フーリエ級数と偏微分方程式

新居俊作

2023 年 4 月 16 日

1　熱方程式

一直線に伸びた針金を熱が伝わる現象を考える。熱は放射では針金の外に逃げないと仮定する。針金の方向を x 軸に取り時刻 t における各点 x での温度を $u(t,x)$ で表す。

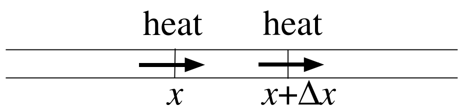

図 1.1:

熱は温度の高い方から低い方へ伝わり、伝わる熱量はそこでの温度勾配 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ に比例する (Fourier の法則)。従って、時間間隔 Δt の間に位置 x を通って x が小さい方向から x が大きい方向に伝わる熱量は次で与えられる：

$$-\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Delta t \tag{1.1}$$

ただし $\kappa(x)$ は熱伝導率とする。温度勾配が正なら、x が大きいほうが小さい方より温度が高いので、x が大きい方から x が小さい方へ熱が流れるので負号が付いている。同様に位置 $x+\Delta x$ を通って伝わる熱量は次のようになる：

$$-\kappa(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x)\Delta t \tag{1.2}$$

従って x から $x+\Delta x$ までの部分の熱量の変化は以下のようになる：

$$-\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Delta t+\kappa(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x)\Delta t \tag{1.3}$$

一方この部分の質量は針金の密度を $\rho(x)$ として $\rho(x)\Delta x$ なので、温度が $u(t,x)$ から $u(t+\Delta t,x)$ に変化した時のこの部分の熱量の変化は、比熱を $\gamma(x)$ として：

$$\rho(x)\gamma(x)\left\{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)\right\}\Delta x \tag{1.4}$$

である。

よって (1.3) と (1.4) が等しいので

$$\begin{aligned}&\rho(x)\gamma(x)\left\{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)\right\}\Delta x\\&=\left\{-\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)+\kappa(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x)\right\}\Delta t\end{aligned} \tag{1.5}$$

が成り立つ。この両辺を $\Delta x\Delta t$ で割って $\Delta x,\Delta t\to 0$ とすると：

$$\rho\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right\} \tag{1.6}$$

または

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right\} \tag{1.7}$$

となる。この偏微分方程式を一次元熱方程式と呼ぶ。

高次元で同様に考えると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\rho\gamma}\mathrm{div}\left(\kappa\cdot\mathrm{grad}\ u\right) \tag{1.8}$$

となる。

以下議論を単純にするために ρ,γ,κ が定数である場合を考える。表記を簡単にするために t や x を定数倍することにより $\dfrac{\kappa}{\rho\gamma}=1$ とする[1]。

針金の長さを有限とし、やはり表記を簡単にする為に 1 とする。

この偏微分方程式の解を特定するには、初期条件のみではなく、両端での条件である境界条件を指定する必要がある：

[1]例えば $\tau=\frac{\kappa}{\rho\gamma}t$ とすると $\dfrac{\partial}{\partial\tau}=\dfrac{\rho\gamma}{\kappa}\dfrac{\partial}{\partial t}$ なので、この変換を行って独立変数を (t,x) から (τ,x) に変えればよい。

針金の両端での温度が 0 に固定されている場合：

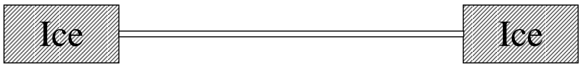

図 1.2: 両端が氷で 0 度に固定されている。

境界条件：$u(t,0) = u(t,1) = 0$

これを Dirichlet (ディリクレ) 境界条件と呼ぶ。

両端での温度勾配が 0 に固定されている場合：

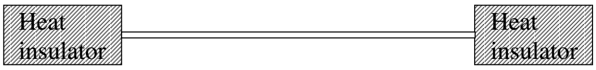

図 1.3: 両端が断熱材で熱勾配 0 に固定されている。

境界条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$

これを Neumann (ノイマン) 境界条件と呼ぶ。

この二種類の境界条件の下で次の初期値境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \\ u(0,x) = u_0(x) & u_0(x)\ \text{は最初に与えられた関数} \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 & \\ u(0,x) = u_0(x) & u_0(x)\ \text{は最初に与えられた関数} \end{cases} \tag{1.10}$$

