一変数関数の広義積分 (復習)

一変数関数の広義積分 (復習)

[例] 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ を考える。これを次のように計算する

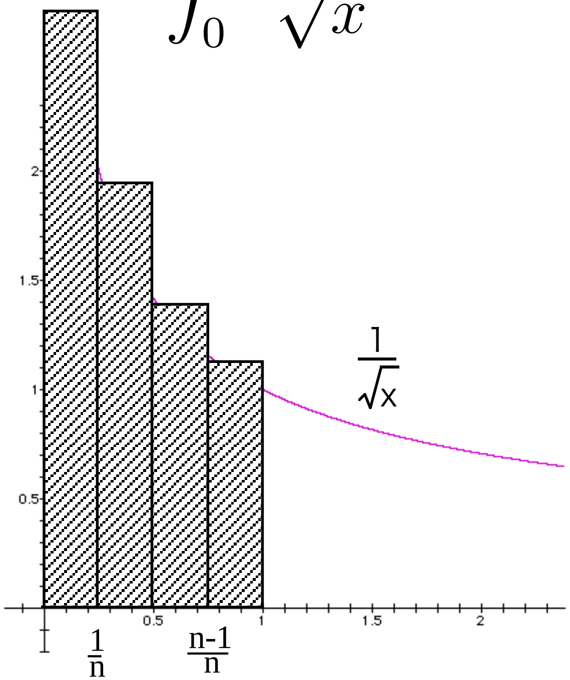
のはそのままでは定義に反する：$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$

一変数関数の広義積分(復習)

[例] 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ を考える。これを次のように計算する

のはそのままでは定義に反する：$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$

[理由] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ を定義する為の Riemann 和は発散し得る：



$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{k/n}} \\
&= \frac{1}{n}\infty + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

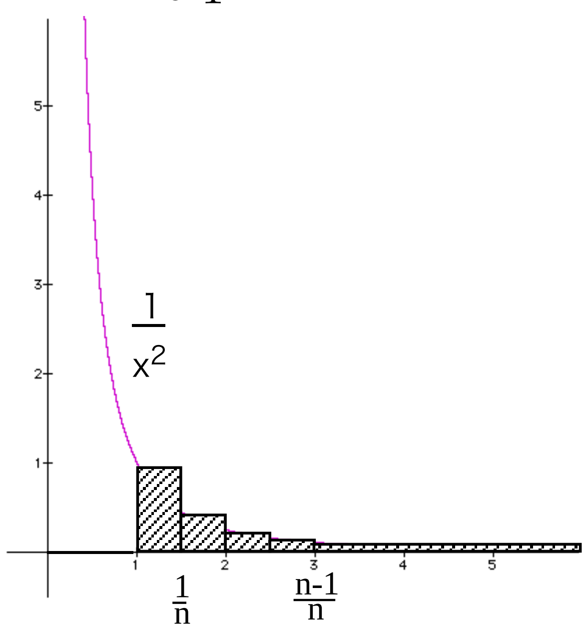
一変数関数の広義積分(復習)

[例２] 同様に定積分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ を次のように計算するのはそのままでは定義に反する：$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$

一変数関数の広義積分(復習)

[例２] 同様に定積分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ を次のように計算するのはそのままでは定義に反する：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=1$

[理由] $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ の定義の Riemann 和はやはり発散する：



$$\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{k+n}{n}\right)^2}+\infty\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+m-1}{n}\right)^2}$$

$$=+\infty$$

一変数関数の広義積分 (復習)

- 区間 $(a,b]$ (又は $[a,b)$) で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \left(\text{又は}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\right)$$

が存在するとき

一変数関数の広義積分(復習)

- 区間 $(a,b]$ (又は $[a,b)$) で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \left(又は \ \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \right)$$

が存在するとき $f(x)$ の $[a,b]$ での広義積分とよび

$$\int_a^b f(x)dx \qquad と書く。$$

一変数関数の広義積分 (復習)

- 区間 $(a,b]$ (又は $[a,b)$) で連続な関数 $f(x)$ について
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \left(又は \ \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \right)$$
が存在するとき $f(x)$ の $[a,b]$ での広義積分とよび
$$\int_a^b f(x)dx \qquad と書く。$$
- 区間 $[a,+\infty)$ (又は $(-\infty,b]$) で連続な関数 $f(x)$ について
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{a}^{R} f(x)dx \qquad \left(又は \ \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{b} f(x)dx \right)$$
が存在するとき

一変数関数の広義積分(復習)

- 区間 $(a,b]$ (又は $[a,b)$) で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \left(又は \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \right)$$

