III. フーリエ級数

関数をベクトルのように扱う方法

1. ベクトル (復習)

1. ベクトル (復習)

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (又は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$) のベクトルとし, c を実数 (又は複素数) とする.

1. ベクトル (復習)

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (又は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$) のベクトルとし, c を実数 (又は複素数) とする.

- $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \qquad c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$$

  (ベクトルの和とスカラー倍)

1. ベクトル (復習)

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (又は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$) のベクトルとし, c を実数 (又は複素数) とする.

- $$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}, \qquad c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$$
  (ベクトルの和とスカラー倍)
- $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
  ($\mathbf{u}$ の -1 倍とゼロベクトル)

1. ベクトル (復習)

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (又は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$) のベクトルとし, c を実数 (又は複素数) とする.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \qquad c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$
  (ベクトルの和とスカラー倍)
- $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
  ($\mathbf{u}$ の -1 倍とゼロベクトル)
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n}$)
  (ベクトルの内積)

1. ベクトル (復習)

[内積の性質**]**

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v})$)

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v})$)
- $(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u_2}, \mathbf{v})$
  $(\mathbf{u}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v_1}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v_2})$

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v})$)
- $(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u_2}, \mathbf{v})$
  $(\mathbf{u}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v_1}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v_2})$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ であり, 特に $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v},\mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u},\mathbf{v}) = c(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u},c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u},\mathbf{v}) = c(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\bar{c}\mathbf{v})$)
- $(\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2},\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1},\mathbf{v}) + (\mathbf{u_2},\mathbf{v})$
  $(\mathbf{u},\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}) = (\mathbf{u},\mathbf{v_1}) + (\mathbf{u},\mathbf{v_2})$
- $(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$ であり, 特に $(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}$ (ベクトルの長さ, 又はノルム)

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v})$)
- $(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u_2}, \mathbf{v})$
  $(\mathbf{u}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v_1}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v_2})$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ であり, 特に $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ (ベクトルの長さ, 又はノルム)
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ であるとき, ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は直交する

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v})$)
- $(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u_2}, \mathbf{v})$
  $(\mathbf{u}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v_1}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v_2})$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ であり, 特に $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ (ベクトルの長さ, 又はノルム)
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ であるとき, ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は直交する
- ベクトルの列 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ が正規直交系を成すとは, $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ ($i = 1, \ldots, k$) かつ $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ ($i \neq j$) が成り立つことである

1. ベクトル (復習)

[内積の性質]

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  (複素ベクトルについては $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$)
- $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v})$
  (複素ベクトルについては $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v})$)
- $(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u_2}, \mathbf{v})$
  $(\mathbf{u}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v_1}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v_2})$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ であり, 特に $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ (ベクトルの長さ, 又はノルム)
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ であるとき, ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は直交する
- ベクトルの列 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ が正規直交系を成すとは, $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ かつ $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ $(i \neq j)$ が成り立つことである
- ベクトルの列 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ が $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$ の) 正規直交基底であるとは, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ が正規直交系であり, 更に $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) のどのベクトル $\mathbf{u}$ についても $c_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_1), \ldots, c_n = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_n)$ とおくと $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$ と書けることである

2. 関数

2. 関数

$f(x)$, $g(x)$ を区間 $[a, b]$ で定められた微分可能な実数値関数 (又は複素数値関数) で, 有限個の点を除いて連続なものとする.
更に x_0 を不連続点とすると $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0 \pm 0} g(x)$ 及び $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f'(x)$, $\lim_{x \to x_0 \pm 0} g'(x)$ が存在するとする ($x \to x_0 - 0$ と $x \to x_0 + 0$ で極限値が違っても良い).
また, c を実数 (又は複素数) とする.
このとき以下のように f と g の演算を定義する.

2. 関数

$f(x)$, $g(x)$ を区間 $[a,b]$ で定められた微分可能な実数値関数 (又は複素数値関数) で, 有限個の点を除いて連続なものとする.

更に x_0 を不連続点とすると $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0 \pm 0} g(x)$ 及び $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f'(x)$, $\lim_{x \to x_0 \pm 0} g'(x)$ が存在するとする ($x \to x_0 - 0$ と $x \to x_0 + 0$ で極限値が違っても良い).