2　波動方程式

以下の議論で導出される波動方程式は、次の運動方程式のみによっている。従って、これだけを公理として認めればあとは純粋に数学の議論である：

定義 1 (運動方程式). 質量 m の物体の時刻 t における位置を $u(t)$ とする。この物体に働く外力を F とすると、$u(t)$ は以下の微分方程式 (運動方程式) を満たす：

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = F \tag{2.1}$$

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする。更に T は充分大きく、そのため重力の効果は無視できるとする。今この弦が垂直方向に微小振動をするとする。この振動は充分小さくその結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする。更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする。長さに対応する変数を x とし、時間に対応する変数を t として弦の各時刻 t の各点 x でにおける (垂直方向の) 変位の大きさを未知関数 $u(t,x)$ によって表すことにする。

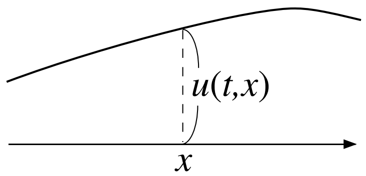

図 2.1:

x から $x+\Delta x$ の部分についてその端点での張力を $T(x), T(x+\Delta x)$ とするとき、「弦の各点は垂直方向にのみ動く」という仮定から各点で張力の水平方向の成分は一定値 T である。よって張力の働く向きと水平方向の成す角を θ とすると

$$T(x)\cos\theta(x) = T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) = T \tag{2.2}$$

となる。

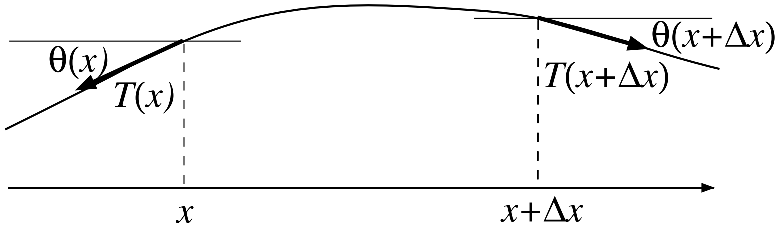

図 2.2:

次にこの部分に垂直に働く力は各端点に働く張力の垂直方向の成分なので、これは

$$-T(x)\sin\theta(x) + T(x+\Delta x)\sin\theta(x+\Delta x). \tag{2.3}$$

よってこの部分の垂直方向の運動を表す運動方程式は

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T(x)\sin\theta(x) + T(x+\Delta x)\sin\theta(x+\Delta x) \tag{2.4}$$

ここで (2.2) を用いると上式は次のように変形される：

$$\frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\tan\theta(x) + \tan\theta(x+\Delta x) \tag{2.5}$$

各点での張力はその点での弦の接線方向を向いているので

$$\tan\theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x), \quad \tan\theta(x+\Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x). \tag{2.6}$$

従って (2.5) は次のように変形される

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) \tag{2.7}$$

ここで $\Delta x \to 0$ の極限をとると (一次元) 波動方程式とよばれる偏微分方程式が得られる：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \left(c^2 = \frac{T}{\rho} > 0\right) \tag{2.8}$$

一定の張力 T で張られた密度 ρ の 2 次元の膜の微小振動に関して同様に考えると、2 次元波動方程式が得られる：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x,y) = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y)\right) \tag{2.9}$$

以下では熱方程式の場合と同様に $c^2 = \dfrac{T}{\rho} = 1$ とする。

一次元波動方程式も二種類の境界条件の下で考える：

弦の両端固定端： 弦楽器、ピアノ等

Dirichlet 境界条件：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < t < +\infty,\ 0 < x < 1 \\
u(t,0) = u(t,1) = 0 & \\
u(0,x) = u_0(x) & u_0(x) \text{ は与えられた関数} \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) & v_0(x) \text{ は与えられた関数}
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

弦の両側自由端： フルート、リコーダー、トランペット、木琴等[2]

Neumann 境界条件：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < t < +\infty,\ 0 < x < 1 \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 & \\
u(0,x) = u_0(x) & u_0(x) \text{ は与えられた関数} \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) & v_0(x) \text{ は与えられた関数}
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

3 連立常微分方程式

熱方程式や波動方程式の解は Fourier 級数という手法で求まるが、その原理を理解する為に先ずは線型の連立常微分方程式について考える。

[新居 1] の最後では次の形の連立方程式を、係数行列を対角化する事で解いた。ここでは、本質的には同じ事だが少し違った書き方をする：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\
\qquad\vdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n.n}x_n.
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

