

オイラーの公式

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$e^{i \cdot 0}$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta \\ &= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

$$e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

$$e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad (\text{指数公式})$$

オイラーの公式

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \frac{d}{dt} \{e^{xt+iyt}\}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \frac{d}{dt} \{e^{xt+iyt}\} = \frac{d}{dt} \{e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt)\}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} \{e^{xt+iyt}\} = \frac{d}{dt} \{e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt)\} \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (-y \sin yt + iy \cos yt)\end{aligned}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} \{e^{xt+iyt}\} = \frac{d}{dt} \{e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt)\} \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (-y \sin yt + iy \cos yt) \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (iy \cos yt + (i)^2 y \sin yt)\end{aligned}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} \{e^{xt+iyt}\} = \frac{d}{dt} \{e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt)\} \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (-y \sin yt + iy \cos yt) \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (iy \cos yt + (i)^2 y \sin yt) \\ &= (x + iy)e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt)\end{aligned}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} \{e^{xt+iyt}\} = \frac{d}{dt} \{e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt)\} \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (-y \sin yt + iy \cos yt) \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (iy \cos yt + (i)^2 y \sin yt) \\ &= (x + iy)e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &= \lambda e^{\lambda t}\end{aligned}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} \left\{ e^{xt+iyt} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \right\} \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (-y \sin yt + iy \cos yt) \\ &= xe^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &\quad + e^{xt} \cdot (iy \cos yt + (i)^2 y \sin yt) \\ &= (x + iy)e^{xt} \cdot (\cos yt + i \sin yt) \\ &= \lambda e^{\lambda t} \quad (\text{微分公式})\end{aligned}$$

オイラーの公式

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\exp \frac{\pi i}{2}$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\exp \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\exp \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned} \exp \frac{\pi i}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ \exp \pi i & \end{aligned}$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}\exp \frac{\pi i}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ \exp \pi i &= \cos \pi + i \sin \pi\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}\exp \frac{\pi i}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} &&= i \\ \exp \pi i &= \cos \pi + i \sin \pi &&= -1\end{aligned}$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}\exp \frac{\pi i}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} &&= i \\ \exp \pi i &= \cos \pi + i \sin \pi &&= -1 \\ \exp \frac{n\pi i}{2}\end{aligned}$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}\exp \frac{\pi i}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ \exp \pi i &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ \exp \frac{n\pi i}{2} &= \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}\exp \frac{\pi i}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ \exp \pi i &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ \exp \frac{n\pi i}{2} &= \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} = i^n\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\exp \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\exp \pi i = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\exp \frac{n\pi i}{2} = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} = i^n$$

(ii) $z^n = 1$ (n は自然数) の解を求めよ。但し n 次方程式は n 個解を持つ。

オイラーの公式

【練習問題】

(i) $\exp \frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp \frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

【解答】

$$\exp \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\exp \pi i = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\exp \frac{n\pi i}{2} = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} = i^n$$

(ii) $z^n = 1$ (n は自然数) の解を求めよ。但し n 次方程式は n 個解を持つ。

【解答】

$$z = \exp 2\frac{\pi i}{n}, \exp 2\frac{2\pi i}{n}, \exp 2\frac{3\pi i}{n}, \dots, \exp 2\frac{(n-1)\pi i}{n}, 1$$

線形常微分方程式

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき : $y' - \lambda y = 0$

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき: $y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda t} \frac{d}{dt} (ye^{-\lambda t}) = 0$ と変形できる.

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき: $y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda t} \frac{d}{dt} (ye^{-\lambda t}) = 0$ と変形できる.

$\frac{d}{dt} (ye^{-\lambda t}) = 0$ の両辺を積分して

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、 a_1, \dots, a_n は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき: $y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda t} \frac{d}{dt} (ye^{-\lambda t}) = 0$ と変形できる.

$\frac{d}{dt} (ye^{-\lambda t}) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda t} = C \quad \therefore y = Ce^{\lambda t} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

線形常微分方程式

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\}$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t} \right] \end{aligned}$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0\end{aligned}$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\&= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t}\right] \\&= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} &= 0\end{aligned}$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0$$

$$\text{両辺を積分して } e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0$$

$$\text{両辺を積分して } e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1 e^{(\alpha-\beta)t}$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{ e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) \right\} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left\{ e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) \right\} = 0$$

$$\text{両辺を積分して } e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1 e^{(\alpha-\beta)t}$$

$$\text{両辺を積分して } ye^{-\beta t} = \frac{C'_1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t} + C_2.$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0$$

$$\text{両辺を積分して } e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1 e^{(\alpha-\beta)t}$$

$$\text{両辺を積分して } ye^{-\beta t} = \frac{C'_1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t} + C_2.$$

