波動方程式と熱方程式 –無限区間の場合–

新居俊作

2022 年 6 月 6 日

1　熱方程式

無限区間の熱方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0,\ -\infty < x < \infty \\ u(t,x) \to 0\ (x \to \pm\infty) & (\text{十分早く}) \\ u(0,x) = f(x) & f(x)\ \text{は最初に与えられた関数} \end{cases} \tag{1.1}$$

を考えるために Fourier 変換を導入する。

$$F_{T_0} := \left\{ f \in C^2[-\tfrac{T_0}{2}, \tfrac{T_0}{2}] \;\middle|\; f(-\tfrac{T_0}{2}) = f(\tfrac{T_0}{2}), \right\} \tag{1.2}$$

を周期 T_0 の周期関数の空間とする。この空間に内積、ノルム、Laplacian Δ_{T_0} を [新居 2] における F_D や F_N の場合と同様に定めると、$f \in F_{T_0}$ は次のように Fourier 級数に展開される:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2\pi n}{T_0} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T_0} x \right\} \tag{1.3}$$

但し

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x) dx \\ a_n = \dfrac{2}{T_0} \displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x) \cos \dfrac{2\pi}{T_0} nx dx \\ b_n = \dfrac{2}{T_0} \displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x) \sin \dfrac{2\pi}{T_0} nx dx \end{cases} \tag{1.4}$$

である。これを本稿４節 (15 ページ以降) にあるオイラーの公式を用いて書き直すと：

$$
\begin{aligned}
f(x) =& a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{i\Omega_0 nx} + e^{-i\Omega_0 nx}}{2} + b_n \frac{e^{i\Omega_0 nx} - e^{-i\Omega_0 nx}}{2i} \right\} \\
=& a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\Omega_0 nx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\Omega_0 nx} \right\}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

但し $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ とする。

$F_0 = a_0$ として $F_0 = F_0 e^{i\Omega_0 \cdot 0 \cdot x}$ と思い、$F_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$、$F_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ とすると

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{i\Omega_0 nx} \tag{1.6}
$$

となる。但し

$$
F_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x) e^{-i\Omega_0 nx} dx \tag{1.7}
$$

である。

ここで $T_0 \to +\infty$ (従って $\Omega_0 \to 0$) とすると、実数全体で定義された関数を考えることができる。以下その手続きを解説する。

先ず

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_0 \frac{F_n e^{i\Omega_0 nx}}{\Omega_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_0 \frac{2\pi F_n e^{i\Omega_0 nx}}{\Omega_0} \tag{1.8}
$$

更に $\dfrac{2\pi F_n}{\Omega_0} = F(\Omega_0 n)$ として

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_0 F(\Omega_0 n) e^{i\Omega_0 nx} \tag{1.9}
$$

この時

$$
F(\Omega_0 n) = \frac{2\pi}{\Omega_0} F_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x) e^{-i\Omega_0 nx} dx \tag{1.10}
$$

ここで $T_0 \to +\infty$ ($i.e.$ $\Omega_0 \to 0$) とすると (1.9) の右辺は

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) e^{i\Omega x} d\Omega \tag{1.11}
$$

に収束することが期待される*(区分求積法)。また (1.10) は

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\Omega x} dx \tag{1.12}$$

に収束すると思われる。

定義 1. $(-\infty, +\infty)$ で定義された関数 $f(x)$ に対し (1.12) で定義される関数 $F(\Omega)$ を $f(x)$ の Fourier 変換とよび $\mathcal{F}f$ 等で表す。

逆に $F(\Omega)$ から (1.11) によって $f(x)$ を定める変換を Fourier 逆変換とよび $\mathcal{F}^{-1}F$ 等で表す。

定理 1 (Fourier 変換の性質)**.**

- $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f, \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}F = F$
- $(\mathcal{F}f') = i\Omega(\mathcal{F}f), \quad (f(x) \to 0 \ (x \to \pm\infty)$ のとき。)
- f, g の合成積 (畳み込み、convolution) を

  $$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$$

  で定めると、$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$

  よって $\mathcal{F}^{-1}(FG) = (\mathcal{F}^{-1}F) * (\mathcal{F}^{-1}G)$

証明. 最初の式は $\mathcal{F}^{-1}$ の定義より。

次の式は

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\Omega x} dx \\ &= \left[\frac{1}{-i\Omega} e^{-i\Omega x} f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{i\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\Omega x} dx \\ &= \frac{1}{i\Omega} (\mathcal{F}f')(\Omega)\end{aligned} \tag{1.13}$$

