平成18年度前期 数学入門 Project 問題

担当：新居俊作

I ゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追い付けない」はどこまで正しくてどこが間違っているか。

II

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x < -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

は連続関数だが

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

は不連続な関数である。

それでは一般に、関数の列 $\{g_n\}$ について

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

が成り立つとき、 $\{g_n\}$ がどのような条件を満たせば g は連続関数になるか？

III

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

である。

それでは一般に、関数の列 $\{g_n\}$ について

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

が成り立つとき、 $\{g_n\}$ がどのような条件を満たせば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx$$

が成り立つか？

IV 次元とは何か？

V 連立方程式

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

は $\{a_{i,j}\}$ がどのような条件を満たす時に解けるか？解は何次元か？