よって $\frac{C'_1}{\alpha-\beta} = C_1$ とおいて, 解は

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき : $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{e^{\beta t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left\{e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t})\right\} = 0$$

$$\text{両辺を積分して } e^{(\beta-\alpha)t} \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (ye^{-\beta t}) = C'_1 e^{(\alpha-\beta)t}$$

$$\text{両辺を積分して } ye^{-\beta t} = \frac{C'_1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t} + C_2.$$

よって $\frac{C'_1}{\alpha-\beta} = C_1$ とおいて, 解は

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \end{aligned}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{従って} \quad \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \text{ 従って } \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \text{ 従って } \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \text{ すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \text{ 従って } \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \text{ すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \text{ 従って } \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \text{ すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right) y$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{従って} \quad \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \quad \text{すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right) y \quad \text{よって (a) と同様に} \\ y &= C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\bar{\alpha} t}.\end{aligned}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{従って} \quad \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \quad \text{すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right) y \quad \text{よって (a) と同様に} \\ y &= C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\bar{\alpha} t}. \quad \alpha = r + i\omega \quad (r, \omega \text{ は実数}) \text{ とすると,}\end{aligned}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{従って} \quad \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって} \quad ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \quad \text{すなわち} \quad y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right) y \quad \text{よって (a) と同様に}$$

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\bar{\alpha} t}. \quad \alpha = r + i\omega \quad (r, \omega \text{ は実数}) \quad \text{とすると,}$$

$$y = C_1 e^{rt} (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 e^{rt} (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{従って} \quad \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \quad \text{すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right) y \quad \text{よって (a) と同様に}$$

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\bar{\alpha} t}. \quad \alpha = r + i\omega \quad (r, \omega \text{ は実数}) \quad \text{とすると,}$$

$$y = C_1 e^{rt} (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 e^{rt} (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$\text{よって } C_1 + C_2 = A_1, \quad i(C_1 - C_2) = A_2 \quad \text{とおいて解は}$$

線形常微分方程式

(b) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき :

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \left[\left\{ e^{\alpha t} \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) \right\} e^{-\alpha t} \right] \\ &= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (ye^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{従って} \quad \frac{d}{dt} (ye^{-\alpha t}) = C_1$$

$$\text{よって } ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2 \quad \text{すなわち } y = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき :

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right) y \quad \text{よって (a) と同様に}$$

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\bar{\alpha} t}. \quad \alpha = r + i\omega \quad (r, \omega \text{ は実数}) \text{ とすると,}$$

$$y = C_1 e^{rt} (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 e^{rt} (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$\text{よって } C_1 + C_2 = A_1, \quad i(C_1 - C_2) = A_2 \quad \text{とおいて解は}$$

$$y = A_1 e^{rt} \cos \omega t + A_2 e^{rt} \sin \omega t \quad (A_1, A_2 \text{ は任意の定数})$$

線形常微分方程式

【練習問題】

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

線形常微分方程式

【練習問題】

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

【解答】

(i) $y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$

線形常微分方程式

【練習問題】

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

【解答】

(i) $y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$

(ii) $y = (C_1t + C_2)e^{2t}$

線形常微分方程式

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

[解答]

(i) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

(ii) $y = (C_1 t + C_2) e^{2t}$

(iii) $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

線形常微分方程式

【練習問題】

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

【解答】

(i) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

(ii) $y = (C_1 t + C_2) e^{2t}$

(iii) $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

(iv) $y = C_1 e^t \cos 2t + C_2 e^t \sin 2t$

定数変化法

定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

この方程式は, 変数分離形: $\frac{dy}{dt} = f(t)y$ として解ける.

定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

この方程式は, 変数分離形: $\frac{dy}{dt} = f(t)y$ として解ける.

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(t)dt$$

定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

この方程式は, 変数分離形: $\frac{dy}{dt} = f(t)y$ として解ける.

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(t)dt$$

$$\therefore \log y = \int f(t)dt + c \quad \text{i.e.} \quad y = Ce^{\int f(t)dt}$$

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$y' - f(t)y = C'e^{\int f(t)dt} + C f(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y$$

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned}y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + C f(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt}\end{aligned}$$

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned}y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + C f(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt} \\ &= p(t)\end{aligned}$$

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned}y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + C f(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt}\end{aligned}$$

$$= p(t)$$

$$\therefore C' = e^{-\int f(t)dt} p(t)$$

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned}y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + C f(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt} \\ &= p(t)\end{aligned}$$

$$\therefore C' = e^{-\int f(t)dt} p(t)$$

この方程式は

$$C(t) = \int e^{-\int f(t)dt} p(t) dt$$

として解ける.

定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned}y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + C f(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt} \\ &= p(t)\end{aligned}$$

$$\therefore C' = e^{-\int f(t)dt} p(t)$$

この方程式は

$$C(t) = \int e^{-\int f(t)dt} p(t) dt$$

として解ける.

よって元の方程式の解は

$$y = e^{\int f(t)dt} \int e^{-\int f(t)dt} p(t) dt$$

宿題

問題集

セクション 91(181 ページ)～98(196 ページ)