[2]弦を固定せずに空中で振動させるのは難しいので絃楽器が入っていない。

または

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

として

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}. \tag{3.2}$$

先ず、$n = 1$ の場合は変数分離形なので [新居 1] の定理 1 の方法で解ける：

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{の解は} \quad x(t) = Ce^{at}. \tag{3.3}$$

以下では熱方程式や波動方程式を考える際の手掛かりになる、A が実対称行列である場合を考える。

定義 2. $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ について $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ をユークリッド内積または標準内積と呼ぶ。

$\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ について $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ をエルミート内積と呼ぶ。

性質 1 (内積の性質)**.** $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ について

(1). $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, かつ、 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
($\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ の場合でも $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ は実数)

(2). $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ のとき)
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ のとき)

(3). $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$

(4). $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$ のとき)
$(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$ のとき)

定義 3. 実又は複素ベクトル空間 V に 写像 $(\cdot\,,\cdot)$: $V \times V \to \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ が定められていて性質 1(1)〜(4) を満たす時、$(\cdot\,,\cdot)$ は V の内積とよばれる。

定義 4. V を内積の定められたベクトル空間とするとき、 $\mathbf{x} \in V$ について

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \tag{3.4}$$

を $\mathbf{x}$ のノルムとよぶ。

定義 5. V を内積の定められたベクトル空間とする。$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ について

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{3.5}$$

であるとき $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交するという。

補題 1. A を n 次実対称行列とするとき $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ について $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ が成り立つ。

定義 6. 内積が定められたベクトル空間の基底で、ノルムが1で互いに直交するベクトルからなるものを正規直交基底とよぶ。

定理 1 (全て $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ から得られる)**.**
A を n 次実対称行列とするとき以下が成り立つ。

(1). A の固有値は実数。

(2). A の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

(3). A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が存在する。

すなわち、A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底で、互いに直交し、其々のノルムが 1 であるものが存在する。

(1)、(2) の証明は [新居 2] 参照。以下 (3) を証明する。

定理 1(3) の証明.
より一般的に以下を示す。
V は n 次元の実ベクトル空間で内積 $(\cdot\,,\cdot)$ が定められているとする。すなわち $(\cdot\,,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ は性質 1 の $\mathbb{R}^n$ に関するものを満たすとする。
更に線型写像 $f\colon V \to V$ について

$$\big(f(\mathbf{u}), \mathbf{u}'\big) = \big(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}')\big) \tag{3.6}$$

が任意の $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in V$ で成り立ち、定理の (1)、(2) も成り立っているとする[3]。
このとき、f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在する。
証明は帰納法による。
$n = 1$ のとき。

[3]定理 1(1) は (3.6) から証明できるが、実ベクトル空間の線型写像の複素固有値を定義する必要があるのでここでは省略する。(2) の証明方法は $\mathbb{R}^n$ の場合と同様

$\dim V = 1$ ならば $f(\mathbf{u}) = a\mathbf{u},\ (\mathbf{u} \in V)$ となる実数 a があり $\mathbf{v}_1 := \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ とすると $\mathbf{v}_1$ は線型写像 f の固有値 a に属する固有ベクトルである。よって $\{\mathbf{v}_1\}$ は V の正規直交基底である。

$\dim V = n-1$ まで成り立つとし、$\dim V = n$ とする。

f の固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ を一つ取り[4]、$\mathbf{v} \in V$ を λ_1 に属する固有ベクトルとする。$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ とおく。

$$< \mathbf{v}_1 >^{\perp} := \{\ \mathbf{u} \in V \mid (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) = 0\ \} \tag{3.7}$$

とすると次が成り立つ：

(1). $< \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ は V の部分ベクトル空間で $\dim < \mathbf{v}_1 >^{\perp} = n-1$

(2). $\mathbf{u} \in < \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ ならば $f(\mathbf{u}) \in < \mathbf{v}_1 >^{\perp}$

$\because$ (1) $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in < \mathbf{v}_1 >^{\perp},\ \alpha \in \mathbb{R}$ について

$$(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}', \mathbf{v}_1) = 0, \quad (\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = 0 \tag{3.8}$$

より $< \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である。

$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ を $< \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ の基底とすると、$< \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ は V の真部分空間 $(\mathbf{v}_1 \notin < \mathbf{v}_1 >^{\perp})$ なので $k \leq n-1$ である。

任意の $\mathbf{u} \in V$ について $\mathbf{u}' := \mathbf{u} - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1$ とおくと

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}', \mathbf{v}_1) &= \big(\mathbf{u} - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\big) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - \big((\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\big) \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

