目から $n+1$ 日目への変化ですが、これは次で与えられます：

$$R_{n+1} - R_n \tag{4}$$

これは、一日に回復する人数です。

一人の感染者が一日で回復する確率を γ とします。すると、I_n 人の感染者がいれば一日に回復する人数は

$$\gamma I_n \tag{5}$$

(4) は (5) と等しいはずなので次が成り立ちます。

$$R_{n+1} - R_n = \gamma I_n \tag{R の式}$$

最後に感染者数の n 日目から $n+1$ 日目への変化ですが、これは次式で与えられます：

$$I_{n+1} - I_n \tag{6}$$

これは一日に新たに感染する人数から回復する人数を引いたものなので (3) と (5) から以下のようになります：

$$I_{n+1} - I_n = \beta \frac{S_n}{N} I_n - \gamma I_n \tag{I の式}$$

(S の式),、(R の式)、(I の式) を合わせたものが感染症の広がり具合を予測するための方程式です。

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = -\beta \frac{S_n}{N} I_n \\ I_{n+1} - I_n = \beta \frac{S_n}{N} I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} - R_n = \gamma I_n \end{cases} \tag{SIR モデル}$$

この漸化式は手計算では解けないので、通常はこれをコンピュータに計算させてシミュレーション結果としますが、必要な結論はこの漸化式を解かなくても分析するだけで得られるので、以下ではそれを行います。

予備考察として、(S の式) と (I の式) には R_n 登場しないので、R_n を考えなくても S_n と I_n だけでこの二つの漸化式は成り立ちます。更に (R の式) の右辺は I_n だけによっているので I_n が決まれば R_n は自動的に決まります。

先ず、感染拡大初期にどの様に広がるかですが、次の様に考えます。

初期にはほとんど全人口が非感染者なので $\frac{S_n}{N} \fallingdotseq 1$ と考えます。 例えば、3 月 27 日時点で国内感染者数は 1500 人なので、全人口 1 億 2 千万人と比べれば $\frac{S_n}{N} = 1$ として差し支えないでしょう。そうすると (I の式) の式は以下の様に簡単になります：

$$I_{n+1} - I_n = \beta I_n - \gamma I_n = (\beta - \gamma) I_n \tag{7}$$

整理して

$$I_{n+1} = (1 + \beta - \gamma) I_n \tag{8}$$

　これは高校で習う項比 $(1+\beta-\gamma)$ の等比数列の漸化式なので、初項は $I_0=1$ で一般項は

$$I_n = (1+\beta-\gamma)^n I_0 = (1+\beta-\gamma)^n \tag{9}$$

となります。

　従って、$\beta-\gamma$ が 0 より大きい *i.e.* $\beta>\gamma$ ならば、感染者は指数的に増加することになります。これが最初の図の「集団発生を防ぎ感染の拡大を抑制」と書いてあるあたりのグラフとなります。

　この解釈をします。4 月 3 日の新聞テレビ等の複数のメディアの報道で次の (メディアによらずほぼ同一の) 表現が見られました。

> 日本時間３日午前時点の集計によると、新型コロナウイルスの世界全体の感染者数が累計１００万人を超え、死者も５万人を突破し約５万３０００人に達した。感染者数は３月２６日に５０万人を超えたばかりで、わずか 1 週間余りで倍増した。(時事ドットコムニュース
> https://www.jiji.com/jc/article?k=2020040300165&g=int)

　これが驚くべき事かどうか判定する前に次のクイズを考えて見ましょう。

> 池に浮き草が浮いています。浮き草は一日で一個が二個に増えます。最初に一個だった浮き草が増えて 30 日で池の半分を覆うようになりました。では、浮き草が池全体を覆うのにあと何日かかるでしょう？

　普段時間に比例して増えるものばかりに触れていると、もう 30 日かかりそうな気がしますが、そうではありません。

　上のクイズの答えを心に留めたうえで、その上のメディア報道を考えてみましょう。

　n 日目から一週間 (7 日) で 2 倍になったというのは式で書くと

$$I_{n+7} = 2I_n$$

となります。(9) によればこれは次のように書けます。

$$(1+\beta-\gamma)^{n+7} = (1+\beta-\gamma)^n(1+\beta-\gamma)^7 = 2(1+\beta-\gamma)^n$$

