

原始関数を求める手法 II

原始関数を求める手法 II

【置換積分】 $f(x)$ において $x = \varphi(t)$ と変数変換すると、

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$$

原始関数を求める手法 II

【置換積分】 $f(x)$ において $x = \varphi(t)$ と変数変換すると、

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$$

つまり、形式的に $dx = \varphi'(t)dt$ と置き換えられる。

原始関数を求める手法 II

【置換積分】 $f(x)$ において $x = \varphi(t)$ と変数変換すると、

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$$

つまり、形式的に $dx = \varphi'(t)dt$ と置き換えられる。

【例】

- $f(x)$ が $\sqrt{a^2 - x^2}$ を含むときは
 $x = a \sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と置く
- $f(x)$ が $\sqrt{x^2 + a^2}$ を含むときは
 $x = a \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ と置く

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

[解答]

$x = a \sin t$ と置く と $dx = a \cos t dt$ なので

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

[解答]

$x = a \sin t$ と置く と $dx = a \cos t dt$ なので

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) + C$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

[解答]

$x = a \sin t$ と置く と $dx = a \cos t dt$ なので

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} (\sin t \cos t + t) + C$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

[解答]

$x = a \sin t$ と置く と $dx = a \cos t dt$ なので

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} (\sin t \cos t + t) + C = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \end{aligned}$$

原始関数を求める手法 II

[例] 続き

- $f(x)$ が $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) を含むときは
 $\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c} = t$ と置く

原始関数を求める手法 II

[例] 続き

- $f(x)$ が $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) を含むときは
 $\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c} = t$ と置く

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

(i) $\int \sqrt{x^2 + A} \, dx \quad (A \neq 0)$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} \, dx \quad (A \neq 0)$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

$$(i) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

(i) $\int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{A^2}{t^2} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

$$(i) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{A^2}{t^2} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{8} \left(t - \frac{A}{t} \right) \left(t + \frac{A}{t} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

$$(i) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{A^2}{t^2} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{8} \left(t - \frac{A}{t} \right) \left(t + \frac{A}{t} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| \right) + C$$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

$$(i) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{A^2}{t^2} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{8} \left(t - \frac{A}{t} \right) \left(t + \frac{A}{t} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log |x + \sqrt{x^2 + A}| \right) + C$$

$$(ii) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \int \frac{2t}{t^2 + A} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

$$(i) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{A^2}{t^2} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{8} \left(t - \frac{A}{t} \right) \left(t + \frac{A}{t} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log |x + \sqrt{x^2 + A}| \right) + C$$

$$(ii) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \int \frac{2t}{t^2 + A} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \log |t| + C$$

原始関数を求める手法 II

[解答] $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおくと $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ なので $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$

$$(i) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \int \frac{t^2 + A}{2t} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{A^2}{t^2} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{8} \left(t - \frac{A}{t} \right) \left(t + \frac{A}{t} \right) + \frac{A}{2} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log |x + \sqrt{x^2 + A}| \right) + C$$

$$(ii) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \int \frac{2t}{t^2 + A} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \log |t| + C$$

$$= \log |x + \sqrt{x^2 + A}| + C$$

原始関数を求める手法 II

原始関数を求める手法 II

以下では、 $R(u)$ (or $R(u, v)$ or $R(u, v, w)$) を u (or u, v or u, v, w) の有理式 $\left(\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}} \right)$ とする。

原始関数を求める手法 II

以下では、 $R(u)$ (or $R(u, v)$ or $R(u, v, w)$) を u (or u, v or u, v, w) の有理式 $\left(\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}\right)$ とする。

- $\int R(\sin x, \cos x, \tan x) dx$ は $\tan \frac{x}{2} = t$ と置く

原始関数を求める手法 II

以下では、 $R(u)$ (or $R(u, v)$ or $R(u, v, w)$) を u (or u, v or u, v, w) の有理式 $\left(\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}\right)$ とする。

- $\int R(\sin x, \cos x, \tan x) dx$ は $\tan \frac{x}{2} = t$ と置く

このとき、

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

となり、

原始関数を求める手法 II

以下では、 $R(u)$ (or $R(u, v)$ or $R(u, v, w)$) を u (or u, v or u, v, w) の有理式 $\left(\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}\right)$ とする。

- $\int R(\sin x, \cos x, \tan x) dx$ は $\tan \frac{x}{2} = t$ と置く

このとき、

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

となり、 $\int R(\sin x, \cos x, \tan x) dx$ は t の有理関数の積分になる。

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

[解答]

$\tan \frac{x}{2} = t$ と置くと

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

[解答]

$\tan \frac{x}{2} = t$ と置くと

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{1+t^2} dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

[解答]

$\tan \frac{x}{2} = t$ と置くと

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \log(1+t^2) + C \end{aligned}$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

[解答]

$\tan \frac{x}{2} = t$ と置くと

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \log(1+t^2) + C = \log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

原始関数を求める手法 II

前例の特別な場合：

- $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan^2 x) dx$ は $\tan x = t$ と置く