より $\mathbf{u}' \in < \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ なので

$$\mathbf{u}' = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{w}_k, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}) \tag{3.10}$$

と表すことができる。従って

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{w}_k \tag{3.11}$$

と表され $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ は V の基底である。従って $k = n-1$。

(2) $\mathbf{u} \in < \mathbf{v}_1 >^{\perp}$ ならば $\big(\mathbf{v}_1, f(\mathbf{u})\big) = \big(f(\mathbf{v}_1), \mathbf{u}\big) = \lambda_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) = 0$

[4]有限次元ベクトル空間の線型写像には固有値が存在することは簡単に示せるので省略する。

$f' := f|_{<\mathbf{v}_1>^\perp}\colon\ <\mathbf{v}_1>^\perp \to <\mathbf{v}_1>^\perp$ すなわち、f' は f を $<\mathbf{v}_1>^\perp$ に制限したものとする。

このとき、 f' は f の制限なので

$$\bigl(f(\mathbf{u}), \mathbf{u}'\bigr) = \bigl(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}')\bigr) \tag{3.12}$$

が任意の $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in <\mathbf{v}_1>^\perp$ で成り立つ。

$\dim <\mathbf{v}_1>^\perp = n-1$ より帰納法の仮定から、f' の固有ベクトルからなる $<\mathbf{v}_1>^\perp$ の正規直交基底がある。これと $\mathbf{v}_1$ を合わせたものは f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底である。よって $\dim V = n$ についても定理が成り立つ。 $\square$

A を n 次実対称行列とすると、上記定理より A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ が存在する。固有ベクトル $\mathbf{e}_i$ が属する固有値を λ_i とする。

問題 1. A が直交行列により対角化できることと、A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ が存在することとが必要十分条件であることを証明せよ。

補題 2. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ について $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$ とすると $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$ である。

問題 2. 上記補題を証明せよ。

さて $\mathbb{R}^n$ に値を取る関数 $\mathbf{x}(t)$ が方程式 (3.2) を満たすとする。$\mathbf{x}(t)$ を基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ で展開する：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\mathbf{e}_i \tag{3.13}$$

これを (3.2) に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt}(t)\mathbf{e}_i = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t)\mathbf{e}_i \tag{3.14}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}(t) - \lambda_i x_i(t)\right)\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ は一次独立なので、これは次を意味する：

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = \lambda_i x_i(t), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.16}$$

この解は

$$x_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t},\ (i = 1, \ldots, n) \qquad (\alpha_i\text{は定数}) \tag{3.17}$$

なので、(3.2) の解は次で与えられる：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i \tag{3.18}$$

また、初期条件は

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \tag{3.19}$$

で与えられる。この右辺は全ての初期条件を与えられるので (3.18) が (3.2) の一般解である。

正規直交基底の定義より $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$ なので[5](3.18) および (3.19) の右辺の α_i を決定するには、(3.19) の両辺と $\mathbf{e}_i$ の内積を取ればよい：

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{e}_j\ ,\ \mathbf{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\mathbf{e}_j\ ,\ \mathbf{e}_i\right) = \alpha_i \tag{3.20}$$

次に、二階の定数係数線型常微分方程式

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = A\mathbf{x} \tag{3.21}$$

を考える。

以下、話を簡単にするために、実対称行列 A の固有値が全て負である場合について考える。

この場合も (3.13) の様に置くと (3.14) の代わりに次のようになる：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 x_i}{dt^2}(t)\mathbf{e}_i = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t) = A\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t)\mathbf{e}_i \tag{3.22}$$

[5]記号 $\delta_{i,j}$ は Kronecker (クロネッカー) のデルタと呼ばれ

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義される。

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}(t)-\lambda_i x_i(t)\right)\mathbf{e}_i=\mathbf{0} \tag{3.23}$$

i.e.

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}(t)=\lambda_i x_i(t), \quad (i=1,\ldots,n) \tag{3.24}$$

従って、 [新居 1] の方程式 (3.8) の (3.24) のときの一般解が (3.33) であることより一般解は次のようになる：

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\cos\sqrt{-\lambda_i}t+\beta_i\sin\sqrt{-\lambda_i}t\right)\mathbf{e}_i \tag{3.25}$$

ただし、λ_i $(i=1,\ldots,n)$ は A の固有値で $\mathbf{e}_i$ は λ_i に属する固有ベクトルとする。

問題 3. [新居 1] の方程式 (3.8) の (3.24) のときの一般解が (3.33) であることを用いて (3.22) の解が (3.25) の形になることを示せ。