これ全体を $(1+\beta-\gamma)^n$ で割ると

$$(1+\beta-\gamma)^7 = 2$$

となります。よって両辺の 7 乗根を取ると (次にアクセスすると $\sqrt[n]{x}$ が計算できます: https://keisan.casio.jp/exec/system/1260402326)

$$(1+\beta-\gamma)=1.104089\cdots$$

となります。これをもとに計算すると

$$(1.104089\cdots)^{133}=524,287.99\cdots$$

となるので、大体 133 日で最初の 1 人から 50 万人まで増えることになって、昨年 11 月の半ばに最初の感染者が発見されたことと計算が合います。**つまり、別に感染の広がる速さ $\boldsymbol{\beta-\gamma}$ が急に大きくなったわけではありません。**

次にいつ感染者の増加が止まるのか、すなわち最初の図の「流行のピーク」を考えます。

(I の式) の右辺を γI_n でくくります:

$$I_{n+1}-I_n=\left(\frac{\beta}{\gamma}\frac{S_n}{N}-1\right)\gamma I_n \tag{10}$$

右辺は

$$\frac{\beta}{\gamma}\frac{S_n}{N}<1 \tag{11}$$

すなわち、

$$S_n<\frac{\gamma}{\beta}N \tag{12}$$

となると負になります。ここで累積感染者数は全人口から非感染者数を引いたもの $N-S_n$ なので、それが

$$N-S_n>N-\frac{\gamma}{\beta}N=\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)N \tag{13}$$

を満たすところまで増えると感染者数は減り始めます。

この状態は集団免疫と呼ばれます。

なので最初の図にある様に「流行のピークを下げる」すなわち、感染者数が減り始めるまでの累積感染者数を減らすには、(12) の右辺を小さくする、言い換えると $\boldsymbol{\beta}$ を小さくして $\boldsymbol{\gamma}$ を大きくして、

$$\boldsymbol{\frac{\gamma}{\beta}} \tag{14}$$

を大きくする様な施策を取ることになります。($\beta > \gamma$ でなければ感染は広がらないので、この値は常に 1 より小さい。)

- (14) 逆数 $\dfrac{\beta}{\gamma}$ を $\mathcal{R}_0$ と書いて、基本再生産数と呼びます。
- (10) の右辺および (11) の左辺の登場する $\dfrac{\beta}{\gamma}\dfrac{S_n}{N}$ は $\mathcal{R}_e$ と書いて、実効再生産数と呼びます。

ここで上の分析を解釈します。一人の感染者が回復するのにかかる時間の平均を D 日とします。そうすると、感染者集団の中に感染から 1 日目、2 日目、. . . 、の人達が均等に居るとすると、その内 D 日に達した人達から順番に回復してゆくので(あくまで平均なので、個々人によってはもっと長く患う人もいれば早く回復する人もいます)、平均的に一人が回復する確率 γ は次のようになります。

$$\gamma = \frac{1}{D} \tag{15}$$

つまり

$$D = \frac{1}{\gamma} \tag{16}$$

です。

従って、一人の感染者が「周りにいるのは非感染者だけ」であるときに一日にうつす人数の平均が β ならば、この状態で、一人の感染者が感染してから回復するまでにうつす人数の平均は

$$\beta D = \frac{\beta}{\gamma} = \mathcal{R}_0 \tag{17}$$

となります。

すると、(3) を導いた時と同じ考え方により、非感染者数が S_n の時に一人の感染者がうつす人数の平均は

$$\frac{\beta}{\gamma}\frac{S_n}{N} = \mathcal{R}_0\frac{S_n}{N} \tag{18}$$

となり、これは (11) の左辺つまり実効再生産数 $\mathcal{R}_e$ です。

以上より β と γ が分かれば感染の広がり方が分かるわけですが、今回の新型コロナウイルスについては、今までの I_n、つまり $I_0, I_1, \ldots, I_{\text{昨日}}$ が分かっ

ているだけで $\beta-\gamma$ は分からないので、このデータから次の方法で $\beta-\gamma$ を推測します。(国内回復者は 3 月 27 日時点で 50 人とまだ少ないので β と γ それぞれ単独の推測は難しいでしょう。)

