

Clothoid 曲線

新居俊作

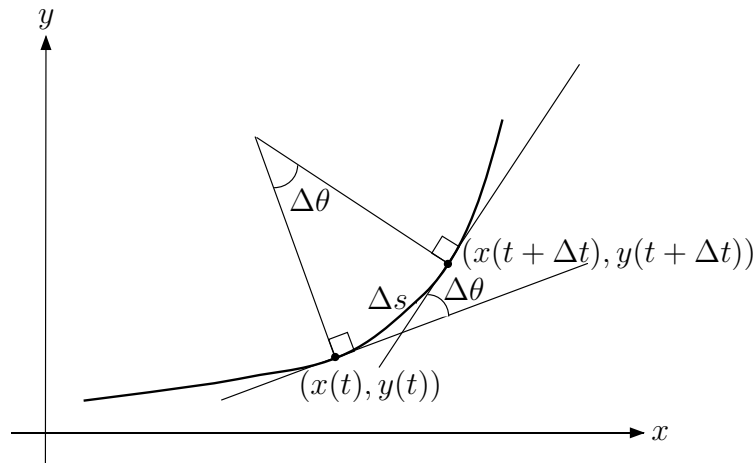
2023 年 4 月 17 日

注意

本稿を読む前に必ず [くるくら動画] を見て [くるくら記事] を読んで下さい。Clothoid 曲線の利用価値が分かります。

1 平面曲線の曲率

座標平面上の滑らかな曲線 $(x(t), y(t))$ を考える。この曲線上をパラメタ t の増える向きに長さ Δs だけ移動した時に、 $(x(t), y(t))$ における接線の向きが角度 $\Delta\theta$ だけ変わったとする。この時、 $(x(t), y(t))$ における法線の向きも $\Delta\theta$ だけ変化する。



定義 1.

この曲線の点 $(x(t), y(t))$ における曲率 κ を次で定義する：

$$\kappa := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad (1.1)$$

曲線が円周の場合は、半径を R とすると $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$ なので、 $\kappa = \frac{1}{R}$ となる。つまり、曲率は曲線を円で近似した時の半径の逆数である。

以下全ての t で $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ であるとする。

この曲線の接ベクトルは $(x'(t), y'(t))$ であり、これが x 軸の正の向きとなす角度を θ とすると、 $x'(t) \neq 0$ のときは

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (1.2)$$

である。

曲線の長さは $s = \int_0^t \sqrt{\{x'(\tau)\}^2 + \{y'(\tau)\}^2} d\tau$ であることから

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\tan^{-1} \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) / \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

特に t を弧長 s に取るときは $\sqrt{\{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2} = 1$ なので

$$\kappa = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \quad (1.4)$$

となる。

$x'(t) = 0$ のときは $y'(t) \neq 0$ より

$$\theta = \cot^{-1} \frac{x'(t)}{y'(t)} \quad (1.5)$$

から同じ式が得られる。

特に曲線が関数 $y = f(x)$ のグラフとして与えられているときは、 t の代わりに x をパラメタとすると $x' = 1, y' = f'(x)$ なので

$$\kappa = \frac{f''(x)}{[1 + \{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.6)$$

であり、グラフが $x = 0$ で x 軸に接している ($f'(0) = 0$) ときには

$$\kappa(0) = f''(0) \quad (1.7)$$

となる。

2 Clothoid 曲線

曲率が曲線の始点からの長さ (弧長とよぶ) に比例する曲線、すなわち

$$\kappa = Cs, \quad C \text{ は定数} \quad (2.1)$$

を満たす曲線を Clothoid 曲線とよぶ。 $C = 1$ の場合を考えると、 $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ なのでこれは以下を解けばよい：