が存在するとき $f(x)$ の $[a,b]$ での広義積分とよび

$$\int_a^b f(x)dx \qquad と書く。$$

- 区間 $[a,+\infty)$ (又は $(-\infty,b]$) で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{a}^{R} f(x)dx \qquad \left(又は \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{b} f(x)dx \right)$$

が存在するとき $f(x)$ の $[a,+\infty)$ ($(-\infty,b]$) での広義積分

とよび $$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \left(又は \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \right) \qquad と書く。$$

一変数関数の広義積分 (復習)

[練習問題]

次の広義積分を (存在するならば) 計算せよ

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

一変数関数の広義積分 (復習)

[練習問題]

次の広義積分を (存在するならば) 計算せよ

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

一変数関数の広義積分 (復習)

[練習問題]

次の広義積分を (存在するならば) 計算せよ

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$

一変数関数の広義積分 (復習)

[練習問題]

次の広義積分を (存在するならば) 計算せよ

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$

一変数関数の広義積分 (復習)

[解答例]

- $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[2\sqrt{x} \right]_\varepsilon^1 = 2$

一変数関数の広義積分(復習)

[解答例]

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1$

一変数関数の広義積分 (復習)

[解答例]

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x}dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{1}{x}dx$

一変数関数の広義積分(復習)

[解答例]

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2$$
- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1$$
- $$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x}dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\log|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\left[\log x\right]_{\varepsilon_2}^1 = -\infty + \infty$$

一変数関数の広義積分(復習)

[解答例]

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2$$
- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = 1$$
- $$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x}dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{1}{x}dx$$
  $$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\log|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\left[\log x\right]_{\varepsilon_2}^1 = -\infty + \infty$$
  よってこの広義積分は存在しない。

一変数関数の広義積分(復習)

[解答例続き]

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{R_1 \to -\infty} \int_{R_1}^{0} x dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_{0}^{R_2} x dx$$

一変数関数の広義積分 (復習)

[解答例続き]

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{R_1 \to -\infty} \int_{R_1}^{0} x dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_{0}^{R_2} x dx$$

$$= \lim_{R_1 \to -\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{R_1}^{0} + \lim_{R_2 \to +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{0}^{R_1} = -\infty + \infty$$

一変数関数の広義積分(復習)

[解答例続き]

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{R_1 \to -\infty} \int_{R_1}^{0} x dx + \lim_{R_2 \to +\infty} \int_{0}^{R_2} x dx$$

$$= \lim_{R_1 \to -\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{R_1}^{0} + \lim_{R_2 \to +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{0}^{R_1} = -\infty + \infty$$

よってこの広義積分は存在しない。

多変数の広義積分 (関数の発散)

多変数の広義積分(関数の発散)

[用語]

多変数の広義積分 (関数の発散)

[用語]

平面内の有限な大きさの領域 D で定義された連続関数 $f(x, y)$ が、D 内の一点 (x_0, y_0) で $\pm\infty$ に発散しているとする。

多変数の広義積分(関数の発散)

[用語]

平面内の有限な大きさの領域 D で定義された連続関数 $f(x,y)$ が、D 内の一点 (x_0,y_0) で $\pm\infty$ に発散しているとする。

D 内の部分領域の列 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \cdots \subseteq D$ で、$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ が D から (x_0,y_0) を除いたものになる 任意の D_n の列に対し、

多変数の広義積分(関数の発散)

[用語]

平面内の有限な大きさの領域 D で定義された連続関数 $f(x,y)$ が、D 内の一点 (x_0,y_0) で $\pm\infty$ に発散しているとする。

D 内の部分領域の列 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \cdots \subseteq D$ で、$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ が D から (x_0,y_0) を除いたものになる 任意の D_n の列に対し、

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

が同じ値に収束するとき、

多変数の広義積分(関数の発散)

[用語]

平面内の有限な大きさの領域 D で定義された連続関数 $f(x,y)$ が、D 内の一点 (x_0,y_0) で $\pm\infty$ に発散しているとする。

D 内の部分領域の列 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \cdots \subseteq D$ で、$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ が D から (x_0,y_0) を除いたものになる 任意の D_n の列に対し、

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

が同じ値に収束するとき、　その値を $f(x,y)$ の D 上での広義積分とよび

$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{と書く。}$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。

多変数の広義積分(関数の発散)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。 よってこの場合は、ある一つの列 $\{D_n\}$ に対してのみ計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。 よってこの場合は、ある一つの列 $\{D_n\}$ に対してのみ計算すれば
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad \text{が求まる。}$$
- 一般に $\displaystyle \iint_D |f(x,y)|\,dxdy < +\infty$ ならば