先ず (9) の両辺の対数をとります。

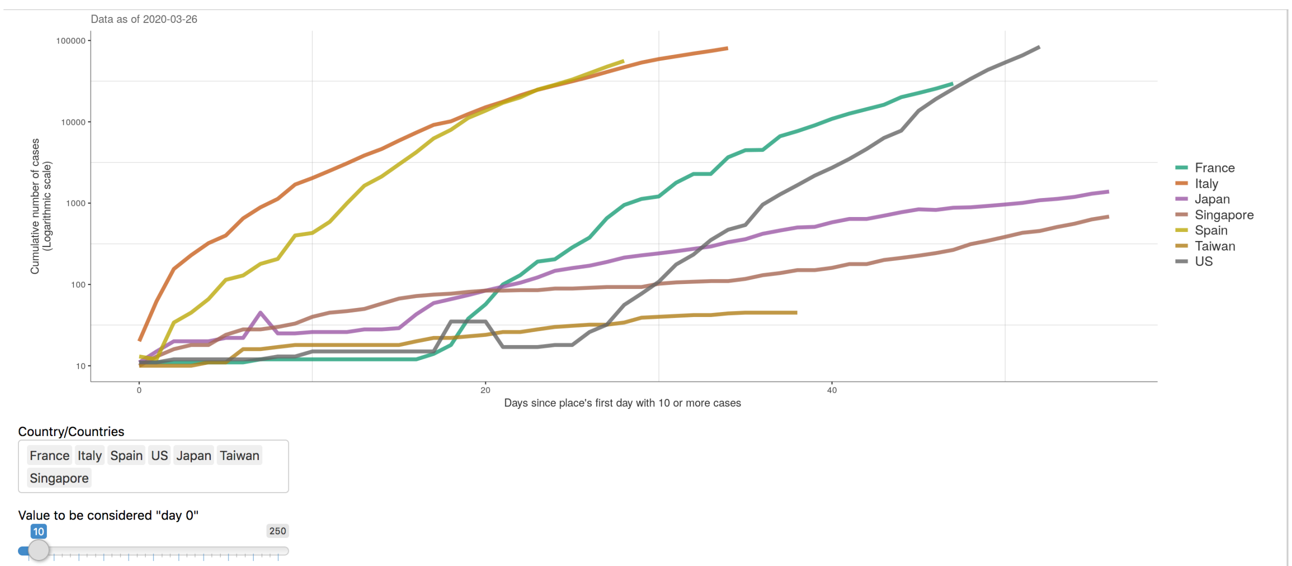
$$\log_{10} I_n = \log_{10}(1+\beta-\gamma)^n \tag{19}$$

これは、高校で習う対数関数の性質から

$$\log_{10} I_n = n\log_{10}(1+\beta-\gamma) \tag{20}$$

となります。

よって、$J_n = \log_{10} I_n$ と置いて、n-J_n 平面上 (横軸が n で縦軸が J_n の座標平面上) にグラフを書くと、その傾きが $\log_{10}(1+\beta-\gamma)$ となって $\beta-\gamma$ が分かります。下掲のグラフは https://www.datacat.cc/covid/ にアクセスすると自動で描いてくれます。グラフの左端は 10 人にしてあります。



これによると、日本は 10 人 ($J_n = 1$) から 100 人 ($J_n = 2$) に増えるのに 22 日くらいかかっているので傾き (すなわち $\log_{10}(1+\beta-\gamma)$) は $\frac{1}{22} = 0.04545\cdots$ で、$\beta-\gamma = 0.110$ 位です。(https://keisan.casio.jp/exec/system/1260353091 にアクセスすると、10^x が計算できるので、$\log_{10}(1+\beta-\gamma) = 0.04545$ から $1+\beta-\gamma = 10^{0.04545}$ とすると求まります。)