また, c を実数 (又は複素数) とする.

このとき以下のように f と g の演算を定義する.

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (cf)(x) = c(f(x))$
  (関数の和とスカラー倍)

2. 関数

$f(x)$, $g(x)$ を区間 $[a,b]$ で定められた微分可能な実数値関数 (又は複素数値関数) で, 有限個の点を除いて連続なものとする.
更に x_0 を不連続点とすると $\displaystyle\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0\pm 0} g(x)$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to x_0\pm 0} f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0\pm 0} g'(x)$ が存在するとする ($x \to x_0 - 0$ と $x \to x_0 + 0$ で極限値が違っても良い).
また, c を実数 (又は複素数) とする.
このとき以下のように f と g の演算を定義する.

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (cf)(x) = c(f(x))$
  (関数の和とスカラー倍)
- $0(x) \equiv 0$ (全ての x について $0(x) = 0$) として $f + (-f) = 0$
  (関数 f の -1 倍とゼロ関数)

2. 関数

$f(x)$, $g(x)$ を区間 $[a,b]$ で定められた微分可能な実数値関数 (又は複素数値関数) で, 有限個の点を除いて連続なものとする.
更に x_0 を不連続点とすると $\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0\pm 0} g(x)$ 及び $\lim_{x\to x_0\pm 0} f'(x)$, $\lim_{x\to x_0\pm 0} g'(x)$ が存在するとする ($x \to x_0 - 0$ と $x \to x_0 + 0$ で極限値が違っても良い).
また, c を実数 (又は複素数) とする.
このとき以下のように f と g の演算を定義する.

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (cf)(x) = c(f(x))$
  (関数の和とスカラー倍)
- $0(x) \equiv 0$ (全ての x について $0(x) = 0$) として $f + (-f) = 0$
  (関数 f の -1 倍とゼロ関数)
- $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \ \left(\text{複素数値関数については } (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \right)$
  (関数の内積)

2. 関数

[内積の性質]

2. 関数

[内積の性質**]**

- $(f, g) = (g, f)$
  (複素数値関数については $(f, g) = \overline{(g, f)}$**)**

2. 関数

[内積の性質**]**

- $(f, g) = (g, f)$
  (複素数値関数については $(f, g) = \overline{(g, f)}$**)**
- $(cf, g) = c(f, g) = (f, cg)$
  (複素数値関数については $(cf, g) = c(f, g) = (f, \bar{c}g)$**)**

2. 関数

[内積の性質]

- $(f, g) = (g, f)$
  (複素数値関数については $(f, g) = \overline{(g, f)}$)
- $(cf, g) = c(f, g) = (f, cg)$
  (複素数値関数については $(cf, g) = c(f, g) = (f, \bar{c}g)$)
- $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
  $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$

2. 関数

[内積の性質]

- $(f, g) = (g, f)$
  (複素数値関数については $(f, g) = \overline{(g, f)}$)
- $(cf, g) = c(f, g) = (f, cg)$
  (複素数値関数については $(cf, g) = c(f, g) = (f, \bar{c}g)$)
- $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
  $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$
- $(f, f) \geq 0$ であり, 特に $(f, f) = 0$ ならば $f = 0$

2. 関数

[内積の性質]

- $(f, g) = (g, f)$
  (複素数値関数については $(f, g) = \overline{(g, f)}$)
- $(cf, g) = c(f, g) = (f, cg)$
  (複素数値関数については $(cf, g) = c(f, g) = (f, \bar{c}g)$)
- $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
  $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$
- $(f, f) \geq 0$ であり, 特に $(f, f) = 0$ ならば $f = 0$
- $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ (関数のノルム, 「長さ」とは言わない)

2. 関数

[内積の性質]

- $(f, g) = (g, f)$
  (複素数値関数については $(f, g) = \overline{(g, f)}$)
- $(cf, g) = c(f, g) = (f, cg)$
  (複素数値関数については $(cf, g) = c(f, g) = (f, \bar{c}g)$)
- $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
  $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$
- $(f, f) \geq 0$ であり, 特に $(f, f) = 0$ ならば $f = 0$
- $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ (関数のノルム, 「長さ」とは言わない)
- $(f, g) = 0$ であるとき, 関数 f と g は直交すると言う