多変数の広義積分(関数の発散)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。 よってこの場合は、ある一つの列 $\{D_n\}$ に対してのみ計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$
- 一般に $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|dxdy < +\infty$ ならば
上記と同様に、ある一組の列 $\{D_n\}$ について計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[例題]

D を $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \neq y$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[例題]

D を $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x \ne y$ で定められる領域とする。
このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$$

[解答例]

D_n を $0 \le x \le y - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \le y \le 1$、$D'_n$ を $\frac{1}{n} \le x \le 1, 0 \le y \le x - \frac{1}{n}$
を満たす領域とすると、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cup D'_n) = D$

多変数の広義積分(関数の発散)

[例題]

D を $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \neq y$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$$

[解答例]

D_n を $0 \leq x \leq y - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \leq y \leq 1$、$D_n'$ を $\frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n}$ を満たす領域とすると、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \cup D_n') = D$

$$\iint_{D_n \cup D_n'} \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}} = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left\{\int_0^{y-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{y-x}}\right\}dy + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left\{\int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{dy}{\sqrt{x-y}}\right\}dx$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[例題]

D を $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \neq y$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$$

[解答例]

D_n を $0 \leq x \leq y - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \leq y \leq 1$、$D'_n$ を $\frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n}$ を満たす領域とすると、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \cup D'_n) = D$

$$\iint_{D_n \cup D'_n} \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ \int_0^{y-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{y-x}} \right\} dy + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ \int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{dy}{\sqrt{x-y}} \right\} dx$$

$$\therefore \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n \cup D'_n} \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3n\sqrt{n}}\right) = \frac{8}{3}$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[練習問題]

D を $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \log(x^2 + y^2)\,dxdy$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[練習問題]

D を $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \log(x^2 + y^2)dxdy$$

[解答例]

D_n を $\dfrac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす領域とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

多変数の広義積分(関数の発散)

[練習問題]

D を $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \log(x^2 + y^2)dxdy$$

[解答例]

D_n を $\dfrac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす領域とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$$\iint_{D_n} \log(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\frac{1}{n}}^{1} (\log r^2) r dr \right\} d\theta$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[練習問題]

D を $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \log(x^2 + y^2)dxdy$$

[解答例]

D_n を $\dfrac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす領域とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$$\iint_{D_n} \log(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\frac{1}{n}}^{1} (\log r^2) r dr \right\} d\theta$$

$$\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to\infty} \pi \left\{ -1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 \log n \right\}$$

多変数の広義積分(関数の発散)

[練習問題]

D を $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ で定められる領域とする。このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$$

[解答例]

D_n を $\dfrac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす領域とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$$\iint_{D_n} \log(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\frac{1}{n}}^{1} (\log r^2) r dr \right\} d\theta$$

$$\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to\infty} \pi \left\{ -1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 \log n \right\}$$

$$= -\pi$$

多変数の広義積分 (無限に広がる領域)

多変数の広義積分 (無限に広がる領域)

[用語]

多変数の広義積分 (無限に広がる領域)

[用語]

平面内の無限に広がる領域 D で定義された連続関数 $f(x, y)$ を考える。

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[用語]

平面内の無限に広がる領域 D で定義された連続関数 $f(x,y)$ を考える。

D 内の有限な大きさの部分領域の列 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \cdots \subseteq D$ で、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ となる 任意の D_n の列に対し、

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[用語]

平面内の無限に広がる領域 D で定義された連続関数 $f(x,y)$ を考える。

D 内の有限な大きさの部分領域の列 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \cdots \subseteq D$ で、$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ となる 任意の D_n の列に対し、

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

が同じ値に収束するとき、

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[用語]

平面内の無限に広がる領域 D で定義された連続関数 $f(x, y)$ を考える。

D 内の有限な大きさの部分領域の列 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \cdots \subseteq D$ で、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ となる 任意の D_n の列に対し、

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dxdy$$

が同じ値に収束するとき、　その値を $f(x, y)$ の D 上での広義積分とよび

$$\iint_D f(x, y) dxdy \qquad \text{と書く。}$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。 よってこの場合は、ある一つの列 $\{D_n\}$ に対してのみ計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$

多変数の広義積分 (無限に広がる領域)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。 よってこの場合は、ある一つの列 $\{D_n\}$ に対してのみ計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$
- 一般に $\displaystyle \iint_D |f(x,y)|dxdy < +\infty$ ならば

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[定理]