*もちろんこれが収束するか、その値が本当にその積分で与えられるかは証明が必要なことであるが、そもそも周期 T_0 の周期関数で $T_0 \to +\infty$ とする操作が何を意味するかを正確に定式化することからして難しい問題である。

むしろこのような「こんなことが成り立ちそうな気がする」といった議論 (そういう議論を heuristic (ヒューリスティック) な議論とい呼ぶ) は、期待される公式や定理を探すのに用い、一度有り得るべき公式や定理が特定された後は、その heuristic な議論を証明しようとするよりも、実際にその公式や定理が成り立つための条件を最初の heurisitic な議論とは別に求める方が生産的である場合が多い。

より。

　最後の式は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-i\Omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\Omega y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)e^{-i\Omega(x-y)}dx\right)dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\Omega y}dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\Omega x}dx\right) \\ &= (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)\end{aligned} \tag{1.14}$$

より。 □

問題 1. Fourier 変換の定義を調べよ。すなわち、Fourier 変換はどのような性質を満たす関数に対してどの様に定められるか。(必要ならば、積分の意味は何か、も明らかにする。) また、変換後の関数はどのような性質を満たすか。また、その基本的な性質を調べよ。

　以下 Fourier 変換を用いて無限区間の熱方程式のを解く：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0,\ -\infty<x<\infty \\ u(t,x)\to 0\ (x\to\pm\infty) & (\text{十分早く}) \\ u(0,x)=f(x) & f(x)\ \text{は最初に与えられた関数} \end{cases} \tag{1.15}$$

先ず

$$U(t,\Omega)=\mathcal{F}u(t,x) \tag{1.16}$$

とおくと、方程式は U に関する以下の方程式に変換される：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\Omega^2(\mathcal{F}u) = -\Omega^2 U \tag{1.17}$$

これを解いて

$$U(t,\Omega)=e^{-\Omega^2 t}U(0,\Omega)=e^{-\Omega^2 t}(\mathcal{F}f) \tag{1.18}$$

　ここから $u(t,x)$ を求めるには $e^{-\Omega^2 t}$ の Fourier 逆変換が必要であるが、それは次の様に求まる：

($\alpha > 0$ について)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-\alpha x^2}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 - i\Omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{i\Omega}{\sqrt{\alpha}} t} dt \qquad (\sqrt{\alpha} x = t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t + \frac{i\Omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} dt \\
&=^{\dagger} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \\
\therefore \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\Omega^2 t}\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{\Omega^2}{4\frac{1}{4t}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

これより $u(t,x)$ は次の様に求まる：

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) * f \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

問題 2. 初期値 $f(x)$ について $\mathrm{supp} f = \{x |\ f(x) \neq 0\ \}$ が有界であっても $t > 0$ について $\mathrm{supp}\ u(t,x)$ は非有界であることを示せ。すなわち $f(x) \geq 0, f(x) \not\equiv 0$ かつ $\mathrm{supp} f$ は有界とするとき $\forall t > 0\ \forall x\ u(t,x) > 0,$ を示せ。(ただし、問題 1 の解答によっては、上記の条件だけでは不十分なので、問題 1 の解答に合わせて必要な条件を加えよ。)

この性質を熱方程式の無限伝播性とよぶ。(次のセクションの波動方程式と比較せよ。)

[†]この等号は複素解析学で学ぶ留数定理の応用。九州大学大学院数理学府修士課程 2017 年度入試問題にもこの計算が出題されている。

2　波動方程式

無限区間の波動方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < t, x < \infty \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_0(x) \text{ は最初に与えられた関数} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x), \quad v_0(x) \text{ は最初に与えられた関数} \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える。(後の議論の便宜上座標を規格化せずに右辺に係数 c^2 を残す。)

$\xi = x - ct,\ \eta = x + ct$ とおいて $\mathbb{R}^2$ の座標変換 $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ を行う。この変換を逆に解くと $t = \dfrac{1}{2c}(\eta - \xi),\ x = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta)$ なので

$$u(t,x) = u\left(\frac{1}{2c}(\eta - \xi), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) \tag{2.2}$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{1}{2c} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) &= -\frac{1}{4c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{4c} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4c} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{4c^2}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

従って

$$u(t,x) \text{ が (2.1) の偏微分方程式を満たす} \iff \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{2.5}$$

以下これを解く。

先ず (2.5) より $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ は ξ に依存していないので、ある η の関数 $g'(\eta)$ を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g'(\eta). \tag{2.6}$$