このグラフで各国を見ると、三つのパターンに別れるのがわかります。日本、シンガポール、台湾はだいたい同じ傾きで、イタリアとスペインも同じ

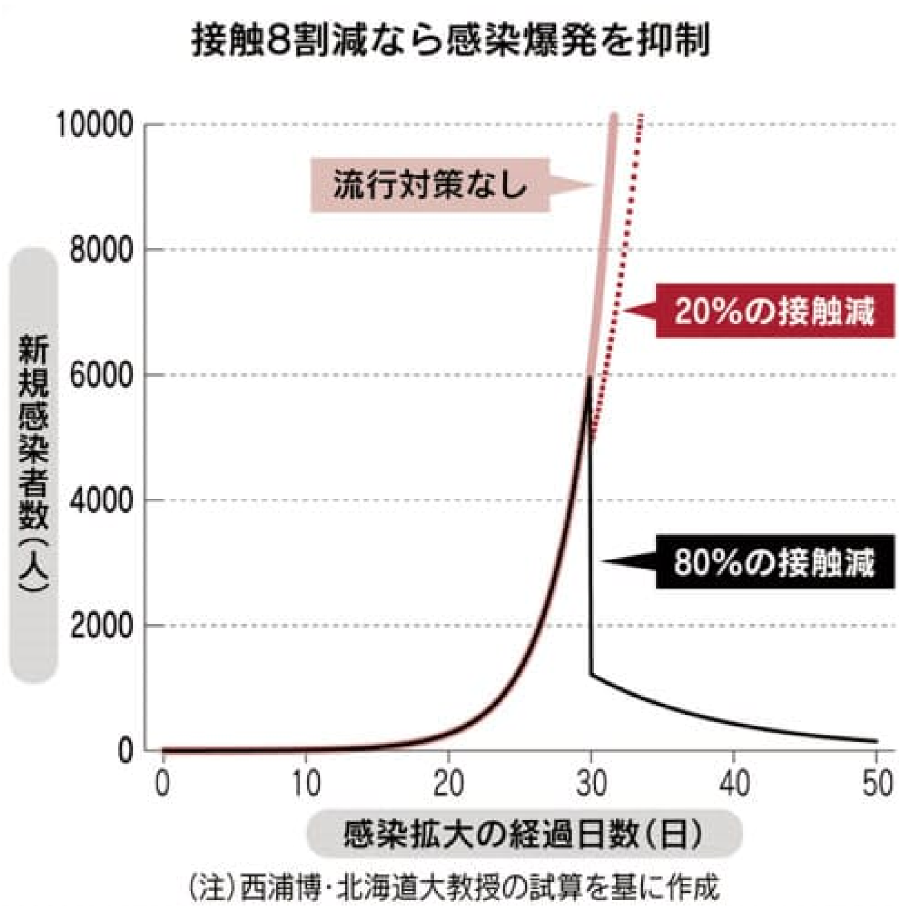
傾き (35 日で 10 人 ($J_n = 1$) から 10000 人 ($J_n = 4$) に増えるくらいのペースで $\beta - \gamma = 0.3$ くらい) でしょう。面白いのはアメリカとフランスで、最初は日本等と同じ傾きだったのが、途中からイタリア、スペインと同じくらいの傾きになってます。

ここから推測されるのは、日本等は感染爆発前のペースで、イタリア、スペインは最初から感染爆発が起こっていた。アメリカ、フランスは最初は抑えられていた (日本と同じくらいの $\beta - \gamma$) のが途中で感染爆発が起こって ($\beta - \gamma$ がイタリア、スペイン程度に変化して) コントロール出来なくなった、ということでしょうか。

以上から得られる教訓は、最初の図に戻って、感染者数のピークを低くして医療の対応能力以内に抑えるには、感染者一人が一日にうつす平均人数 β を小さくすることなので (γ を大きくする方は、治療薬の開発等が必要なので直ぐには難しい)、感染者 (8 割が無症状で誰が感染者かわからない状況では事実上全ての人) の濃厚接触者数を減らすことになります。繰り返すと、そうすると、単に感染が広がるスピードが抑えられるだけではなく、ピークに達したときの感染者数も減らすことができるということが (SIR モデル) から分かります。

次の図は 4 月 3 日の日本経済新聞の記事からの引用です。
(https://www.nikkei.com/article/DGXMZO57610560T00C20A4MM0000/?fbclid=IwAR04jx-5FWgaEOUb7YeBIgJQ9pIdFDhEq9HU2BfVBynHE5dEK0FpOH4Jmng)

