数列の極限

数列の極限

[定義] $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ を数列とする。n が限りなく大きくなるとき a_n が α に限りなく近づくならば、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。

数列の極限

[定義] $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ を数列とする。n が限りなく大きくなるとき a_n が α に限りなく近づくならば、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。
また、n が限りなく大きくなるとき a_n が正の (負の) 方向に限りなく大きくなるならば、数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ ($-\infty$) に発散するといい $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$ と書く。

数列の極限

[定義] $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ を数列とする。n が限りなく大きくなるとき a_n が α に限りなく近づくならば、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。
また、n が限りなく大きくなるとき a_n が正の (負の) 方向に限りなく大きくなるならば、数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ ($-\infty$) に発散するといい $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$ と書く。

[注意] この「定義」は一見もっともらしいが、よく考えると意味不明である。「厳密な定義」は適当な微積分の教科書を参照すること。(所謂 ε-N 論法を用いる。)

数列の極限

数列の極限

[定理] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき

数列の極限

[定理] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta,\ \lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha\ \ (k\text{ は定数}),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta,\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}\ \ (\beta \neq 0)$$

数列の極限

[定理] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta,\ \lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha\ \ (k\text{ は定数}),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta,\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}\ \ (\beta \neq 0)$$

十分大きな n で $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

十分大きな n で $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

数列の極限

[定理] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta,\ \lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha\ \ (k \text{ は定数}),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta,\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}\ \ (\beta \neq 0)$$

十分大きな n で $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

十分大きな n で $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

$\{a_n\}$ が単調増加 (減少) で上に有界 (下に有界)

i.e. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq A$

($a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq A$) となる A がある、

ならば $\{a_n\}$ は収束する。(極限の値は分からない。)

数列の極限

[定理]

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$

(直観的には当たり前だが、証明には ε-N 論法が必要である。)

数列の極限

[定理]

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = +\infty \ (\alpha > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = 0 \ (\alpha < 0)$$

(直観的には当たり前だが、証明には ε**-**N 論法が必要である。**)**

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty} r^{n} = +\infty \ \ (1 < r), \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n} = 0 \ \ (|r| < 1)$$

数列の極限

[定理]

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$

(直観的には当たり前だが、証明には ε-N 論法が必要である。)

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty \quad (1 < r), \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad (|r| < 1)$$

[解答] $1 < r$ ならば $r = 1 + r'$ となる $r' > 0$ があるので
$r^n > 1 + nr'$ (二項定理)。従って
$r^n > 1 + nr' \to +\infty \ (n \to \infty)$ つまり $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$

数列の極限

[定理]

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \ (\alpha > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0 \ (\alpha < 0)$$

(直観的には当たり前だが、証明には ε-N 論法が必要である。)

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty \ \ (1 < r), \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \ \ (|r| < 1)$$

[解答] $1 < r$ ならば $r = 1 + r'$ となる $r' > 0$ があるので $r^n > 1 + nr'$ (二項定理)。従って

$r^n > 1 + nr' \to +\infty \ (n \to \infty)$ つまり $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$

$|r|<1$ ならば $\frac{1}{|r|} = 1+r'$ となる $r' > 0$ がある。$\therefore \frac{1}{|r^n|} > 1+nr'$

従って、$|r^n| < \frac{1}{1+nr'} \to 0 \ (n \to \infty)$ つまり、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

数列の極限

[練習問題続き] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{r^n} = +\infty \ \ (1 < r), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

数列の極限

[練習問題続き] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{r^n}=+\infty\ \ (1<r),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

[解答] $k>2r$ となる自然数 k を一つ選ぶと、$k\le n$ ならば

$$\frac{n!}{r^n}=\frac{1\cdot 2\cdots k\cdot(k+1)\cdots n}{r\cdot r\cdots r\cdot r\qquad\cdots\qquad r}\ge\frac{k!}{r^k}2^{n-k}\to+\infty\ (n\to\infty)$$

つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{r^n}=+\infty$

数列の極限

[練習問題続き] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{r^n}=+\infty\quad(1<r),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

[解答] $k>2r$ となる自然数 k を一つ選ぶと、$k\le n$ ならば

$$\frac{n!}{r^n}=\frac{1\cdot 2\cdots k\cdot(k+1)\cdots n}{r\cdot r\cdots r\cdot r\quad\cdots\quad r}\ge\frac{k!}{r^k}2^{n-k}\to+\infty\ (n\to\infty)$$

つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{r^n}=+\infty$

$\frac{n}{2}$ 以下の最大の自然数を $m(n)$ とすると、

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdots m\cdot(m+1)\cdots n}{n\cdot n\cdots n\cdot n\quad\cdots\quad n}\le\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

数列の極限

[練習問題続き] 次の極限を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{r^n} = +\infty \quad (1 < r), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

