

平面の方程式

平面の方程式

[平面の方程式] 一次方程式

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

が三次元空間内で表す図形は $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面である。($\vec{n}$ は法線ベクトル)

平面の方程式

[平面の方程式] 一次方程式

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

が三次元空間内で表す図形は $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面である。($\vec{n}$ は法線ベクトル)

$$\therefore P_0(x_0, y_0, z_0)、P(x, y, z) \text{ とすると } \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

平面の方程式

[平面の方程式] 一次方程式

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

が三次元空間内で表す図形は $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面である。($\vec{n}$ は法線ベクトル)

$\therefore P_0(x_0, y_0, z_0)$ 、 $P(x, y, z)$ とすると $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 上の方程式は次のように書き直せる：

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

平面の方程式

[平面の方程式] 一次方程式

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

が三次元空間内で表す図形は $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面である。($\vec{n}$ は法線ベクトル)

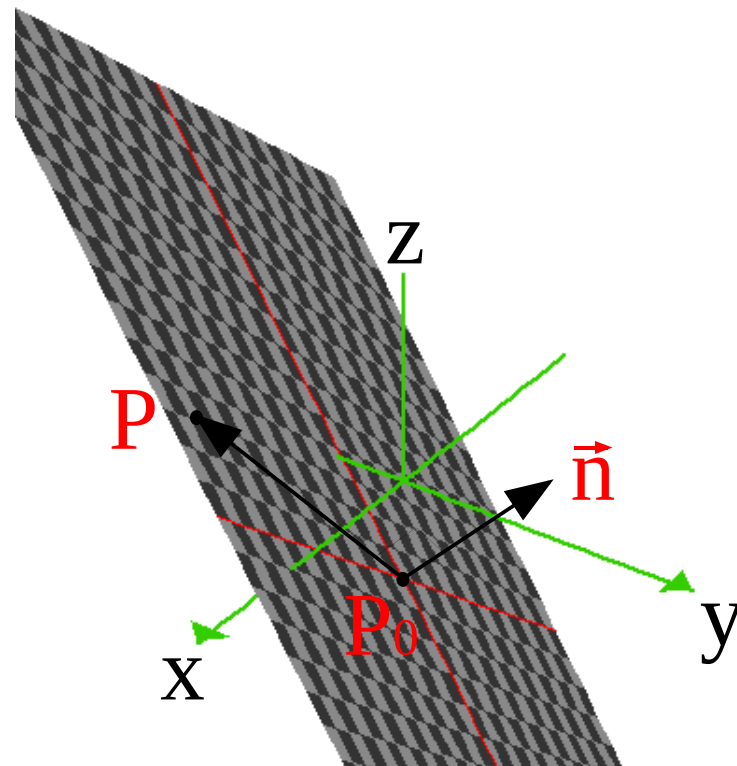
$\therefore P_0(x_0, y_0, z_0)$ 、 $P(x, y, z)$ とすると $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 上の方程式は次のように書き直せる：

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

従って、この方程式は $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$ となる点 P 全体を表しており、これは $\vec{n}$ に垂直な平面である。

平面の方程式



平面の方程式

[練習問題]

(i) 原点を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

(ii) 点 $(0, 0, 1)$ を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ

平面の方程式

[練習問題]

(i) 原点を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

(ii) 点 $(0, 0, 1)$ を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面

の方程式を求めよ

[解答]

(i) $z = x + y$

平面の方程式

[練習問題]

(i) 原点を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

(ii) 点 $(0, 0, 1)$ を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ

[解答]

(i) $z = x + y$ (ii) $z = 1 - x - y$

多変数関数とそのグラフ

多変数関数とそのグラフ

[多変数関数] x - y 平面の各点 (x, y) に対し実数 z が唯一つ定まるとき、 z は (x, y) の二変数関数であるという。またこのとき、各 (x, y) に対し z を決める規則を $f(x, y)$ 等の記号で表し、 $z = f(x, y)$ 等と書く。