この記事の中で北大の西浦博教授教授は、外出制限によって人の接触を 8 割減らせられれば感染を減少に転じさせることが出来るが、現状の外出自粛では人の接触は 2 割しか減らず流行の拡大が数日遅れるだけで爆発的な患者増は抑えられないとしています。



これを解釈しましょう。

感染者数が減少に転じるのは (11) が成り立つところまで感染者が増えたらですが、4 月 7 日のやはり日経新聞の記事によると、$\mathcal{R}_0$ は 3 月中は 1.7 だったが 4 月に入って 3 を超えたとみられるそうです。
(https://www.nikkei.com/article/DGXMZO57786850X00C20A4EA2000/)

そこで仮に $\mathcal{R}_0 = 3$ すなわち $\beta = 3\gamma$ とします。この時は、ほおっておくと式 (11) すなわち、$\mathcal{R}_0$ を用いて書き換えた

$$\mathcal{R}_0 \frac{S_n}{N} = 3\frac{S_n}{N} < 1 \tag{21}$$

から、全人口の 3 分の 2 が感染するまで感染者が増え続けますが、外出制限をして人の接触を 8 割減らせば (β の意味) より β も 8 割減ります。そうやって β を 8 割以上減らす、すなわち元の 5 分の 1 未満にできれば、式 (8) で

カッコの中が

$$1+\beta-\gamma=1+\frac{1}{5}\cdot 3\gamma-\gamma=1-\frac{2}{5}\gamma<1 \tag{22}$$

となり、指数的に急激に減少します。しかし自粛に留まり 2 割程度しか減らさなければ、やはり式 (11) から全人口の 62%が感染するまで感染者は増え続けます。

注意 1

一部では、日本は検査数が少ないから 9 ページのグラフで傾きが小さい、との声もありますが、これは誤解です。

I_n は直接分からないので、検査の結果そのうちの C (例えば $C=\frac{1}{100}$) の割合が分かるとします。つまり

$$C=\frac{(\text{検査で分かる感染者数})}{(\text{実際の感染者数})} \tag{23}$$

です。この時実際に発表される感染者数は

$$CI_n \tag{24}$$

です。これに対し、今度は $J_n=\log_{10}CI_n$ と置くと、

$$J_n=\log_{10}CI_n=\log_{10}C+\log_{10}I_n=\log_{10}C+n\log_{10}(1+\beta-\gamma) \tag{25}$$

となるので、**C が大きくても小さくてもグラフが上下に動くだけで傾きは変わりません。**

注意 2

実際は感染は一日単位で起こるわけではなく、瞬間々々に起きているので通常は微分方程式 (昔は理系の高校生は勉強していた。今は大学の理系学部の 1 or 2 年生で習う) を用いますが、考え方は同じです。

微分方程式を知っている理系の方は式 (SIR モデル) を次の式で置き換えて下さい。この式が成り立つ理由は上述と同じです。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S(t)=-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \dfrac{d}{dt}I(t)=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N}-\gamma I(t) \\ \dfrac{d}{dt}R(t)=\gamma I(t) \end{cases} \tag{微分方程式の SIR モデル}$$

注意 3

コロナウイルスの感染拡大を受けて SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics) の感染症関連の書籍の一部が無料になりました。詳しくは下記にアクセスして下さい：
https://epubs.siam.org/page/EpidemiologyCollection

本項で引用した以外にもコロナウイルスの感染拡大のシミュレーション結果と、そこから導かれる対策が幾つかマスコミで発表されていますが、それらの比較が以下のページあります：
http://jun-makino.sakura.ne.jp/articles/corona/note001.html?fbclid=IwAR3hgESK3CBdFYeAZ4BPvj3ypguqPTTLI_9A9ABS2WS9kcmxvaydodAc3bA

上記のページ最後の佐藤氏のモデルに関しては強い批判が上がっています：
https://www.sano-lab.com/?fbclid=IwAR2tWUxh-N3HifaIpu44KXC8c6meaXT_OCmHXKVQ8ZsiTOip5p6tE4uEYKQ