2. 関数

[内積の性質]

- $(f,g)=(g,f)$
  (複素数値関数については $(f,g)=\overline{(g,f)}$)
- $(cf,g)=c(f,g)=(f,cg)$
  (複素数値関数については $(cf,g)=c(f,g)=(f,\bar{c}g)$)
- $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$
  $(f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2)$
- $(f,f)\geq 0$ であり, 特に $(f,f)=0$ ならば $f=0$
- $\|f\|:=\sqrt{(f,f)}$ (関数のノルム, 「長さ」とは言わない)
- $(f,g)=0$ であるとき, 関数 f と g は直交すると言う
- 関数の列 $f_1,f_2,\ldots$ (無限個でも良い) が正規直交系を成すとは, $\|f_i\|=1$ $(i=1,2,\ldots)$ かつ $(f_i,f_j)=0$ $(i\neq j)$ が成り立つこととする.

2. 関数

[内積の性質]

- $(f,g)=(g,f)$
  (複素数値関数については $(f,g)=\overline{(g,f)}$)
- $(cf,g)=c(f,g)=(f,cg)$
  (複素数値関数については $(cf,g)=c(f,g)=(f,\bar{c}g)$)
- $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$
  $(f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2)$
- $(f,f)\geq 0$ であり, 特に $(f,f)=0$ ならば $f=0$
- $\|f\|:=\sqrt{(f,f)}$ (関数のノルム, 「長さ」とは言わない)
- $(f,g)=0$ であるとき, 関数 f と g は直交すると言う
- 関数の列 $f_1,f_2,\ldots$ (無限個でも良い) が正規直交系を成すとは, $\|f_i\|=1$ $(i=1,2,\ldots)$ かつ $(f_i,f_j)=0$ $(i\neq j)$ が成り立つこととする.
- 関数の列 $f_1,f_2,\ldots$(必ず無限個) が完全正規直交系であるとは, $f_1,f_2,\ldots$ が 正規直交系であり, 更に関数 f が最初の条件を満たすならば, $c_1=(f,f_1)$, $c_2=(f,f_2),\ldots$ とおくと不連続点以外では $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_if_i(x)$ が成り立つこととする.

3. フーリエ級数—3.1 基本定理

3. フーリエ級数—3.1 基本定理

[定理]

- $[-\pi,\pi]$ で定義された実数値関数の列
  $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots$ は正規直交系を成す.
- $[-\pi,\pi]$ で定義された複素数値関数の列
  $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix}, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix}, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2ix}, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2ix}, \ldots$ は正規直交系を成す.

[定理]

- $[-\pi, \pi]$ で定義された実数値関数の列
  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots$ は正規直交系を成す.
- $[-\pi, \pi]$ で定義された複素数値関数の列
  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2ix}, \ldots$ は正規直交系を成す.

$\because$ 加法定理より

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\},$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\},$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}$$ なので

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n \text{ のとき}),$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (m = n \text{ も含む}),$ $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$ より最初の主張は成り立つ.

二番目の主張は $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = \left[\frac{1}{im}e^{imx}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq 0 \text{ のとき})$ と $e^0 = 1$ より明らか.

3. フーリエ級数—3.1 基本定理

[定理]

- $f(x)$ を $[-\pi,\pi]$ で定義された実数値関数で有限個の点を除いて連続で, 不連続点では前述の極限値の条件を満たすとする. このとき
$a_0=\left(f,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), a_n=\left(f,\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right), b_n=\left(f,\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)$ とすると
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx+b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=f(x)\quad (\,x \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx+b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$$
(x は f の不連続点) が成り立つ.
- $f(x)$ を $[-\pi,\pi]$ で定義された複素数値関数で有限個の点を除いて連続で, 不連続点では前述の極限値の条件を満たすとする. このとき $c_n=\left(f,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right)$ とすると
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}=f(x)\quad (\,x \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}=\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)\quad (\,x \text{ は } f \text{ の不連続点}) \text{ が成り立つ.}$$