多変数関数とそのグラフ

[多変数関数] x - y 平面の各点 (x, y) に対し実数 z が唯一つ定まるとき、 z は (x, y) の二変数関数であるという。またこのとき、各 (x, y) に対し z を決める規則を $f(x, y)$ 等の記号で表し、 $z = f(x, y)$ 等と書く。

$f(x, y)$ が定まるような (x, y) 全体を、この関数の定義域とよぶ。逆に x - y 平面の領域 D が与えられていて、 $f(x, y)$ が D 内の全ての点に対して定まっているとき $f(x, y)$ は D で定義された関数である、という。

多変数関数とそのグラフ

[多変数関数] x - y 平面の各点 (x, y) に対し実数 z が唯一つ定まるとき、 z は (x, y) の二変数関数であるという。またこのとき、各 (x, y) に対し z を決める規則を $f(x, y)$ 等の記号で表し、 $z = f(x, y)$ 等と書く。

$f(x, y)$ が定まるような (x, y) 全体を、この関数の定義域とよぶ。逆に x - y 平面の領域 D が与えられていて、 $f(x, y)$ が D 内の全ての点に対して定まっているとき $f(x, y)$ は D で定義された関数である、という。

同様に n 次元空間の各点 $(x_1, \dots, x_n)$ に対し実数 y が唯一つ定まるとき、 y は $(x_1, \dots, x_n)$ の多変数 (n 変数) 関数であるという。またこのとき、各 $(x_1, \dots, x_n)$ に対し y を決める規則を $f(x_1, \dots, x_n)$ 等の記号で表し $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 等と書く。

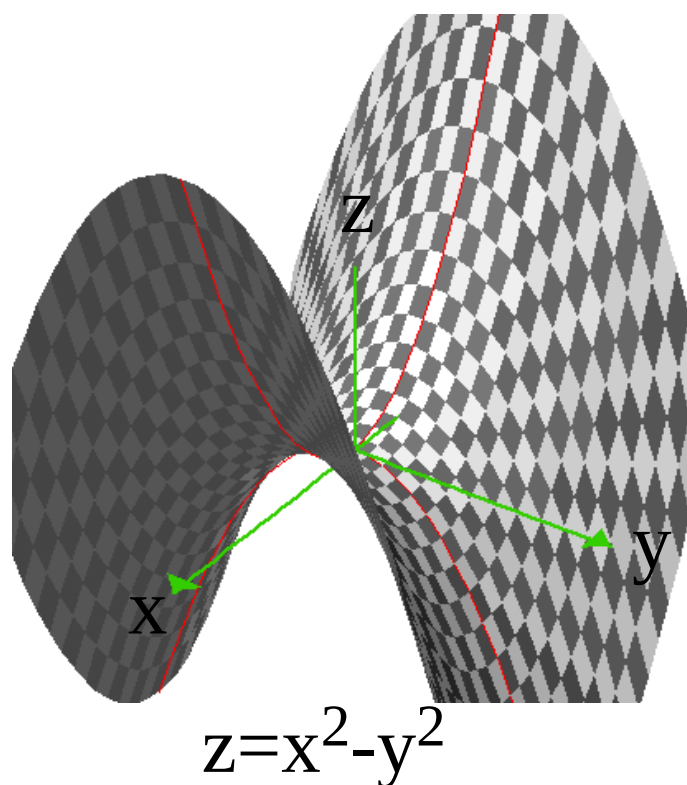
多変数関数とそのグラフ

多変数関数とそのグラフ

[二変数関数のグラフ] $f(x, y)$ を (x, y) の二変数関数とすると、方程式 $z = f(x, y)$ が x - y - z 空間に定める曲面を関数 $f(x, y)$ のグラフとよぶ。

多変数関数とそのグラフ

【二変数関数のグラフ】 $f(x, y)$ を (x, y) の二変数関数とするとき、方程式 $z = f(x, y)$ が x - y - z 空間に定める曲面を関数 $f(x, y)$ のグラフとよぶ。



