関数の近似と Taylor 展開

関数の近似と Taylor 展開

[微分係数と接線の方程式] 実数 x の関数 $f(x)$ の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ の定義は次の様に書き換えることが出来る。

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

関数の近似と Taylor 展開

[微分係数と接線の方程式] 実数 x の関数 $f(x)$ の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ の定義は次の様に書き換えることが出来る。

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

つまり $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$$

関数の近似と Taylor 展開

[微分係数と接線の方程式] 実数 x の関数 $f(x)$ の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ の定義は次の様に書き換えることが出来る。

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

つまり $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{x-x_0}=0$$

このことは $f(x)$ を $x=x_0$ の近くで一次関数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

で近似すると、x が x_0 に近付くとき「余り」 $R(x)$ は x の一次式より速く 0 に近付くということである。

関数の近似と Taylor 展開

[微分係数と接線の方程式] 実数 x の関数 $f(x)$ の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ の定義は次の様に書き換えることが出来る。

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

つまり $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$$

このことは $f(x)$ を $x = x_0$ の近くで一次関数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

で近似すると、x が x_0 に近付くとき「余り」 $R(x)$ は x の一次式より速く 0 に近付くということである。 よって

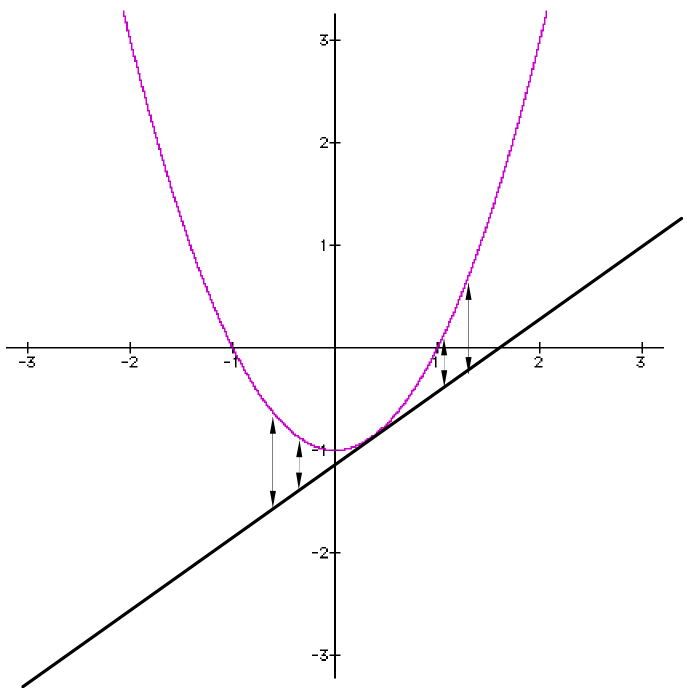
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

は $y = f(x)$ のグラフの $(x_0, f(x_0))$ での接線の方程式である。

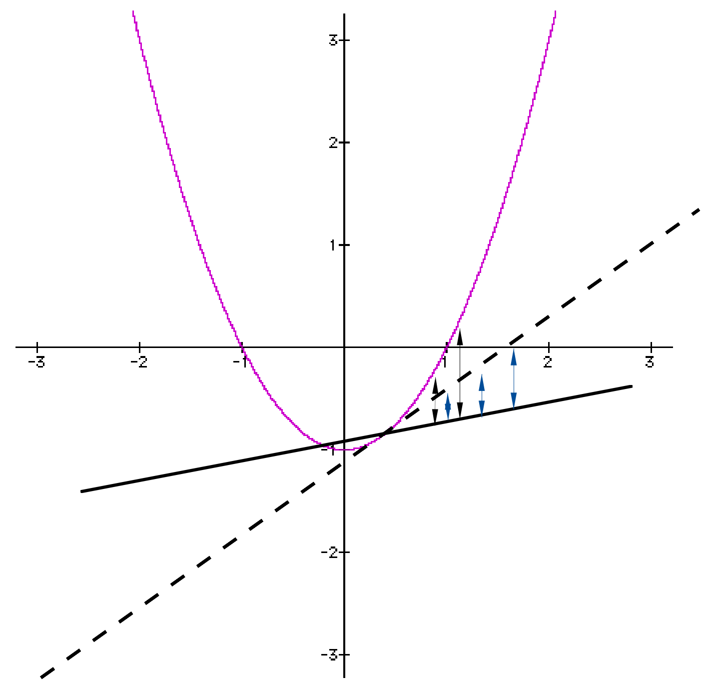
関数の近似と Taylor 展開

関数の近似と Taylor 展開

下の左図において、赤で示された関数のグラフと接戦 (実線) の距離 (黒の両矢印) は $x - x_0$ より速く小さくなる。
右図ではグラフと実線の距離は青の両矢印よりも大きく、青の矢印の長さは $x - x_0$ に比例している。



