

原始関数

原始関数

[定義] 実数 x の関数 $f(x)$ に対し $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ。

$f(x)$ の原始関数を一般に $\int f(x)dx$ と書く。

原始関数

[定義] 実数 x の関数 $f(x)$ に対し $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ。

$f(x)$ の原始関数を一般に $\int f(x)dx$ と書く。

[注意] $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとするとき、定数 C について $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数なので

原始関数

[定義] 実数 x の関数 $f(x)$ に対し $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ。

$f(x)$ の原始関数を一般に $\int f(x)dx$ と書く。

[注意] $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとするとき、定数 C について $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数なので

$\int f(x)dx$ を具体的な関数を用いて表示するときは、

$\int f(x)dx = F(x) + C$ と任意の定数を加えた形で表示する。
(この C を積分定数と呼ぶ。)

原始関数

[定義] 実数 x の関数 $f(x)$ に対し $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ。

$f(x)$ の原始関数を一般に $\int f(x)dx$ と書く。

[注意] $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとするとき、定数 C について $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数なので

$\int f(x)dx$ を具体的な関数を用いて表示するときは、

$\int f(x)dx = F(x) + C$ と任意の定数を加えた形で表示する。

(この C を積分定数と呼ぶ。)

[例] $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

[基本公式]

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

原始関数を求める手法

[基本公式]

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

原始関数を求める手法

[基本公式]

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$

原始関数を求める手法

[基本公式]

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

- $\int e^x dx = e^x + C$

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

原始関数を求める手法

[基本公式]

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

- $\int e^x dx = e^x + C$

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

- $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1} x + C$

原始関数を求める手法

[基本公式]

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

- $\int e^x dx = e^x + C$

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

- $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1} x + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C \quad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + C$

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

[原始関数の性質]

- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx \quad (\alpha \text{ は定数})$

原始関数を求める手法

[原始関数の性質]

- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$ (α は定数)
- $\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

原始関数を求める手法

[原始関数の性質]

- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$ (α は定数)
- $\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$
(但し $F(y)$ は $f(y)$ の原始関数)

原始関数を求める手法

[原始関数の性質]

- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$ (α は定数)
- $\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$
(但し $F(y)$ は $f(y)$ の原始関数)

[練習問題] 上の公式を証明せよ。

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

- $(ax + b)' = a$ より $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数として

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)(ax + b)'dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \text{等}$$

原始関数を求める手法

- $(ax + b)' = a$ より $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数として

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)(ax + b)'dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \text{等}$$

- $(\cos x)' = -\sin x$ より $\int f(\cos x) \sin x dx = -F(\cos x) + C$

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x| + C \quad \text{等}$$

原始関数を求める手法

- $(ax + b)' = a$ より $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数として

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)(ax + b)'dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \text{等}$$

- $(\cos x)' = -\sin x$ より $\int f(\cos x) \sin x dx = -F(\cos x) + C$

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x| + C \quad \text{等}$$

- $\left(\frac{x}{a} + b\right)' = \frac{1}{a}$ より

$$\int f\left(\frac{x}{a} + b\right) dx = a \int f\left(\frac{x}{a} + b\right) \left(\frac{x}{a} + b\right)' dx = a F\left(\frac{x}{a} + b\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad \text{等}$$

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

[練習問題] 次の原始関数を求めよ。

(i) $\int \sin(ax + b)dx \quad (a \neq 0)$

(ii) $\int a^x dx \quad (a > 0)$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0)$

(iv) $\int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$

(v) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$

原始関数を求める手法

[解答]

$$(i) -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

原始関数を求める手法

[解答]

$$(i) -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$(ii) \frac{a^x}{\log a} + C$$

原始関数を求める手法

[解答]

$$(i) -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$(ii) \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$(iii) \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

原始関数を求める手法

[解答]

$$(i) -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$(ii) \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$(iii) \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$(iv) F(\tan x) + C \quad \text{但し } F'(x) = f(x)$$

原始関数を求める手法

[解答]

$$(i) -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$(ii) \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$(iii) \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$(iv) F(\tan x) + C \quad \text{但し } F'(x) = f(x)$$

$$(v) \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0)$$

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

[部分積分]

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

原始関数を求める手法

[部分積分]

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

∵ 積の微分公式より $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
なので、この両辺を積分して公式が得られる。

原始関数を求める手法

[部分積分]

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

∵ 積の微分公式より $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
なので、この両辺を積分して公式が得られる。

[例]

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx$$

原始関数を求める手法

[部分積分]

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

∵ 積の微分公式より $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
なので、この両辺を積分して公式が得られる。

[例]

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (x)' \log x dx \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C\end{aligned}$$

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

[練習問題] $n \geq 2$ に対し、次の等式を示せ。($A > 0$ とする。)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} = \frac{1}{A} \left(\frac{x}{(2n-2)(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)$$