[周期関数]

- $f(\xi)$ を周期 $2l$ の実数値周期関数で, 一周期内では有限個の点を除いて連続で, 不連続点では前述の極限値の条件を満たすとする. このとき $f(\xi)$ は, $[-l, l]$ で定義された関数を繰り返したものとみなすことができる. よって $\xi = \frac{x}{\pi} l$ とおいて前定理より
$$a_0 = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2l}} d\xi, a_n = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi\xi}{l} d\xi, b_n = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$ として
$$a_0 \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi\xi}{l} + b_n \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \right) = f(\xi) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$a_0 \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi\xi}{l} + b_n \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} \right) = \frac{1}{2} \left(f(\xi - 0) + f(\xi + 0) \right)$$
(ξ は f の不連続点) が成り立つ. これを $f(\xi)$ のフーリエ展開とよぶ.

- $f(\xi)$ が複素数値関数のときは, $c_n = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{in\pi\xi}{l}} d\xi$ とすると
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{in\pi\xi}{l}} = f(\xi) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{in\pi\xi}{l}} = \frac{1}{2} \left(f(\xi - 0) + f(\xi + 0) \right) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の不連続点}) \text{ が成り立つ.}$$

[練習問題]

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & 2nl < \xi < (2n+1)l \\ 0 & (2n+1)l < \xi < (2n+2)l \end{cases} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

のフーリエ展開を求めよ.

[練習問題]

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & 2nl < \xi < (2n+1)l \\ 0 & (2n+1)l < \xi < (2n+2)l \end{cases} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

のフーリエ展開を求めよ.

[解答]

$$a_0 = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2l}} d\xi = \sqrt{\frac{l}{2}}$$

$$a_n = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \frac{\sqrt{l}}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi\xi}{l} \right]_0^l = 0$$

$$b_n = \int_{-l}^{l} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \frac{\sqrt{l}}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi\xi}{l} \right]_0^l = \frac{\sqrt{l}}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

なので

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{1}{\sqrt{2l}} + \frac{2\sqrt{l}}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{3\pi}{l} \xi + \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{5\pi}{l} \xi \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi\xi}{l} \qquad (\xi \neq 0, \pm l, \pm 2l, \ldots)$$

3. フーリエ級数—3.2 応用

[偶関数]

- $f(\xi)$ は前記の条件に加えて偶関数である, 即ち $f(-\xi) = f(\xi)$ が成り立つとする. このとき $f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ も偶関数であり、また $f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ は奇関数 $\left(f(-\xi)\sin(-\frac{n\pi\xi}{l})\right.$ $\left.= -f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right)$ なので $a_n = 2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, \quad b_n = 0$ となる.
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right) = f(\xi) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(f(\xi-0)+f(\xi+0)\right) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の不連続点})$$

3. フーリエ級数—3.2 応用

[偶関数]

- $f(\xi)$ は前記の条件に加えて偶関数である, 即ち $f(-\xi)=f(\xi)$ が成り立つとする. このとき $f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ も偶関数であり、また $f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ は奇関数 $\Big(f(-\xi)\sin(-\frac{n\pi\xi}{l})$ $=-f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\Big)$ なので $a_n=2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,\quad b_n=0$ となる.
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right)=f(\xi)\quad(\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right)=\frac{1}{2}\left(f(\xi-0)+f(\xi+0)\right)\quad(\xi \text{ は } f \text{ の不連続点})$$
- また $f(\xi)$ が $(0,l)$ で定義された関数であるとき、これを偶関数に拡張したもの, 即ち $-l<\xi<0$ に対し $f(\xi):=f(-\xi)$ と定義したものを考えることにより,
$a_0=2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{2l}}d\xi,\quad a_n=2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ として以下が成り立つ.
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right)=f(\xi)\quad(\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$a_0\frac{1}{\sqrt{2l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right)=\frac{1}{2}\left(f(\xi-0)+f(\xi+0)\right)\quad(\xi \text{ は } f \text{ の不連続点})$$
これを $f(\xi)$ のフーリエ余弦展開とよぶ.