接線



接線ではない

関数の近似と Taylor 展開

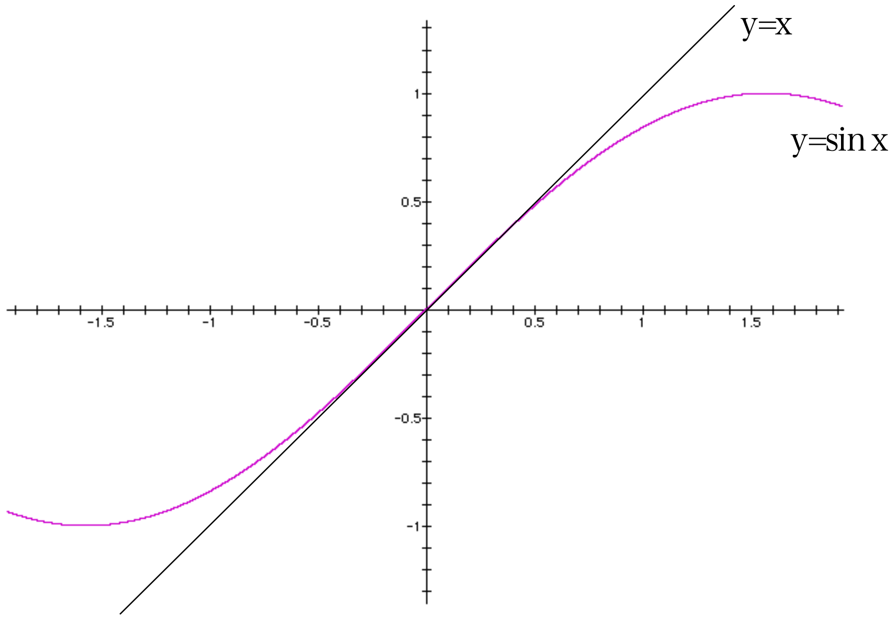
[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$

関数の近似と Taylor 展開

[例]

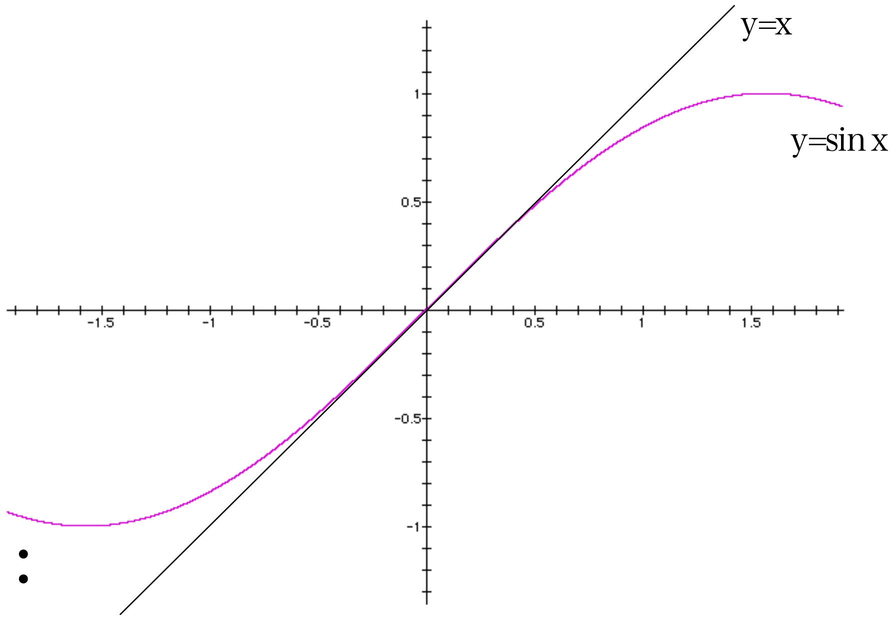
$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