原始関数を求める手法

[練習問題] $n \geq 2$ に対し、次の等式を示せ。($A > 0$ とする。)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} = \frac{1}{A} \left(\frac{x}{(2n-2)(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)$$

[解答]

$$A \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} = \int \frac{(x^2 + A) - x^2}{(x^2 + A)^n} dx$$

原始関数を求める手法

[練習問題] $n \geq 2$ に対し、次の等式を示せ。 $(A > 0 \text{ とする。})$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} = \frac{1}{A} \left(\frac{x}{(2n-2)(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)$$

[解答]

$$\begin{aligned} A \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} &= \int \frac{(x^2 + A) - x^2}{(x^2 + A)^n} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} - \int \left(\frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)' \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

原始関数を求める手法

[練習問題] $n \geq 2$ に対し、次の等式を示せ。($A > 0$ とする。)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} = \frac{1}{A} \left(\frac{x}{(2n-2)(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)$$

[解答]

$$\begin{aligned} A \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} &= \int \frac{(x^2 + A) - x^2}{(x^2 + A)^n} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} - \int \left(\frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)' \frac{x}{2} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} - \frac{x}{2(-n+1)(x^2 + A)^{n-1}} + \int \frac{dx}{2(-n+1)(x^2 + A)^{n-1}} \end{aligned}$$

原始関数を求める手法

[練習問題] $n \geq 2$ に対し、次の等式を示せ。($A > 0$ とする。)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} = \frac{1}{A} \left(\frac{x}{(2n-2)(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)$$

[解答]

$$\begin{aligned} A \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} &= \int \frac{(x^2 + A) - x^2}{(x^2 + A)^n} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} - \int \left(\frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x^2 + A)^{n-1}} \right)' \frac{x}{2} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} - \frac{x}{2(-n+1)(x^2 + A)^{n-1}} + \int \frac{dx}{2(-n+1)(x^2 + A)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{(2n-2)(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} \end{aligned}$$

原始関数を求める手法

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

この形の関数は部分分数に分けることによって、

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

この形の関数は部分分数に分けることによって、

1. 多項式

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

この形の関数は部分分数に分けることによって、

1. 多項式

2. $\frac{1}{(x-a)^n}$

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

この形の関数は部分分数に分けることによって、

1. 多項式

2. $\frac{1}{(x-a)^n}$

3. $\frac{(x-a)}{\{(x-a)^2+b\}^n} \quad (b > 0)$

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

この形の関数は部分分数に分けることによって、

1. 多項式

2. $\frac{1}{(x-a)^n}$

3. $\frac{(x-a)}{\{(x-a)^2+b\}^n} \quad (b > 0)$

4. $\frac{1}{\{(x-a)^2+b\}^n} \quad (b > 0)$

原始関数を求める手法

[有理関数の原始関数]

$\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形の関数を有理関数とよぶ。

この形の関数は部分分数に分けることによって、

1. 多項式

2. $\frac{1}{(x-a)^n}$

3. $\frac{(x-a)}{\{(x-a)^2+b\}^n} \quad (b > 0)$

4. $\frac{1}{\{(x-a)^2+b\}^n} \quad (b > 0)$

の形の関数の和で表すことが出来る。

原始関数を求める手法

よってその原始関数は、

原始関数を求める手法

よってその原始関数は、

1. 多項式

原始関数を求める手法

よってその原始関数は、

1. 多項式

2. $\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と $\log|x-a|$

原始関数を求める手法

よってその原始関数は、

1. 多項式

2. $\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と $\log|x-a|$

3. $\frac{1}{2(-n+1)} \cdot \frac{1}{\{(x-a)^2+b\}^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と
 $\frac{1}{2} \log |(x-a)^2+b|$

原始関数を求める手法

よってその原始関数は、

1. 多項式

2. $\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と $\log|x-a|$

3. $\frac{1}{2(-n+1)} \cdot \frac{1}{\{(x-a)^2+b\}^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と
 $\frac{1}{2} \log|(x-a)^2+b|$

4. 有理関数と $\int \frac{1}{(x-a)^2+b} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \frac{x-a}{\sqrt{b}}$

原始関数を求める手法

よってその原始関数は、

1. 多項式

2. $\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と $\log|x-a|$

3. $\frac{1}{2(-n+1)} \cdot \frac{1}{\{(x-a)^2+b\}^{n-1}} \ (n \geq 2)$ と
 $\frac{1}{2} \log|(x-a)^2+b|$

4. 有理関数と $\int \frac{1}{(x-a)^2+b} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \frac{x-a}{\sqrt{b}}$

の形の関数の和で表すことが出来る。

宿題

問題集

セクション 38(75 ページ)～39(78 ページ)、42(83 ページ)～
46(92 ページ)