[解答] $k > 2r$ となる自然数 k を一つ選ぶと、$k \leq n$ ならば

$$\frac{n!}{r^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1) \cdots n}{r \cdot r \cdots r \cdot r \quad \cdots \quad r} \geq \frac{k!}{r^k} 2^{n-k} \to +\infty \ (n \to \infty)$$

つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{r^n} = +\infty$

$\frac{n}{2}$ 以下の最大の自然数を $m(n)$ とすると、

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n \cdot n \cdots n \cdot n \quad \cdots \quad n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

ここで $m(n) \to \infty \ (n \to \infty)$ なので、$\left(\frac{1}{2}\right)^m \to 0 \ (n \to \infty)$

つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

関数の極限

関数の極限

[定義] $f(x)$ を $x=a$ ($a=\pm\infty$ を含む) の近くで定義された関数とする (但し $x=a$ 自体では定義されていなくても良い)。
x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近付くとき、$f(x)$ の値が限りなく b に近付くならば $f(x)$ は x が a に近付くとき b に収束するといい、$\lim_{x\to a} f(x)=b$ と書く。

関数の極限

[定義] $f(x)$ を $x = a$ ($a = \pm\infty$ を含む) の近くで定義された関数とする (但し $x = a$ 自体では定義されていなくても良い)。x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近付くとき、$f(x)$ の値が限りなく b に近付くならば $f(x)$ は x が a に近付くとき b に収束するといい、$\lim_{x \to a} f(x) = b$ と書く。
また、x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近付くとき、$f(x)$ が正の (負の) 方向に限りなく大きくなるならば、$f(x)$ は x が a に近付くとき $+\infty$ ($-\infty$) に発散するといい、
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ と書く。

関数の極限

[定義] $f(x)$ を $x=a$ ($a=\pm\infty$ を含む) の近くで定義された関数とする (但し $x=a$ 自体では定義されていなくても良い)。
x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近付くとき、$f(x)$ の値が限りなく b に近付くならば $f(x)$ は x が a に近付くとき b に収束するといい、$\lim_{x\to a} f(x)=b$ と書く。
また、x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近付くとき、$f(x)$ が正の (負の) 方向に限りなく大きくなるならば、$f(x)$ は x が a に近付くとき $+\infty$ $(-\infty)$ に発散するといい、$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty\ (-\infty)$ と書く。

[注意] この「定義」も一見もっともらしいが、よく考えるとやはり意味不明である。「厳密な定義」は適当な微積分の教科書を参照すること。(所謂 ε-δ 論法を用いる。)

関数の極限

関数の極限

[定理] $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とするとき

関数の極限

[定理] $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta,\ \lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha \ \ (k \text{ は定数}),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta,\ \lim_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|,\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \ \ (\beta \neq 0)$$

関数の極限

[定理] $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき

$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta,\ \lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha$ (k は定数),

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta,\ \lim_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|,\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}\ \ (\beta \neq 0)$$

a に十分近い x で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

a に十分近い x で $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

関数の極限

[定理] $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta,\ \lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha\ \ (k \text{ は定数}),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta,\ \lim_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|,\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}\ \ (\beta \neq 0)$$

a に十分近い x で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

a に十分近い x で $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

[定理] $\lim_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha\ \ (\alpha < 0$ のときは $a \neq 0)$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty\ (\alpha > 0) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0\ (\alpha < 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (a > 1) \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\ (0 < a < 1)$$

(直観的には当たり前だが、証明には ε-δ 論法が必要である。)

関数の極限

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

(i) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0,$ $\quad (\alpha > \beta)$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

関数の極限

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=+\infty \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=0,$ $\quad(\alpha>\beta)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$

[解答]

(i) $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$ より前定理から従う。

関数の極限

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=+\infty \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=0, \quad (\alpha>\beta)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$

[解答]

(i) $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$ より前定理から従う。

(ii) $\alpha<n-1$ となる n をとると次式より従う。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n>\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (0<\theta<1)$$

関数の極限

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=+\infty \quad \lim_{x\to0}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=0,\quad (\alpha>\beta)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$

[解答]

(i) $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$ より前定理から従う。

(ii) $\alpha<n-1$ となる n をとると次式より従う。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n>\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\quad(0<\theta<1)$$

[定理] $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=b,\ \lim_{y\to b}g(y)=\beta$ かつ、x が a に近いとき

$f(x)\neq b$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}g(f(x))=\beta$

関数の極限

[練習問題] 次の極限を証明せよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=0, \qquad (\alpha>\beta)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$

[解答]

(i) $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$ より前定理から従う。

(ii) $\alpha<n-1$ となる n をとると次式より従う。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n>\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (0<\theta<1)$$