このとき α_i, β_i は次のように求まる：

$$\alpha_i=(\mathbf{x}(0),\mathbf{e}_i), \quad \beta_i=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}(0),\mathbf{e}_i\right) \tag{3.26}$$

問題 4. A の固有値が全て正の場合に解がどうなるか考えよ。すなわち、(3.21) の A の固有値が全て正の場合に上記と同じ議論をして解を求めよ (式 (3.21) から式 (3.26) にいたる全ての式について、対応する式を書け)。途中で (3.24) の解を求める部分では、[新居 1] において (3.8) の (3.11) のときの解が (3.17) になることを示したのと同じ議論をせよ。([新居 1] の式 (3.8) から (3.17) にいたる全ての式について対応する式を書け。)

A の固有値が全て 0 の場合 (つまり A はゼロ行列) の場合に解がどうなるかも考えよ。

(一般の場合はこれら三つを組み合わせたものである。)

4 Fourier 級数

$$\begin{aligned} F_D &:= \left\{ f\in C^2[0,1] \;\middle|\; f(0)=f(1)=0 \right\}, \\ F_N &:= \left\{ f\in C^2[0,1] \;\middle|\; \frac{df}{dx}(0)=\frac{df}{dx}(1)=0 \right\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

とする。 これらは関数の和とスカラー倍に関してベクトル空間である。

このベクトル空間にノルムをどの様に定義するべきか考える。

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を次のような関数と考える

$$\mathbf{x}\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{R}\colon i \mapsto x_i \tag{4.2}$$

この様に考えて数ベクトルの内積

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.3}$$

を $[0, 1]$ で定義された関数 $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ に拡張しようとすると

$$(f, g) := \sum_{x \in [0,1]} f(x) g(x) \tag{4.4}$$

と定義したくなるが、上式の右辺は非加算無限和なのでそのままでは定義できない。そこで以下の様にして関数の内積を定義する：

定義 7. $f, g \in F_D$ or F_N に対し内積 (f, g) を以下で定義する[6]：

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx \tag{4.5}$$

更に、これを用いてノルム $\|f\|$ を次で定める：

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

これらのベクトル空間に Laplacian (ラプラシアン) と呼ばれる線型写像 (微分作用素) Δ_D, Δ_N を

$$\begin{aligned} \Delta_D &\colon F_D \to C^0[0, 1]\colon f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} \\ \Delta_N &\colon F_N \to C^0[0, 1]\colon f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

で定める。このとき次は部分積分で簡単に確かめられる：

[6] この右辺の積分の定義を書いてみると (4.4) の右辺と似たものになる：

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx = \lim_{\max_i |x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum f(\xi_i) g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ただし $0 = x_0 < x_1 \cdots x_{n-1} < x_n = 1, \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ とする。

補題 3. Δ_D, Δ_N は次の意味で対称である：

$$(\Delta_D f, g) = (f, \Delta_D g), \quad (\Delta_N f, g) = (f, \Delta_N g). \tag{4.8}$$

問題 5. 上の補題を証明せよ。

従って、定理 1 の証明と全く同じ議論が適用できて、Δ_D, Δ_N の固有値は実数であり、異なる固有値に属する固有ベクトル (固有関数とよぶ) は直交し、固有関数からなる正規直交系が作れる。

また、Δ_D, Δ_N の一般固有空間は固有空間である。このことはジョルダンブロックを考える必要はないことを意味する。F_D は無限次元なので、この証明に定理 1 のような帰納法は使えなが、固有空間が有限次元の場合は以下のように証明できる。

固有値 λ について固有空間を $\sigma_0 := \{\, f \in F_D \mid (\Delta_D - \lambda) f = 0\}$ として、$\sigma_n := \left\{ f \in F_D \mid (\Delta_D - \lambda)^n f \in \sigma_0 \right\}, (n \in \mathbb{N})$ とおくと、σ_n は F_D の $(n+1) \dim \sigma_0$ 次元以下の部分空間で、その上で Δ_D は対称なので定理 1 より固有関数からなる σ の基底が取れる。つまり $\sigma_n = \sigma_0$ である。

しかし、固有関数からなる基底が取れるかどうかには無限和の収束性と収束先の議論が必要で線形代数のみからは分からない。

以上は Δ_N についても同様である。

Δ_D の固有関数

以下 $\Delta_D f = \lambda f$ となる $f \in F_D$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ の組で $f \not\equiv 0$ であるものを探す[7]。すなわち、微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f \tag{4.9}$$