関数の近似と Taylor 展開

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$

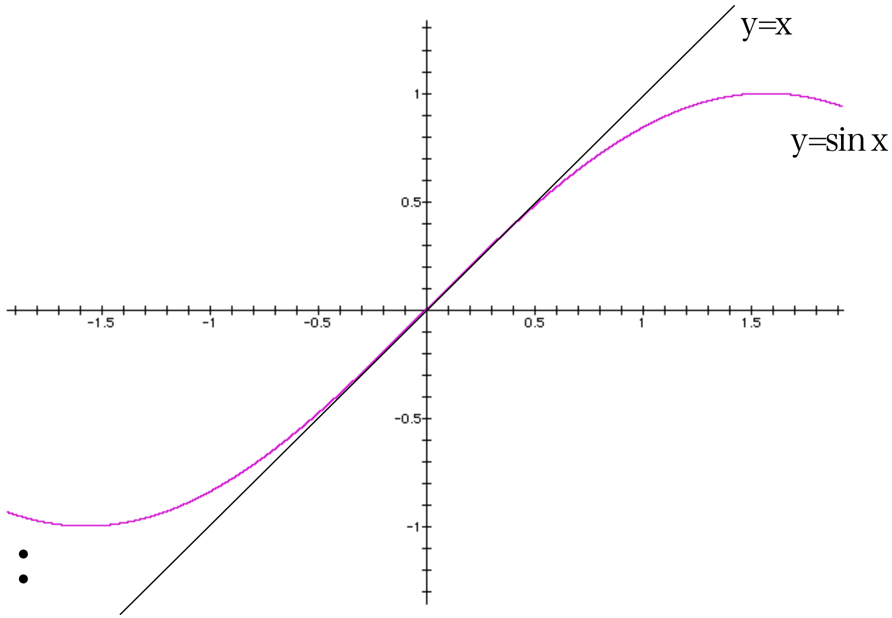


$\sin x - x$ の値：

関数の近似と Taylor 展開

[例]