原始関数を求める手法 II

前例の特別な場合：

- $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan^2 x) dx$ は $\tan x = t$ と置く

このとき、

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \tan x = t, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

となるので、

原始関数を求める手法 II

前例の特別な場合：

- $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan^2 x) dx$ は $\tan x = t$ と置く

このとき、

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \tan x = t, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

となるので、 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan^2 x) dx$ は t の有理関数の積分になる。

原始関数を求める手法 II

- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は $\sqrt[n]{ax+b} = t$ と置く

原始関数を求める手法 II

- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は $\sqrt[n]{ax+b} = t$ と置く

このとき、 $ax + b = t^n$ より

$$x = \frac{t^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

となるので、

原始関数を求める手法 II

- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は $\sqrt[n]{ax+b} = t$ と置く

このとき、 $ax+b = t^n$ より

$$x = \frac{t^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

となるので、 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は t の有理関数の積分になる。

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

[解答]

$\sqrt{x+1} = t$ と置くと $x = t^2 - 1$ 、 $dx = 2t dt$ なので

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

[解答]

$\sqrt{x+1} = t$ と置く と $x = t^2 - 1$ 、 $dx = 2t dt$ なので

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

[解答]

$\sqrt{x+1} = t$ と置く と $x = t^2 - 1$ 、 $dx = 2t dt$ なので

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = \int \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

[解答]

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = t \quad &\text{と置く} \quad \text{と} \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt \quad \text{なので} \\ \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = \int \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2t + \log |t-1| - \log |t+1| + C \end{aligned}$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

[解答]

$\sqrt{x+1} = t$ と置く と $x = t^2 - 1$ 、 $dx = 2t dt$ なので

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = \int \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2t + \log |t-1| - \log |t+1| + C = 2t + \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \end{aligned}$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

[解答]

$\sqrt{x+1} = t$ と置く と $x = t^2 - 1$ 、 $dx = 2t dt$ なので

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = \int \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= 2t + \log |t-1| - \log |t+1| + C = 2t + \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} + \log \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right| + C$$

原始関数を求める手法 II

- $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は m と n の最小公倍数を k として $\sqrt[k]{ax+b} = t$ と置く

原始関数を求める手法 II

- $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は m と n の最小公倍数を k として $\sqrt[k]{ax+b} = t$ と置く

このとき、 $ax+b = t^k$ より

$$x = \frac{t^k - b}{a}, \quad \sqrt[m]{ax+b} = t^{\frac{k}{m}}, \quad \sqrt[n]{ax+b} = t^{\frac{k}{n}}, \quad dx = \frac{k}{a} t^{k-1} dt$$

となるので、

原始関数を求める手法 II

- $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は m と n の最小公倍数を k として $\sqrt[k]{ax+b} = t$ と置く

このとき、 $ax+b = t^k$ より

$$x = \frac{t^k - b}{a}, \quad \sqrt[m]{ax+b} = t^{\frac{k}{m}}, \quad \sqrt[n]{ax+b} = t^{\frac{k}{n}}, \quad dx = \frac{k}{a} t^{k-1} dt$$

となるので、 $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は t の有理関数の積分になる。

原始関数を求める手法 II

- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ は $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ と置く

原始関数を求める手法 II

- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ は $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ と置く

このとき、 $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ より

$$x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a}, \quad dx = \frac{n(ad - bc)}{(ct^n - a)^2} t^{n-1} dt$$

となるので、

原始関数を求める手法 II

- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ は $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ と置く

このとき、 $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ より

$$x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a}, \quad dx = \frac{n(ad - bc)}{(ct^n - a)^2} t^{n-1} dt$$

となるので、 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ は t の有理関数の積分になる。

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

[解答]

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t \quad \text{と置く} \quad \text{と} \quad x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt \quad \text{なので}$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

[解答]

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t \quad \text{と置く} \quad \text{と} \quad x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt \quad \text{なので}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

[解答]

$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$ と置く と $x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$ 、 $dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt$ なので

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = -\int 4 \left(\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{(t^2 - 1)^2} \right) dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

[解答]

$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$ と置く と $x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$ 、 $dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt$ なので

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = -\int 4 \left(\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{(t^2 - 1)^2} \right) dt$$

$$= -\int 2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) + \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

[解答]

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t \quad \text{と置く} \quad \text{と} \quad x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt \quad \text{なので}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = -\int 4 \left(\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{(t^2 - 1)^2} \right) dt$$

$$= -\int 2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) + \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$= \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{2t}{t^2 - 1} + C$$

原始関数を求める手法 II

[練習問題] 次の積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

[解答]

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t \quad \text{と置く} \quad \text{と} \quad x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt \quad \text{なので}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = -\int 4 \left(\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{(t^2 - 1)^2} \right) dt$$

$$= -\int 2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) + \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$= \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{2t}{t^2 - 1} + C = \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + \sqrt{x^2 - 1} + C$$

宿題

問題集

セクション 40(79 ページ)～41(82 ページ)、47(93 ページ)～
49(98 ページ)