の解で $f \in F_D$ かつ $f \not\equiv 0$ であるものを探す。

先ず、F_D に入るかどうか無視すると (4.9) の解は次の様になる：

$$f(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} & (\lambda > 0) \\ C_1 x + C_2 & (\lambda = 0) \\ C_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda} x & (\lambda < 0) \end{cases} \tag{4.10}$$

[7] これは実は「集合・写像」を学んでいると奇妙な式である。左辺は $C^0[0,1]$ に属するのに対し右辺はそれとは異なる集合 F_D に属するので、この等号は「どこの世界での等号か分からない」。本来ならば、固有値、固有ベクトルは同じベクトル空間の間の線型写像 $L\colon V \to V$ に対して $L\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ (V における等号) として考えられる概念であるが、ここでは煩雑さを避ける為にあえて不正確な書き方をしている。

但し、C_1, C_2 は任意の定数である。これが F_D に入る条件は

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{4.11}$$

である。

$\lambda \geq 0$ の場合に (4.11) を満たすとすると $C_1 = C_2 = 0$ となり、$f \equiv 0$ となって不適である[8]。

$\lambda < 0$ の場合は、$f(0) = 0$ より $f(x) = C_2 \sin \sqrt{-\lambda} x$ となり、これが $f(1) = 0$ を満たすのは $\sqrt{-\lambda} = n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ のときである。

定理 2. Δ_D の固有値は $\lambda_n = -n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$ であり、それに対応する固有関数は $f_n(x) = C \sin n\pi x$ である。特に $f_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$ と取ると、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正規直交系になる。

問題 6. 上の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交系になることを示せ。

もしこの $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて F_D の任意の関数が

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \tag{4.12}$$

と表されるのであれば、(3.20) と同様に、この両辺と f_k の内積を取って

$$(f, f_k) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, f_k \right) \stackrel{9}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (f_n, f_k) = \alpha_k (f_k, f_k) = \alpha_k \tag{4.13}$$

となるが、実際これは正しい。

以下の証明は [壁谷] [矢崎] 等参照：

定理 3. $f \in F_D$ とすると $\alpha_n = (f, f_n)$ として以下の様に表せられる：

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n. \tag{4.14}$$

すなわち次が成り立つ：

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n \right\| \to 0 \ (N \to \infty). \tag{4.15}$$

---

[8] 固有ベクトルがゼロベクトルではないのと同様に (4.9) を満たすゼロ関数ではないものが固有関数である。

[9] 無限和と内積の交換はシュワルツの不等式を用いて正当化される。

これを f の Fourier (フーリエ) 級数展開と呼ぶ。
更に次が成り立つ (Parseval (パーセバル) の等式)：

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \tag{4.16}$$

注意 1. 実は上の定理は更に一般的な (従って必ずしも F_D に属さない) 関数に対しても成り立つ。

D_N に関しても同様に以下が成り立つ：

定理 4. Δ_N の固有値、固有関数は

$$\lambda_0 = 0, f_0(x) \equiv C_0, \lambda_n = -n^2\pi^2, f_n(x) = C_n \cos n\pi x \ (n \in \mathbb{N}) \tag{4.17}$$

であり、特に $C_0 = 1, C_n = \sqrt{2}\ (n = 1, 2, \ldots)$ とすると $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正規直交系になる。
$f \in F_N$ について ($n = 0, 1, \ldots$ として) やはり (4.14) 、(4.16) が成り立つ。

問題 7. 上の定理 4 の (4.14)、(4.16) 以外を証明せよ。

5 熱方程式、波動方程式の解

Dirichlet 境界条件下の熱方程式を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

先ず

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} c_n(t) \sin n\pi x \tag{5.2}$$

が解であるとする。但し、t を固定するごとに x の関数として $u(t,x) \in F_D$ とする。これを (微分と無限和が交換できると仮定して[10]) 方程式に代入すると：

[10] この仮定は、当然 (形式的な) 解が求まった後で満たされていることを証明しなければならないが、本稿ではそこは省略する。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dc_n}{dt}(t)\sqrt{2}\sin n\pi x &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dc_n}{dt}(t)f_n(x)\\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \Delta_D u(t,x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\Delta_D f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\lambda_n f_n(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -c_n(t)n^2\pi^2\sqrt{2}\sin n\pi x\end{aligned} \tag{5.3}$$