多変数関数と偏微分

多変数関数と偏微分

[多変数関数の一次関数による近似] 点 (x_0, y_0) の近くの (x, y) について $f(x, y)$ を一次式 + 「余り」とおくとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

多変数関数と偏微分

[多変数関数の一次関数による近似] 点 (x_0, y_0) の近くの (x, y) について $f(x, y)$ を一次式 + 「余り」とおくとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

が成り立つならば、

多変数関数と偏微分

[多変数関数の一次関数による近似] 点 (x_0, y_0) の近くの (x, y) について $f(x, y)$ を一次式 + 「余り」とおくとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

が成り立つならば、 $f(x, y)$ を (x_0, y_0) の近くで一次関数

$$f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

で近似すると、 (x, y) が (x_0, y_0) に近付くとき「余り」

$R(x, y)$ は x, y の一次式より速く 0 に近付く。

多変数関数と偏微分

[多変数関数の一次関数による近似] 点 (x_0, y_0) の近くの (x, y) について $f(x, y)$ を一次式 + 「余り」とおくとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

が成り立つならば、 $f(x, y)$ を (x_0, y_0) の近くで一次関数

$$f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

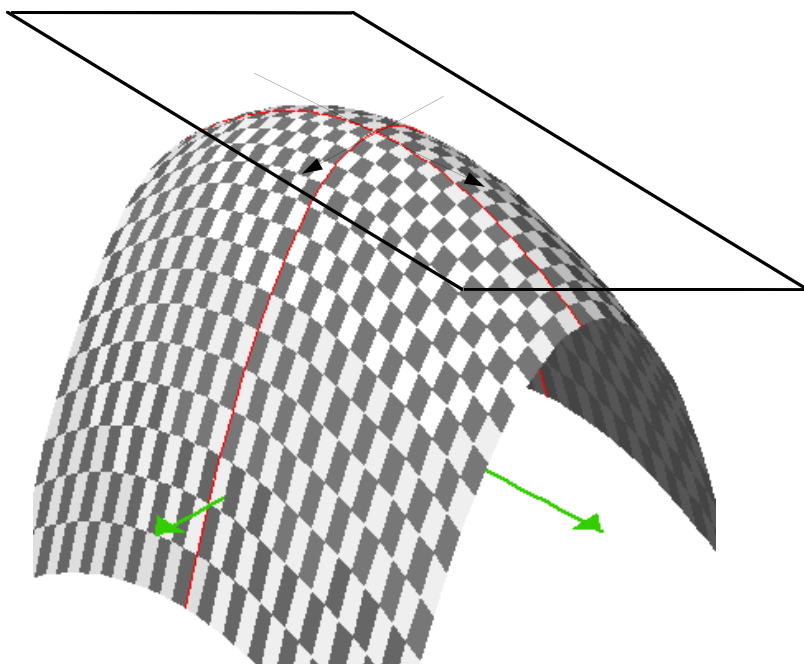
で近似すると、 (x, y) が (x_0, y_0) に近付くとき「余り」

$R(x, y)$ は x, y の一次式より速く 0 に近付く。即ち

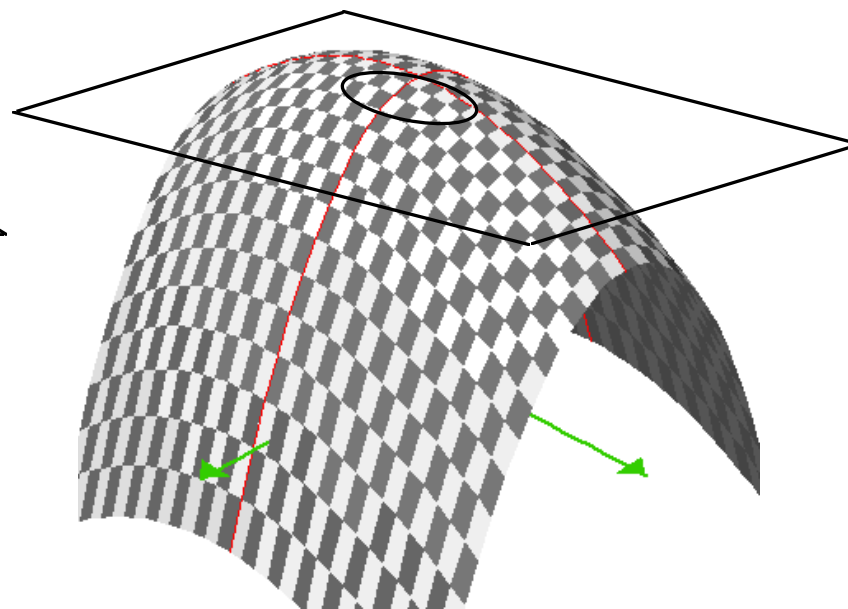
$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

は $z = f(x, y)$ のグラフの $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ での接平面の方程式である。

多変数関数と偏微分



接平面



接平面ではない

多変数関数と偏微分

[定義] $f(x, y)$ が (x_0, y_0) で一次関数で近似できるとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

多変数関数と偏微分

[定義] $f(x, y)$ が (x_0, y_0) で一次関数で近似できるとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$f(x, y)$ は (x_0, y_0) で全微分可能であるという。

多変数関数と偏微分

[定義] $f(x, y)$ が (x_0, y_0) で一次関数で近似できるとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$f(x, y)$ は (x_0, y_0) で全微分可能であるという。

このとき明らかに、 A, B は以下で求まる。

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad B = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

多変数関数と偏微分

[定義] $f(x, y)$ が (x_0, y_0) で一次関数で近似できるとき

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + R(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$f(x, y)$ は (x_0, y_0) で全微分可能であるという。

このとき明らかに、 A, B は以下で求まる。

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad B = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

[定義]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

を各々 f の x によるまたは y による (x_0, y_0) における偏微分係数とよぶ。

多変数関数と偏微分

多変数関数と偏微分

各点 (x, y) において偏微分係数を考えることによって決まる