これを η で積分して

$$u(\xi,\eta) = u(\xi,0) + g(\eta) \tag{2.7}$$

$u(\xi,0)$ は η によらないので $f(\xi)$ と書くと

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \tag{2.8}$$

すなわち

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct). \tag{2.9}$$

これは、波形 $f(x)$ で右へ速さ c で進む波と、波形 $g(x)$ で左へ速さ c で進む波を重ね合わせたものになっている。これを D'Alembert (ダランベール) の解と呼ぶ。

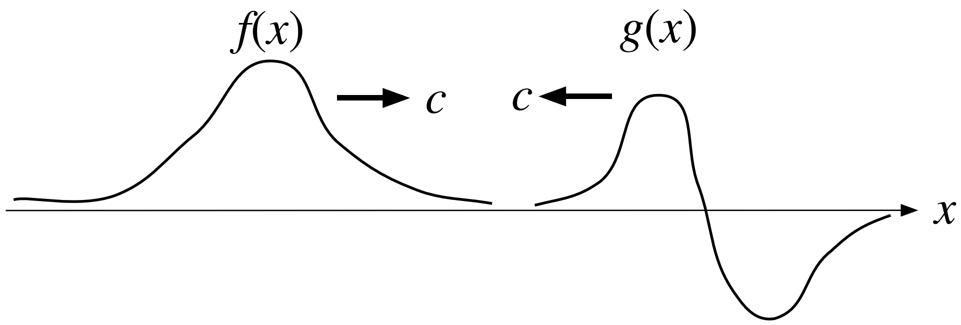

図 2.1:

以下では、初期条件を満たす $f(x),\ g(x)$ を求める。
(2.9) を t で微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct) \tag{2.10}$$

なので、初期条件は次のようになる：

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -cf'(x) + cg'(x) = v_0(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

第 2 式を c で割って x で積分すると

$$-f(x) + g(x) = -f(x_0) + g(x_0) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} v_0(s)ds \tag{2.12}$$

これを第 1 式に足し引きして：

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}u_0(x) - \dfrac{1}{2}\left(-f(x_0) + g(x_0)\right) - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} v_0(s)ds \\ g(x) = \dfrac{1}{2}u_0(x) + \dfrac{1}{2}\left(-f(x_0) + g(x_0)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} v_0(s)ds \end{cases} \tag{2.13}$$

従って

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}v_0(s)ds \tag{2.14}$$

となる。これを Stokes(ストークス) の波動公式と呼ぶ。

反射

$-\infty<x<+\infty$ で定義された波動方程式の解は以上の様に波が伝わっていくだけであるが、$x=0$ に端がある、*i.e.* (2.1) が $0\le x<+\infty$ で定義されているときは波の反射が起きる。

(1) 固定端

波動方程式を $0\le x<+\infty$ で考える。$x=0$ では弦は固定されているとする、すなわち Dirichlet 境界条件を課す：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x}, & 0\le x<+\infty\\ u(t,0)=0, & -\infty<t<+\infty\end{cases} \tag{2.15}$$

この場合も当然

$$u(t,x)=f(x-ct)+g(x+ct) \tag{2.16}$$

と書けるが、更に

$$u(t,0)=f(-ct)+g(ct)=0, \qquad -\infty<t<+\infty \tag{2.17}$$

が成り立たなければならない。従って

$$f(x)=-g(-x), \qquad -\infty<x<+\infty \tag{2.18}$$

が成り立つ。よって

$$u(t,x)=-g(-(x-ct))+g(x+ct) \tag{2.19}$$

と書ける。

$-g(-x)$ は $g(x)$ を $x=0$ 中心に上下、左右反転したものである：よってこの解は波形 $g(x)$ の波が右から速さ c で進んできて $x=0$ 反射して、上下、左右反転した形で速さ c で右へ進んで行く。