つまり

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{dc_n}{dt} - \lambda_n c_n\right) f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{dc_n}{dt} + n^2\pi^2 c_n\right)\sqrt{2}\sin n\pi x = 0 \quad \text{in } F_D. \tag{5.4}$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{2}\sin n\pi x\}_{n\in\mathbb{N}}$ は F_D で一次独立なので、

$$\frac{dc_n}{dt} - \lambda_n c_n = \frac{dc_n}{dt} + n^2\pi^2 c_n = 0, \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{5.5}$$

これを解くと

$$c_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}\alpha_n \quad (n\in\mathbb{N},\ \alpha_n \text{は定数}) \tag{5.6}$$

なので解は

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}\alpha_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}e^{-n^2\pi^2 t}\alpha_n \sin n\pi x \tag{5.7}$$

となる。

初期値が

$$u(0,x) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\alpha_n\sin n\pi x \tag{5.8}$$

ならば $\alpha_n = (u_0, f_n)$ なので、結局解は

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}(u_0,f_n)f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}e^{-n^2\pi^2 t}(u_0,f_n)\sin n\pi x \tag{5.9}$$

となる。これは下掲の図の重ね合わせである。

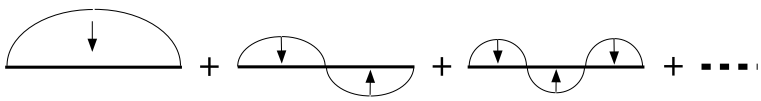

図 5.1:

注意 2.

$$\|u(t,x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, f_n)^2 e^{-n^2\pi^2 t} \to 0 \ (t \to +\infty) \tag{5.10}$$

つまり

$$u(t,x) \to 0 \ (t \to +\infty) \tag{5.11}$$

である。

Neumann 境界条件でも同様に考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \ 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{5.12}$$

の解は

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}(u_0, f_n) f_n(x) = (u_0, f_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} e^{-n^2\pi^2 t}(u_0, f_n) \cos n\pi x \tag{5.13}$$

となる。

注意 3. Neumann 境界条件の場合は (5.11) は以下の様になる：

$$u(t,x) \to (u_0, f_0) = \int_0^1 u_0(x)dx \quad (t \to +\infty) \tag{5.14}$$

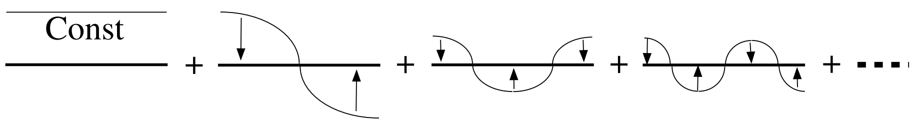

図 5.2:

問題 8. Neumann 境界条件での熱方程式 (5.12) の解が (5.13) の形になることを証明せよ。(式 (5.1) から式 (5.9) までの全ての式について、対応する式を書け。ただし、境界条件が異なるので (5.2) を解とすることは出来ない。代わりに適切な解の形を仮定せよ。)

次に波動方程式を考える。

波動方程式を Dirichlet 境界条件下で考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < t < +\infty,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \\ u(0,x) = u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x). & \end{cases} \tag{5.15}$$

この場合も解を (5.2) の形で表示し方程式に代入して同様に議論すると次の方程式が得られる：

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + n^2\pi^2 c_n = 0, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5.16}$$

(3.24) の $\lambda_i < 0$ のときの解と同様に、この方程式の解は：

$$c_n(t) = \alpha_n \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}\beta_n \sin n\pi t, \quad (n \in \mathbb{N},\ \alpha_n, \beta_n \text{は定数}) \tag{5.17}$$

となるので (5.15) の解は

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}\beta_n \sin n\pi t \right) f_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\alpha_n \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}\beta_n \sin n\pi t \right) \sin n\pi x \end{aligned} \tag{5.18}$$

で与えられる。

初期値が

$$\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\alpha_n \sin n\pi x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\beta_n \sin n\pi x \end{aligned} \tag{5.19}$$

ならば、$\alpha_n = (u_0, f_n)$, $\beta_n = (v_0, f_n)$ なので、結局解は

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((u_0, f_n) \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}(v_0, f_n) \sin n\pi t \right) f_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \left((u_0, f_n) \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}(v_0, f_n) \sin n\pi t \right) \sin n\pi x
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

となる。

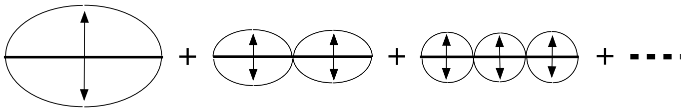

図 5.3:

