微分 II

微分 II

[定理] $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ とし $x=x_0$ の近くで $\varphi^{-1}(x)$ が存在するとする。$t=\varphi^{-1}(x_0)$ で $\varphi(t),\psi(t)$ が共に微分可能ならば

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x_0))=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}$$

微分 II

[定理] $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ とし $x=x_0$ の近くで $\varphi^{-1}(x)$ が存在するとする。$t=\varphi^{-1}(x_0)$ で $\varphi(t),\psi(t)$ が共に微分可能ならば

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x_0))=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}$$

$$\because \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x))-\psi(\varphi^{-1}(x_0))}{x-x_0}$$

微分 II

[定理] $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ とし $x=x_0$ の近くで $\varphi^{-1}(x)$ が存在するとする。$t=\varphi^{-1}(x_0)$ で $\varphi(t),\psi(t)$ が共に微分可能ならば

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x_0)) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}$$

$$\because \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x))-\psi(\varphi^{-1}(x_0))}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x))-\psi(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x_0)}\Bigg/\frac{x-x_0}{\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x_0)}$$

微分 II

[定理] $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ とし $x=x_0$ の近くで $\varphi^{-1}(x)$ が存在するとする。$t=\varphi^{-1}(x_0)$ で $\varphi(t),\psi(t)$ が共に微分可能ならば

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x_0))=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}$$

$$\because \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x))-\psi(\varphi^{-1}(x_0))}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x))-\psi(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x_0)}\Bigg/\frac{x-x_0}{\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x_0)}$$

$$=\lim_{t\to\varphi^{-1}(x_0)}\frac{\psi(t)-\psi(\varphi^{-1}(x_0))}{t-\varphi^{-1}(x_0)}\Bigg/\frac{\varphi(t)-\varphi(\varphi^{-1}(x_0))}{t-\varphi^{-1}(x_0)}$$

微分 II

[定理] $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ とし $x = x_0$ の近くで $\varphi^{-1}(x)$ が存在するとする。$t = \varphi^{-1}(x_0)$ で $\varphi(t), \psi(t)$ が共に微分可能ならば

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x_0)) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}$$

$$\because \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\psi(\varphi^{-1}(x)) - \psi(\varphi^{-1}(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\psi(\varphi^{-1}(x)) - \psi(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x_0)} \Big/ \frac{x - x_0}{\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x_0)}$$

$$= \lim_{t\to\varphi^{-1}(x_0)} \frac{\psi(t) - \psi(\varphi^{-1}(x_0))}{t - \varphi^{-1}(x_0)} \Big/ \frac{\varphi(t) - \varphi(\varphi^{-1}(x_0))}{t - \varphi^{-1}(x_0)}$$

$$= \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x_0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}$$

微分 II

[練習問題]

$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ とするとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

微分 II

[練習問題]

$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ とするとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

[解答]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2} - t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

微分 II

[練習問題]

$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ とするとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

[解答]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2} - t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

微分 II

[練習問題]

$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ とするとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

[解答]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2} - t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$ より、

微分 II

[練習問題]

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$ とするとき、$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

[解答]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2} - t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$ より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -t = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

微分II

[練習問題]

$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ とするとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

[解答]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2} - t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\quad t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$ より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -t = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

これは $y = \sqrt{1-x^2}$ から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたものと一致している。

微分 II

微分 II

[定理] 区間 x_0 を含む区間で定義された連続関数 $f(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

(微分積分学の基本定理)

微分 II

[定理] 区間 x_0 を含む区間で定義された連続関数 $f(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

(微分積分学の基本定理)

”証明”(詳しくは積分の講でやる)

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数の一つなので

$F'(x) = f(x)$

微分 II

[定理] 区間 x_0 を含む区間で定義された連続関数 $f(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

(微分積分学の基本定理)

"証明"(詳しくは積分の講でやる)

$F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数の一つなので

$F'(x) = f(x)$

[練習問題] $f(x)$ が x で微分可能で、 $g(y)$ が区間 $[y_0, f(x)]$ で連続であるとき、

$$\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{f(x)} g(t)dt = g\left(f(x)\right) f'(x)$$

であることを示せ。

[解答]

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} g(t)dt \text{ とおくと } \int_{y_0}^{f(x)} g(t)dt = G\left(f(x)\right)$$

微分 II

[解答]

$G(y) = \int_{y_0}^{y} g(t)dt$ とおくと $\int_{y_0}^{f(x)} g(t)dt = G\left(f(x)\right)$

従って合成関数の微分法則より

$$\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{f(x)} g(t)dt = (G(f(x))' = g\left(f(x)\right)f'(x)$$

微分 II

微分 II

[定理] $x = x_0$ の近くで定義され x_0 で微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が $f(x_0) = g(x_0) = 0$ を満たすとき、

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

が成り立つ。(de l'Hospital の定理)

微分 II

[定理] $x = x_0$ の近くで定義され x_0 で微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が $f(x_0) = g(x_0) = 0$ を満たすとき、

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

が成り立つ。(de l'Hospital の定理)

[練習問題] de l'Hospital の定理を微分の性質：

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

を用いて証明せよ。

微分 II

[定理] $x = x_0$ の近くで定義され x_0 で微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が $f(x_0) = g(x_0) = 0$ を満たすとき、

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

が成り立つ。(de l'Hospital の定理)

[練習問題] de l'Hospital の定理を微分の性質：

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

を用いて証明せよ。

[注意] de l'Hospital の定理は $x = x_0$ で $f(x), g(x)$ が定義されていない場合や $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ の場合にも成り立つが、証明には ε-δ 論法が必要である。

微分 II

[解答] 仮定より $f(x_0) = g(x_0) = 0$ なので、

$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x),\ g(x) = g'(x_0)(x - x_0) + S(x)$

とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{S(x)}{x - x_0} = 0$$

である。

微分 II

[解答] 仮定より $f(x_0) = g(x_0) = 0$ なので、
$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x),\ g(x) = g'(x_0)(x - x_0) + S(x)$
とおくと

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{S(x)}{x - x_0} = 0$$

である。よって

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0) + R(x)}{g'(x_0)(x - x_0) + S(x)}$$

微分 II

[解答] 仮定より $f(x_0) = g(x_0) = 0$ なので、

$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x),\ g(x) = g'(x_0)(x - x_0) + S(x)$

とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{S(x)}{x - x_0} = 0$$

である。よって

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0) + R(x)}{g'(x_0)(x - x_0) + S(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0}}{g'(x_0) + \frac{S(x)}{x - x_0}}$$

微分 II

[解答] 仮定より $f(x_0) = g(x_0) = 0$ なので、

$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x),\ g(x) = g'(x_0)(x - x_0) + S(x)$

とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{S(x)}{x - x_0} = 0$$

である。よって

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0) + R(x)}{g'(x_0)(x - x_0) + S(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0}}{g'(x_0) + \frac{S(x)}{x - x_0}}$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

宿題

問題集

セクション 23(45 ページ)〜25(50 ページ)、32(63 ページ)〜33(66 ページ)