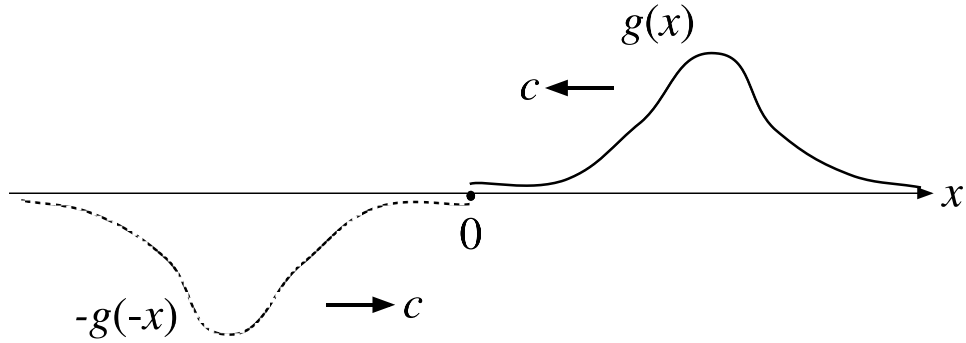

図 2.2:

(2) 自由端

波動方程式を $0 \leq x < +\infty$ で考える。$x = 0$ では弦は固定されていないとする、この場合は Fourier 級数と偏微分方程式のプリントの式 (2.3) において $x = 0$ の左側から力がかからないので $T(0)\sin\theta(0) = 0$ となり $\theta(0) = 0$ となる。従ってこの場合は Neumann 境界条件を課す：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x}, & 0 \leq x < +\infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, & -\infty < t < +\infty \end{cases} \tag{2.20}$$

この場合も

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2.21}$$

を x で微分して境界条件を課すと：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = f'(-ct) + g'(ct) = 0, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{2.22}$$

が成り立たなければならない。従って

$$f'(x) = -g'(-x), \qquad -\infty < x < +\infty \tag{2.23}$$

が成り立つ。これを積分して

$$f(x) = g(-x), \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{2.24}$$

よって

$$u(t, x) = g(-(x - ct)) + g(x + ct) \tag{2.25}$$

と書ける。

$g(-x)$ は $g(x)$ を $x=0$ 中心に左右反転したものである。よってこの解は波形 $g(x)$ の波が右から速さ c で進んできて $x=0$ 反射して、左右反転した形で速さ c で右へ進んで行く。

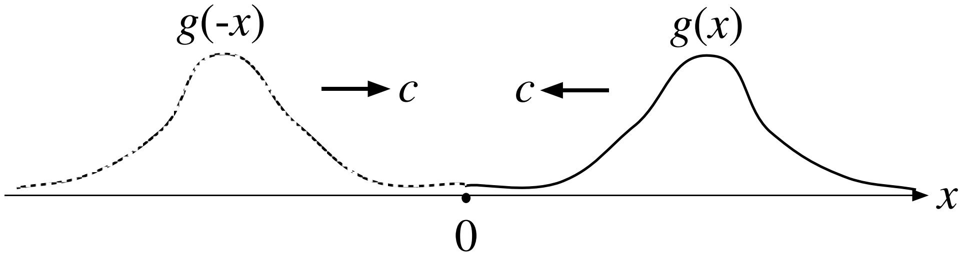

図 2.3:

問題 3. 波動方程式の $(0,1)$ 区間での Dirichlet 境界値問題 ([新居 2] の式 (5.15)) を考える。そこでの解を D'Alembert の解として解釈せよ。ヒント：三角関数の積和の公式を用いる。

3　３次元波動方程式

3.1　方程式の導出

以下では音波を例に 3 次元の波動方程式を考える。

空気、水等の流体は粘性が無視できるくらいに小さいときは以下の Euler (オイラー) 方程式に従うとされる‡：

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \tag{3.1}$$

ここで $\mathbf{u} := (u_x, u_y, u_z), \rho, p, \mathbf{f}$ は流体の流速、密度、圧力、流体に働く外力である。

外力は無く ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$)、流体の変化は小さい *i.e.* $|\mathbf{u}|$ および $\rho = \rho_0 + \Delta\rho, p = p_0 + \Delta p$ として $\Delta\rho, \Delta p$ とその微分は小さいとして、それらの 2

‡詳しくは流体力学の教科書参照

次以上の項を無視すると次が得られる：

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p, \qquad i.e. \begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial u_x}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_0 \dfrac{\partial u_y}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \rho_0 \dfrac{\partial u_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \tag{3.2}$$