[練習問題]

開区間 $(0, l)$ で定義された関数 $f(\xi) = l - 2\xi$ のフーリエ余弦展開を求めよ.

[練習問題]

開区間 $(0, l)$ で定義された関数 $f(\xi) = l - 2\xi$ のフーリエ余弦展開を求めよ.

[解答]

$$a_0 = 2\int_0^l (l - 2\xi)\frac{1}{\sqrt{2l}}d\xi = 0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^l (l - 2\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \\
&= \frac{2\sqrt{l}}{n\pi}\left[(l - 2\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right]_0^l + 2\frac{2\sqrt{l}}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \\
&= -\frac{4l^{\frac{3}{2}}}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]_0^l = \frac{4l^{\frac{3}{2}}}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= \frac{8l^{\frac{3}{2}}}{\pi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi\xi}{l} + \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{3\pi\xi}{l} + \frac{1}{25}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{5\pi\xi}{l} + \cdots\right) \\
&= \frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi\xi}{l} \qquad (0 < \xi < l)
\end{aligned}$$

3. フーリエ級数—3.2 応用

[奇関数]

- $f(\xi)$ は前記の条件に加えて奇関数である, 即ち $f(-\xi) = -f(\xi)$ が成り立つとする. このとき $f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ も奇関数であり、また $f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ は偶関数なので $a_0 = 0, \quad , a_n = 0, \quad b_n = 2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ となる.
  $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right) = f(\xi) \quad (\ \xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
  $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(f(\xi-0)+f(\xi+0)\right) \quad (\ \xi \text{ は } f \text{ の不連続点})$$

[奇関数]

- $f(\xi)$ は前記の条件に加えて奇関数である, 即ち $f(-\xi) = -f(\xi)$ が成り立つとする. このとき $f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ も奇関数であり、また $f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ は偶関数なので
$a_0 = 0, \quad , a_n = 0, \quad b_n = 2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ となる.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right) = f(\xi) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(f(\xi-0)+f(\xi+0)\right) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の不連続点})$$
- また $f(\xi)$ が $(0, l)$ で定義された関数であるとき、これを奇関数に拡張したもの, 即ち $-l < \xi < 0$ に対し $f(\xi) := -f(-\xi)$ と定義したものを考えることにより,
$b_n = 2\int_0^l f(\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ として以下が成り立つ.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right) = f(\xi) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の連続点}),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(f(\xi-0)+f(\xi+0)\right) \quad (\xi \text{ は } f \text{ の不連続点})$$
これを $f(\xi)$ のフーリエ正弦展開とよぶ.

[練習問題]

開区間 $(0, l)$ で定義された関数 $f(\xi) = l - 2\xi$ のフーリエ正弦展開を求めよ.

[練習問題]

開区間 $(0,l)$ で定義された関数 $f(\xi)=l-2\xi$ のフーリエ正弦展開を求めよ.

[解答]

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^l (l-2\xi)\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \\
&= \frac{2\sqrt{l}}{n\pi}\left[-(l-2\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]_0^l - 2\frac{2\sqrt{l}}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \\
&= \frac{2l^{\frac{3}{2}}}{n\pi}(1+(-1)^n) - \frac{4l^{\frac{3}{2}}}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right]_0^l \\
&= \frac{2l^{\frac{3}{2}}}{n\pi}(1+(-1)^n)
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= \frac{4l^{\frac{3}{2}}}{\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi\xi}{l} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{4\pi\xi}{l} + \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{6\pi\xi}{l} + \cdots\right) \\
&= \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi\xi}{l} \qquad (0<\xi<l)
\end{aligned}$$

[注意]

前二問より

$$\frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi\xi}{l}=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi\xi}{l}\qquad(0<\xi<l)$$

が成り立つが, $\xi=0$ のときは左辺は l 右辺は 0 となり等号は成り立たない.
これは, $f(\xi)$ を偶関数に拡張したものは

$$f(\xi)=l-2|\xi|$$

であるのに対し, 奇関数に拡張したものは

$$f(\xi)=\begin{cases} l-2\xi & (0<\xi<l) \\ 0 & (\xi=0) \\ -l-2\xi & (-l<\xi<0) \end{cases}$$

であることによる.