微分

微分

[定義] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ について次の極限が存在するとき $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であるという：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\frac{df}{dx}(x_0) \text{ または } f'(x_0) \text{ 等で表す} \right)$$

これを $f(x)$ の x_0 での微分係数とよぶ。

微分

[定義] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ について次の極限が存在するとき $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であるという：

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\frac{df}{dx}(x_0) \text{ または } f'(x_0) \text{ 等で表す} \right)$$

これを $f(x)$ の x_0 での微分係数とよぶ。

各 x で $f'(x)$ を考えて得られる関数を $f(x)$ の導関数と呼ぶ。

微分

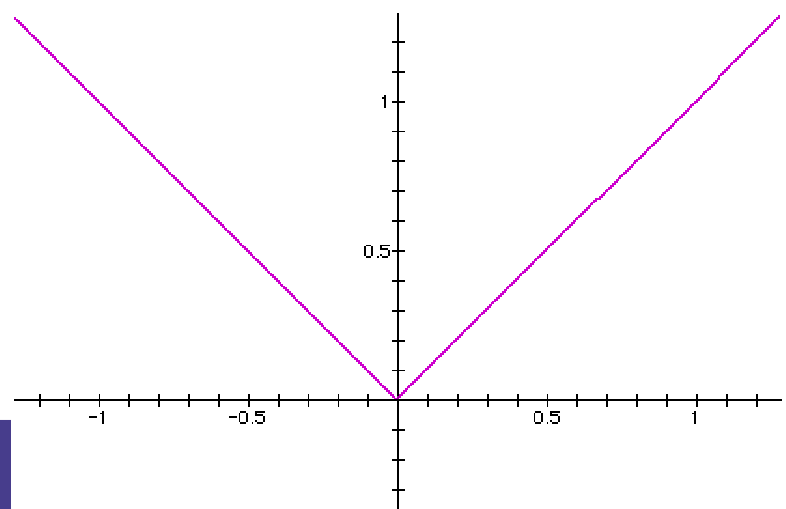
[定義] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ について次の極限が存在するとき $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であるという：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\frac{df}{dx}(x_0) \text{ または } f'(x_0) \text{ 等で表す} \right)$$

これを $f(x)$ の x_0 での微分係数とよぶ。

各 x で $f'(x)$ を考えて得られる関数を $f(x)$ の導関数と呼ぶ。

[注意] 全ての関数が微分可能である訳ではない。例えば $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能である。



微分

微分

[定理] $f(x), g(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で、k は定数とする。

微分

[定理] $f(x), g(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で、k は定数とする。

$$(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0), \qquad (kf(x_0))' = kf'(x_0)$$

$\because$ 極限の和と定数倍の公式より明らか。

微分

[定理] $f(x), g(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で、k は定数とする。

$$(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0), \qquad (kf(x_0))' = kf'(x_0)$$

∵ 極限の和と定数倍の公式より明らか。

$$(f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

微分

[定理] $f(x), g(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で、k は定数とする。

$$(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0), \qquad (kf(x_0))' = kf'(x_0)$$

$\because$ 極限の和と定数倍の公式より明らか。

$$(f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$\because$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
=&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
=&\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
=&f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

微分

[定理続き]

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

微分

[定理続き]

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

$$\because \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0} -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

これと前定理より

微分

[定理続き]

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

$$\because \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0} -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

これと前定理より

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \left(f(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)}\right)'$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

微分

[定理続き] $f(x)$ は $x = x_0$、$g(y)$ は $y = f(x_0)$ で微分可能ならば

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

微分

[定理続き] $f(x)$ は $x = x_0$、$g(y)$ は $y = f(x_0)$ で微分可能ならば

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\because \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

微分

[定理続き] $f(x)$ は $x = x_0$、$g(y)$ は $y = f(x_0)$ で微分可能ならば

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\because \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

[練習問題]

(i) $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \left(\binom{n}{k} = {}_nC_k\right)$ を示せ。

(ii) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$ を計算せよ。

微分

[定理続き] $f(x)$ は $x=x_0$、$g(y)$ は $y=f(x_0)$ で微分可能ならば

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\because \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