- $f(x,y) \geq 0$ が D 上で 成り立つならば、部分領域の列 $\{D_n\}$ によらずに
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
は $+\infty$ を含めて一定の値になる。 よってこの場合は、ある一つの列 $\{D_n\}$ に対してのみ計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$
- 一般に $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|dxdy < +\infty$ ならば
上記と同様に、ある一組の列 $\{D_n\}$ について計算すれば
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{が求まる。}$$

多変数の広義積分 (無限に広がる領域)

[例題]

D を $0 \leq x,\ 0 \leq y$ で定められる領域 (第一象限) とすると。

このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[例題]

D を $0 \leq x,\ 0 \leq y$ で定められる領域 (第一象限) とすると。

このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq n^2$ によって定められる領域とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[例題]

D を $0 \leq x,\ 0 \leq y$ で定められる領域 (第一象限) とすると。

このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq n^2$ によって定められる領域と

すると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^n e^{-r^2} r dr \right\} d\theta$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[例題]

D を $0 \leq x,\ 0 \leq y$ で定められる領域 (第一象限) とすると。
このとき、次の積分が存在するならば、その値を求めよ。

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq n^2$ によって定められる領域とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^n e^{-r^2} r dr \right\} d\theta$$

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

多変数の広義積分 (無限に広がる領域)

[練習問題 1]
次の広義積分を求めよ：

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題１**]**
次の広義積分を求めよ：

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

[解答例**]**
D'_n を $0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、例題の

D に対し $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n = D$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題1]
次の広義積分を求めよ：

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

[解答例]
D'_n を $0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、例題の D に対し $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n = D$

$$\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}dy\right)$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題 1]
次の広義積分を求めよ：

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

[解答例]
D'_n を $0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、例題の D に対し $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n = D$

$$\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$\therefore \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題 1]
次の広義積分を求めよ：

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

[解答例]
D'_n を $0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n$ で定まる領域とすると、例題の D に対し $\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n = D$

$$\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}dy\right)$$

$$\therefore \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

例題より $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$ なので

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題 1]
次の広義積分を求めよ：

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

[解答例]
D'_n を $0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、例題の D に対し $\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n = D$

$$\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2} dy\right)$$

$$\therefore \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2$$

例題より $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4}$ なので $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \leq x,\ 1 \leq y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \leq x,\ 1 \leq y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq y \leq x \leq n$ で定まる領域、D'_n を $0 \leq x \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cup D'_n) = D$.

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \leq x,\ 1 \leq y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq y \leq x \leq n$ で定まる領域、D'_n を $0 \leq x \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cup D'_n) = D$. このとき

$$\iint_{(D_n \cup D'_n)} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \iint_{D_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy + \iint_{D'_n} \frac{-x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \leq x,\ 1 \leq y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq y \leq x \leq n$ で定まる領域、D'_n を $0 \leq x \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cup D'_n) = D$. このとき

$$\iint_{(D_n \cup D'_n)} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \iint_{D_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy + \iint_{D'_n} \frac{-x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

$$= 2\int_1^n \left(\int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \leq x,\ 1 \leq y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq y \leq x \leq n$ で定まる領域、D'_n を $0 \leq x \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \cup D'_n) = D$. 　このとき

$$\iint_{(D_n \cup D'_n)} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \iint_{D_n}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \iint_{D'_n}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

$$= 2\int_1^n \left(\int_1^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = 2\left(\frac{1}{2}\log n - \left[\tan^{-1} x\right]_1^n\right)$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \leq x,\ 1 \leq y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \leq y \leq x \leq n$ で定まる領域、D'_n を $0 \leq x \leq y \leq n$ で定まる領域とすると、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cup D'_n) = D$.　このとき

$$\iint_{(D_n \cup D'_n)} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \iint_{D_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy + \iint_{D'_n} \frac{-x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

$$= 2\int_1^n \left(\int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = 2\left(\frac{1}{2}\log n - \left[\tan^{-1} x\right]_1^n \right)$$

$$\longrightarrow +\infty (n \to \infty)$$

多変数の広義積分(無限に広がる領域)

[練習問題２]

D を $1 \le x,\ 1 \le y$ で定められる領域とするとき、次の広義積分は存在するか：

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

[解答例]

D_n を $0 \le y \le x \le n$ で定まる領域、D_n' を $0 \le x \le y \le n$ で定まる領域とすると、$\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \cup D_n') = D$.　このとき

$$\iint_{(D_n \cup D_n')} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \iint_{D_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy + \iint_{D_n'} \frac{-x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

$$= 2\int_1^n \left(\int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \right) dx = 2\left(\frac{1}{2}\log n - \left[\tan^{-1} x\right]_1^n \right)$$

$\longrightarrow +\infty (n \to \infty)$　よって、この積分は存在しない。