[定理] $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=b,\ \lim_{y\to b}g(y)=\beta$ かつ、x が a に近いとき

$f(x)\neq b$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}g(f(x))=\beta$

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{y\to\pm\infty}g(y)=\beta$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}g(f(x))=\beta$

関数の連続性

関数の連続性

[定義] $x = a$ 及び、$x = a$ の近くの x で定義された関数 $f(x)$ について $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

定義された全ての点で連続な関数を連続関数とよぶ。

関数の連続性

[定義] $x = a$ 及び、$x = a$ の近くの x で定義された関数 $f(x)$ について $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

定義された全ての点で連続な関数を連続関数とよぶ。

[注意] 関数の連続性の厳密な定義にも ε-δ 論法を用いる。

関数の連続性

[定義] $x=a$ 及び、$x=a$ の近くの x で定義された関数 $f(x)$ について $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

定義された全ての点で連続な関数を連続関数とよぶ。

[注意] 関数の連続性の厳密な定義にも ε-δ 論法を用いる。

[定理] $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば次も a で連続である。

$$f(x) \pm g(x), \quad kf(x)\ (k \text{ は実数}), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(a) \neq 0)$$

関数の連続性

[定義] $x = a$ 及び、$x = a$ の近くの x で定義された関数 $f(x)$ について $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。
定義された全ての点で連続な関数を連続関数とよぶ。

[注意] 関数の連続性の厳密な定義にも ε-δ 論法を用いる。

[定理] $f(x), g(x)$ が $x = a$ で連続ならば次も a で連続である。

$$f(x) \pm g(x), \quad kf(x) \ (k \text{ は実数}), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(a) \neq 0)$$

$f(x)$ が $x = a$ で連続で $g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば、合成関数 $g(f(x))$ は $x = a$ で連続である。

関数の連続性

[定義] $x=a$ 及び、$x=a$ の近くの x で定義された関数 $f(x)$ について $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

定義された全ての点で連続な関数を連続関数とよぶ。

[注意] 関数の連続性の厳密な定義にも ε-δ 論法を用いる。

[定理] $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば次も a で連続である。

$$f(x)\pm g(x), \quad kf(x)\ (k \text{ は実数}), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(a)\neq 0)$$

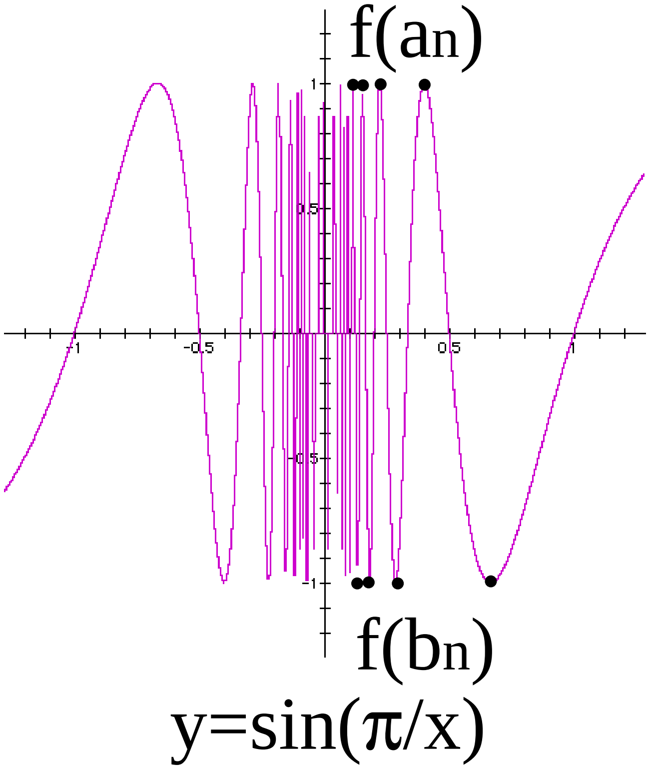
$f(x)$ が $x=a$ で連続で $g(y)$ が $y=f(a)$ で連続ならば、合成関数 $g(f(x))$ は $x=a$ で連続である。

$f(x)$ が $x=a$ で連続ならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となるどの様な数列 $\{a_n\}$ についても $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ である。

関数の連続性

[例] $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ **(**$x \neq 0$**),** $f(0) = 0$ について、下図では

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$



参考文献

ε-N 及び ε-δ 論法に関する参考書

「はじめて学ぶイプシロン・デルタ」細井勉 著 日本評論社

　きちんとした微分積分の教科書には ε-N 及び ε-δ 論法が書かれているが、これが分かる様になる為にはかなり慣れが必要である。

　分厚い微分積分の教科書の ε-N 及び ε-δ 論法についての解説を読んでみて、良く分からない人に勧められる参考書である。

宿題

問題集

セクション 7(13 ページ)〜12(24 ページ)