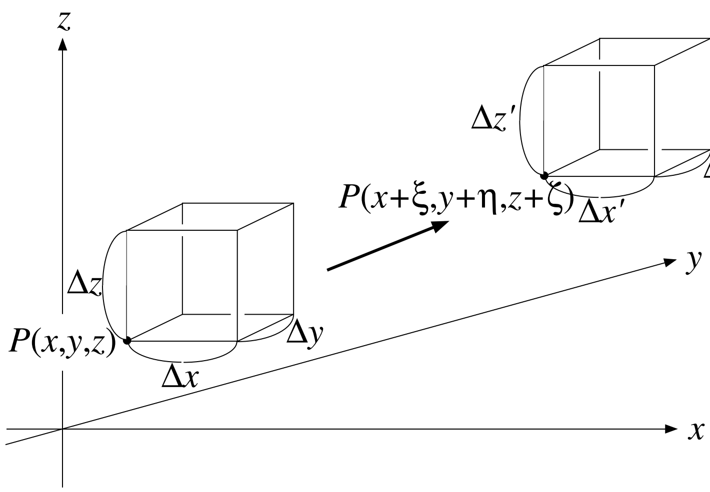

図 3.1:

流体中の点 $P(x, y, z)$ を一つの頂点とする立方体が流体の流れに沿って上図の様に動くとすると、２次以上の項を無視して

$$\begin{aligned} x + \Delta x \text{ は } x + \Delta x + \xi(x + \Delta x, y, z) = &\ x + \Delta x + \xi(x, y, z) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x \text{ へ} \\ y + \Delta y \text{ は } y + \Delta y + \eta(x, y + \Delta y, z) = &\ y + \Delta y + \eta(x, y, z) + \frac{\partial \eta}{\partial y}\Delta y \text{ へ} \\ z + \Delta z \text{ は } z + \Delta z + \zeta(x, y, z + \Delta z) = &\ z + \Delta z + \zeta(x, y, z) + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\Delta z \text{ へ} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と変わる。つまり２次以上の項を無視すると

$$\Delta x' = \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x,\ \Delta y' = \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial y}\Delta y,\ \Delta z' = \Delta z + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\Delta z \tag{3.4}$$

である。よってこの直方体の体積 $\Delta V := \Delta x \Delta y \Delta z$ は

$$\Delta V' := \Delta x' \Delta y' \Delta z' = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\Delta x \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\right)\Delta y \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\Delta z \tag{3.5}$$

に変化する。従って体積変化の割合は、２次以上の項を無視すると：

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \eta}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \zeta}{\partial z}(x,y,z) \tag{3.6}$$

圧力が Δp だけ変化してこれだけの体積変化が起こるのだから、比例定数を K として

$$\Delta p = -K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right). \tag{3.7}$$

これを t で微分して

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -K \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial t} \right). \tag{3.8}$$

ここで $u_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial t},\ u_y = \dfrac{\partial \eta}{\partial t},\ u_z = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}$ なので

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -K \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \tag{3.9}$$

もう一回 t で微分すると

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} = -K \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t} \right). \tag{3.10}$$

(3.2) より

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right). \tag{3.11}$$

$p = p_0 + \Delta p$ で p_0 は定数なので：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right). \tag{3.12}$$

となり、三次元の波動方程式が得られる。

なお、流体の密度を $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ とすると、質量保存則から：

$$\rho_0 \Delta V = \rho \Delta V' \tag{3.13}$$

$$i.e.\ \rho = \rho_0 + \Delta\rho = \frac{\Delta V}{\Delta V'} \rho_0 \tag{3.14}$$

$$\therefore \ \Delta\rho = \left(\frac{\Delta V}{\Delta V'} - 1\right)\rho_0 = -\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V'}\rho_0 \tag{3.15}$$

よって $\Delta x, \Delta y, \Delta z \approx 0$ のとき $\Delta V \approx \Delta V'$ なので

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} \to -\frac{1}{K}\Delta p \quad (\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0) \tag{3.16}$$

より、次が成り立つ：

$$\Delta p = \frac{K}{\rho_0}\Delta\rho \tag{3.17}$$

従って $p = p_0 + \dfrac{K}{\rho_0}\Delta\rho$ となり

$$\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial z^2}\right). \tag{3.18}$$

つまり $\rho\ \rho_0 + \Delta\rho$ として

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right). \tag{3.19}$$

となり、密度 ρ も p と同じ方程式を満たす。

3.2 平面波

以下では一次元場合と同様に $c = \sqrt{\dfrac{K}{\rho_0}}$ とおく：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right). \tag{3.20}$$

$f(\xi)$ を 一変数 C^2 級関数とし、$\mathbf{u} = (l, m, n)$ を単位ベクトル ($||\mathbf{u}|| = 1$) として、位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とするとき

$$p = f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) \tag{3.21}$$

とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{d^2 f}{d\xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = l^2 \dfrac{d^2 f}{d\xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} = m^2 \dfrac{d^2 f}{d\xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2} = n^2 \dfrac{d^2 f}{d\xi^2} \end{cases} \quad \text{より} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \tag{3.22}$$