$y=\sin x$ のグラフの $x=0$ での接線の方程式は $y=x$



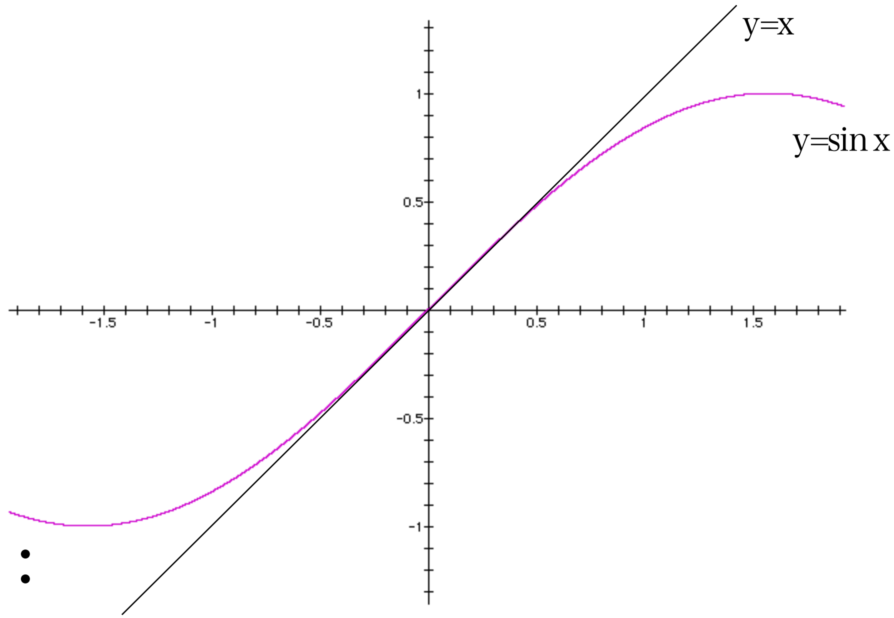
$\sin x - x$ の値：

$x=1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

関数の近似と Taylor 展開

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

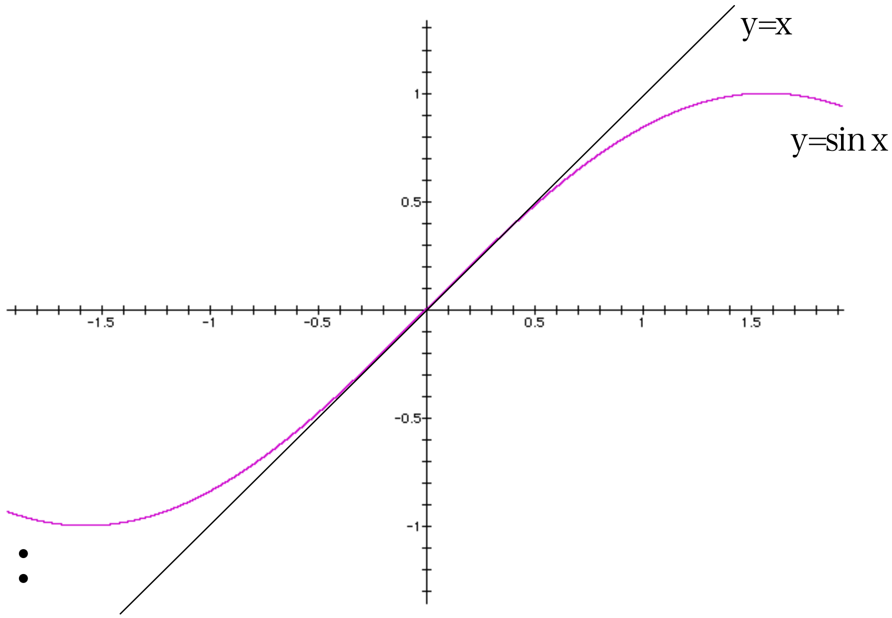
$x = 1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

$x = 0.1$：$\sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$

関数の近似と Taylor 展開

[例]

$y=\sin x$ のグラフの $x=0$ での接線の方程式は $y=x$



$\sin x - x$ の値：

$x=1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

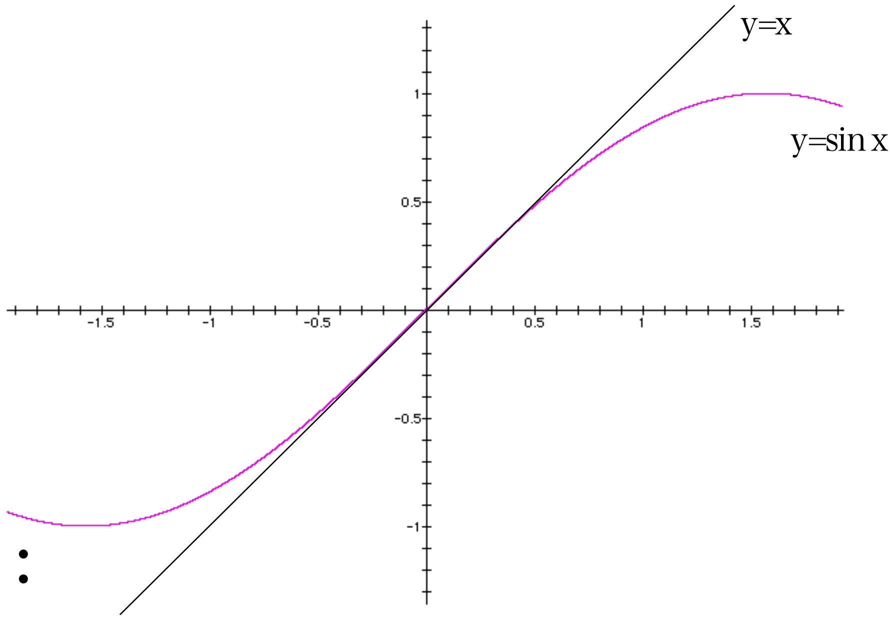
$x=0.1$：$\sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$

$x=0.01$：$\sin 0.01 - 0.01 = 0.00999983 - 0.01 = -0.00000017$

関数の近似と Taylor 展開

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

$x = 1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

$x = 0.1$：$\sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$

$x = 0.01$：$\sin 0.01 - 0.01 = 0.00999983 - 0.01 = -0.00000017$

と、x が 0 に近づくよりはるかに「速く」 0 に近づく。

関数の近似と Taylor 展開

関数の近似と Taylor 展開

[多項式による関数の近似] 同様に $n-1$ 次の多項式で

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

とおいて

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

が成り立つものが存在するとする。

関数の近似と Taylor 展開

[多項式による関数の近似] 同様に $n-1$ 次の多項式で

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

とおいて

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

が成り立つものが存在するとする。
このとき多項式

$$f(x_0) + a_1(x-x_0) + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$$

は $f(x)$ を x_0 の近くでもっとも良く近似している $n-1$ 次多項式であるといえる。

関数の近似と Taylor 展開

[係数の求め方] $f(x)$ が $n-1$ 次多項式の場合は $(x-x_0)$ で括ることによって

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$$

と書ける。

関数の近似と Taylor 展開

[係数の求め方] $f(x)$ が $n-1$ 次多項式の場合は $(x-x_0)$ で括ることによって

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$$

と書ける。

このとき $f(x)$ を最も良く近似している $n-1$ 次多項式は当然 $f(x)$ そのものである。従って $f(x)$ を上のように書いたときの $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ を求めれば良い。