$$\frac{d\theta}{ds} = s \quad (2.2)$$

従って

$$\theta = \frac{s^2}{2} + C \quad (2.3)$$

始点で $\kappa = 0$ (つまり曲がっていない) とすると

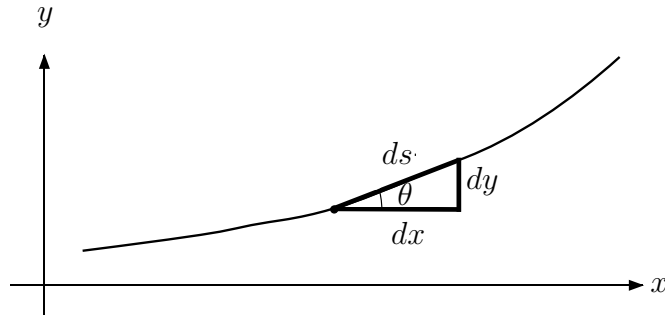
$$\theta = \frac{s^2}{2} \quad (2.4)$$

これが Clothoid 曲線の式である。

以下これを x - y 座標で表現する。 θ を x 軸となす角として測り、始点では曲線の接線が x 軸に平行であるとするように曲線を配置すると、 $s = 0$ で $\theta = 0$ なので (2.4) の場合となる。このとき

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \theta \\ \frac{dy}{ds} = \sin \theta \end{cases} \quad (2.5)$$

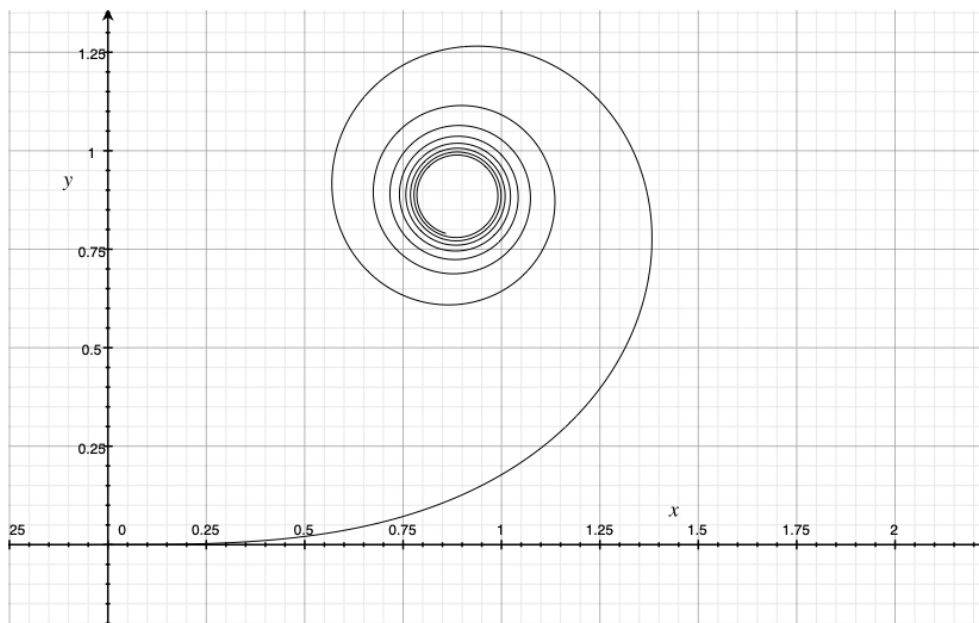
が成り立つ。



従って特に始点を原点にとる、すなわち $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ とすると：

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos \frac{\sigma^2}{2} d\sigma \\ y(s) = \int_0^s \sin \frac{\sigma^2}{2} d\sigma \end{cases} \quad (2.6)$$

となる。



問題 1.

(2.6) で与えられる曲線が実際に $\kappa = s$ を満たすことを (1.3) を用いて確かめよ。

参考文献

[くるくら動画] くるくら「なんちゃってエジソン」動画
https://www.youtube.com/watch?v=_i20bB1FGa8

[くるくら記事] くるくら「なんちゃってエジソン」記事
<https://kurukura.jp/edison/post-9.html>