が成り立つ。従って、任意の $f(\xi)$ に対し、この様に定義された $p(x, y, z)$ は波動方程式 (3.20) を満たす。

　これは $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} =$ (一定) 上では p の値が一定で、速さ c で $\mathbf{u}$ 方向に進む波である。これを平面波と呼ぶ。

　二次元でも同様の波が考えられる。

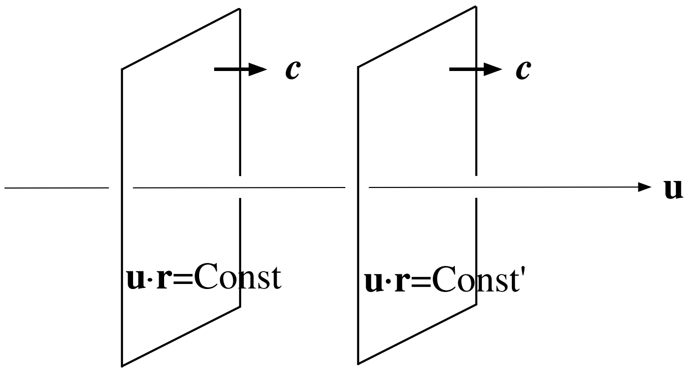

図 3.2:

3.3　球面波

　三次元波動方程式を原点中心の球座標：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi, \end{cases} \qquad (0 \le r,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi) \tag{3.23}$$

で表すことを考える。この時

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}+\frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}\end{aligned} \tag{3.24}$$

なので、もし p が (φ,θ) によらないとすると

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp) \tag{3.25}$$

となるので、三次元波動方程式は

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=c^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp) \tag{3.26}$$

i.e.

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp) \tag{3.27}$$

となり、(rp) は一次元波動方程式を $0 \le r$ で満たす。
従って

$$rp = f(r-ct)+g(r+ct), \quad i.e.\ p=\frac{1}{r}f(r-ct)+\frac{1}{r}g(r+ct) \tag{3.28}$$

の形の解を持つ。
$\frac{1}{r}f(r-ct)$ は原点から速さ c で広がる球面状の波を表し、$\frac{1}{r}g(r+ct)$ は原点へ向かう波を表す。共に大きさは原点からの距離に反比例する。これを球面波とよぶ。

問題 4. 音波に関して、Doppler (ドップラー) 効果と衝撃波について調べよ。(どちらも音波の速度が有限であることによる現象である。)

4 付録 – オイラーの公式 –

オイラーの公式
実数 θ に対して

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{4.1}$$

と定義しオイラーの公式とよぶ[§]。この時以下が成り立つ：

[§]複素解析を習うと、複素数 z に対し e^z が定義できるので、その下では定義式ではなく公式になる。しかし、ここでは便宜上定義式としておく。

- $$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0 \tag{4.2}$$

- $$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{e^{\theta}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

- $$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

つまり指数法則が成り立つ。

これを用いて $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \tag{4.5}$$

と定めると、複素数 z についても指数公式が成り立つ：

$$e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{4.6}$$

問題 5. 複素数値関数 $z(t)$ (t は実数値変数) に対し、極限

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = z_0 \tag{4.7}$$

を

$$\lim_{t\to t_0} |z(t) - z_0| = 0 \tag{4.8}$$

で定義する。このとき、$z(t) = x(t) + iy(t)$ と実部と虚部を分けて書くと

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} \tag{4.9}$$

が成り立つことを証明せよ。

上の問題を使うと、微分法則も以下の様に成り立つ：
t を実数とし $\lambda = \alpha + i\beta$ (α, β は実数）とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha t + i\beta t}\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t)\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha t}\cos\beta t\right\} + i\frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha t}\sin\beta t)\right\} \\
&= \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t + e^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t) + i\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) \\
&= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\
&= \lambda e^{\lambda t}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

参考文献

[新居 1] 新居俊作 著
「微分方程式超入門」
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/Diff-Eqn.pdf

[新居 2] 新居俊作 著
「フーリエ級数と偏微分方程式」
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/Fourier.pdf

[壁谷] 壁谷吉継 著
「フーリエ解析と偏微分方程式」
共立出版 (2010 年)

[矢崎] 矢崎成俊 著
「弱点克服 大学生のフーリエ解析」
東京図書 (2011 年)