関数の近似と Taylor 展開

[係数の求め方] $f(x)$ が $n-1$ 次多項式の場合は $(x-x_0)$ で括ることによって

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$$

と書ける。

このとき $f(x)$ を最も良く近似している $n-1$ 次多項式は当然 $f(x)$ そのものである。従って $f(x)$ を上のように書いたときの $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ を求めれば良い。

具体的には、

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \ldots, a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$$

である。**(**但し、$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-2) \cdot (n-1)$ は $n-1$ の階乗、$f^{(n-1)}$ は f の $n-1$ 階微分を表す。**)**

関数の近似と Taylor 展開

関数の近似と Taylor 展開

一般の関数についても

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

と書くと、

関数の近似と Taylor 展開

一般の関数についても

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

と書くと、「余り」 $R_n(x)$ は

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

を満たし、x が x_0 に近付くとき $(x - x_0)^{n-1}$ より速く 0 に近付き、上式の多項式部分は $f(x)$ の x_0 の近くでの最も良い $n-1$ 次多項式による近似になっている。

関数の近似と Taylor 展開

一般の関数についても

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x)$$

と書くと、「余り」 $R_n(x)$ は

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

を満たし、x が x_0 に近付くとき $(x-x_0)^{n-1}$ より速く 0 に近付き、上式の多項式部分は $f(x)$ の x_0 の近くでの最も良い $n-1$ 次多項式による近似になっている。

上記の $f(x)$ の変形を Taylor 展開とよぶ。

特に $x_0 = 0$ のときの Taylor 展開を Maclaurin 展開とよぶ。

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

関数の近似と Taylor 展開

「余り」 $R_n(x)$ は剰余項とよばれ次の様に書かれる。

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n(x)(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (\ 0<\theta_n(x)<1\ )$$

(証明には平均値の定理を用いる。詳細は平均値の定理のときにやる。)

関数の近似と Taylor 展開

「余り」 $R_n(x)$ は剰余項とよばれ次の様に書かれる。

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n(x)(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (\ 0<\theta_n(x)<1\ )$$

(証明には平均値の定理を用いる。詳細は平均値の定理のときにやる。)

特に $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つときには、Taylor 展開は無限項まで出来る。

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

関数の近似と Taylor 展開

「余り」 $R_n(x)$ は剰余項とよばれ次の様に書かれる。

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n(x)(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (\ 0<\theta_n(x)<1\ )$$

(証明には平均値の定理を用いる。詳細は平均値の定理のときにやる。)

特に $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ が成り立つときには、Taylor 展開は無限項まで出来る。

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

[用語] x の関数 $h(x)$ が $\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{(x-x_0)^n}=0$ を満たすとき、$h(x)$ は $x\to x_0$ のとき $(x-x_0)^n$ より高位の無限小であるといい、$h(x)=o((x-x_0)^n)$ とあらわす。従って、$R_n(x)=o((x-x_0)^{n-1})$

関数の近似と Taylor 展開

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = e^x$ より

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \ldots, (\log(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ldots$ より

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \ldots, (\log(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ldots$ より

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n$$

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \ldots, (\log(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ldots$ より

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

関数の近似と Taylor 展開

[練習問題] e^x、 $\log(x+1)$、$\sin x$、$\cos x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答]

$(e^x)' = (e^x)'' = \cdots = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \ldots, (\log(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ldots$ より

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}$$

関数の近似と Taylor 展開

関数の近似と Taylor 展開

[注意]

これらの関数は、無限項まで展開出来る。

関数の近似と Taylor 展開

[注意]

これらの関数は、無限項まで展開出来る。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開

[注意]

これらの関数は、無限項まで展開出来る。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

関数の近似と Taylor 展開

[注意]

これらの関数は、無限項まで展開出来る。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開

[注意]

これらの関数は、無限項まで展開出来る。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

宿題

問題集

セクション 34(67 ページ)〜36(72 ページ)