[練習問題]

(i) $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \left(\binom{n}{k} = {}_nC_k\right)$ を示せ。

(ii) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$ を計算せよ。

[解答]

(i) $f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ の係数は、合計 n 回微分するうち $g(x)$ を k 回、残りは $f(x)$ を微分する組合せの数である。

微分

[定理続き] $f(x)$ は $x = x_0$、$g(y)$ は $y = f(x_0)$ で微分可能ならば

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\because \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

[練習問題]

(i) $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \left(\binom{n}{k} = {}_nC_k\right)$ を示せ。

(ii) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$ を計算せよ。

[解答]

(i) $f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ の係数は、合計 n 回微分するうち $g(x)$ を k 回、残りは $f(x)$ を微分する組合せの数である。

(ii) 合成関数の微分と帰納法より $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

微分

微分

[定理] 区間 $[a, b]$ で定義された連続で微分可能な関数 $f(x)$ について、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $a < c < b$ がある。**(平均値の定理)**

微分

[定理] 区間 $[a,b]$ で定義された連続で微分可能な関数 $f(x)$ について、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる $a<c<b$ がある。(平均値の定理)

[練習問題] x, x_0 を固定し、次が成り立つように K をとる。

$$\frac{K}{n!}(x-x_0)^n=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

このとき

$$F(t)=f(x)-\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{K}{n!}(x-t)^n\right\}$$

に平均値の定理を適用して Taylor 展開の公式を証明せよ。

微分

[解答] $F(x) = F(x_0) = 0$ なので平均値の定理により

$F'(\xi) = 0$ となる ξ が x と x_0 の間にある。

微分

[解答] $F(x)=F(x_0)=0$ なので平均値の定理により

$F'(\xi)=0$ となる ξ が x と x_0 の間にある。よって

$$F(t)'=-\left\{\frac{f'(t)}{0!}-\frac{f'(t)}{1!}\cdot 1+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t)\right.$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}-\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\cdot(n-1)(x-t)^{n-2}$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}-\frac{K}{n!}\cdot n(x-t)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{K-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

より $K=f^{(n)}(\xi)$ となり、ξ は x と x_0 の間より結論を得る。

微分

[練習問題続き] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ が $f'(x_0) = 0$ かつ $f''(x_0) > 0$ を満たすならば $f(x)$ は $x = x_0$ で極小値を持つことを Taylor 展開を用いて示せ。

微分

[練習問題続き] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ が $f'(x_0) = 0$ かつ $f''(x_0) > 0$ を満たすならば $f(x)$ は $x = x_0$ で極小値を持つことを Taylor 展開を用いて示せ。

[解答] $f(x)$ を x_0 のまわりで Taylor 展開すると

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R(x), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

となる。

微分

[練習問題続き] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ が $f'(x_0) = 0$ かつ $f''(x_0) > 0$ を満たすならば $f(x)$ は $x = x_0$ で極小値を持つことを Taylor 展開を用いて示せ。

[解答] $f(x)$ を x_0 のまわりで Taylor 展開すると

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R(x), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

となる。　すなわち $r(x) = \dfrac{R(x)}{(x - x_0)^2}$ とおくと $\displaystyle\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$

微分

[練習問題続き] $x = x_0$ の近くで定義された関数 $f(x)$ が $f'(x_0) = 0$ かつ $f''(x_0) > 0$ を満たすならば $f(x)$ は $x = x_0$ で極小値を持つことを Taylor 展開を用いて示せ。

[解答] $f(x)$ を x_0 のまわりで Taylor 展開すると

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R(x), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

となる。　すなわち $r(x) = \dfrac{R(x)}{(x - x_0)^2}$ とおくと $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$

従って、x が x_0 に近いときには $\dfrac{f''(x_0)}{2} + r(x) > 0$ となり

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2} + r(x)\right)(x - x_0)^2 > f(x_0) \quad (x \neq x_0)$$

宿題

問題集

セクション 13(25 ページ)〜18(36 ページ)