Neumann 境界条件でも同様に考える：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < t < +\infty,\ 0 < x < 1 \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 & \\
u(0,x) = u_0(x) & \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) &
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

の解は

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= (u_0, f_0) + (v_0, f_0)t + \sum_{n=1}^{\infty} \left((u_0, f_n) \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}(v_0, f_n) \sin n\pi t \right) f_n(x) \\
&= (u_0, f_0) + (v_0, f_0)t + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \left((u_0, f_n) \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi}(v_0, f_n) \sin n\pi t \right) \cos n\pi x
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

となる。

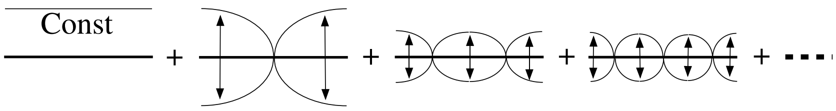

図 5.4:

問題 9. Neumann 境界条件での波動方程式 (5.21) の解が (5.22) となることを証明せよ。(式 (5.15) から式 (5.20) の全てに対応する式を書け。但し、境界条件が異なるので (5.2) を解とすることは出来ない。代わりに適切な解の形を仮定せよ。)

問題 10. 波動方程式を以下の境界条件で考えた場合について同様の考察をせよ。また、この境界条件を満たす例をあげよ。

弦の片側固定端片側自由端：

混合境界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < t < +\infty,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \end{cases} \tag{5.23}$$

[ヒント]

$$F_M := \left\{ f \in C^2[0,1] \;\middle|\; f(0) = \frac{df}{dx}(1) = 0 \right\} \tag{5.24}$$

とし、内積とノルムは F_D, F_N と同様に定義する。更に

$$\Delta_M\colon F_M \to C^0[0,1]\colon f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} \tag{5.25}$$

として、以下の手順で解を求める。

(1). Δ_M が対称であることを示す。

(2). Δ_M の固有値と固有関数を求める。

(3). 固有関数の係数を適切に定めて Δ_M の固有関数の正規直交系を作る。

(4). (5.23) の解が Δ_M の固有関数の無限一次結合で表せると仮定して (この仮定はここでは無条件に成り立つことにする) 方程式に代入し、係数が満たすべき常微分方程式を求める。

(5). 上で求めた方程式の一般解を求め、(5.23) の一般解を求める。

(6). 初期条件を用いて、その初期条件を満たす特殊解を求める。

参考 1

音楽で一般的に使われる 12 音音階は実は波動方程式の解が (5.20) の形に書かれることに基づいている。(通常そういう言い方はしないが。) その理屈については [小方] が参考になる。その他、音楽で使われる楽器 (そのほとんどが一次元波動方程式に従う) 全般については [岩宮] が音源が付いていて分かりやす。どちらも、音楽に関心がある、又は、高校教員志望で将来生徒に話す数学の応用の話題を探している人にはお勧め。

参考 2

$[0,1]$ で定義された C^1 級関数 $p = p(x)$ で全ての x で $p(x) \neq 0$ であるものと連続関数 $r = r(x)$ を用いて

$$Lf := \frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + rf, \quad f \in F_D \text{ 又は } F_N \tag{5.26}$$

とすると、本講での議論は、この二階微微分作用素 L についても同様に行える。

すなわち、この L についても $(Lf, g) = (f, Lg)$ が成り立つので、L の固有値、固有関数は Δ の固有値、固有関数と同様の性質をもつ。

詳しくは [藤田] 等参照

これより熱方程式 (1.7) で熱伝導率 $\kappa(x)$ が定数ではない場合についても同様のことが分かる。

参考文献

[新居 1] 新居俊作 著
「微分方程式超入門」
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/Diff-Eqn.pdf

[新居 2] 新居俊作 著
「実対称行列の直交行列による対角化」
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/Matrix.pdf

[壁谷] 壁谷吉継 著
「フーリエ解析と偏微分方程式」
共立出版 (2010 年)

[矢崎] 矢崎成俊 著
「弱点克服 大学生のフーリエ解析」
東京図書 (2011 年)

[小方] 小方厚 著
「音律と音階の科学」
講談社 Blue Backs(2007 年)

[岩宮] 岩宮眞一郎 著
「図解雑学 CD でわかる 音楽の科学」
ナツメ社 (2009 年)

[藤田] 藤田宏、吉田耕作 著
「現代解析入門」
岩波書店 (1991 年)