二変数関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を $f(x, y)$ の x または y による偏導関数と呼ぶ。

多変数関数と偏微分

各点 (x, y) において偏微分係数を考えることによって決まる
二変数関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を $f(x, y)$ の x または y による偏導関数と呼ぶ。

三変数以上の多変数関数についても同様に偏微分係数と偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

を考えることが出来る。

多変数関数と偏微分

各点 (x, y) において偏微分係数を考えることによって決まる
二変数関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を $f(x, y)$ の x または y による偏導関数と呼ぶ。

三変数以上の多変数関数についても同様に偏微分係数と偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \dots, x_{n0}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

を考えることが出来る。

[注意] $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ が存在しても f が (x_0, y_0) で全微分可能とは限らない。(詳細は適当な教科書を参照すること。)

多変数関数と偏微分

多変数関数と偏微分

[練習問題] 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

$$h(x, y) = \sin(x + y), \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

多変数関数と偏微分

[練習問題] 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

$$h(x, y) = \sin(x + y), \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[解答]

多変数関数と偏微分

[練習問題] 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

$$h(x, y) = \sin(x + y), \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[解答]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

多変数関数と偏微分

[練習問題] 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

$$h(x, y) = \sin(x + y), \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[解答]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x + 2y$$

多変数関数と偏微分

[練習問題] 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

$$h(x, y) = \sin(x + y), \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[解答]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x + 2y$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos(x + y) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \cos(x + y)$$

多変数関数と偏微分

[練習問題] 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

$$h(x, y) = \sin(x + y), \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[解答]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x + 2y$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos(x + y) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

宿題

問題集

セクション 72(143 ページ)～73(146 ページ)、76(151 ページ)～77(154 ページ)