冪級数 II

冪級数 II

[背景] 関数が初めから冪級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ で与えられているとき、この級数が収束する範囲を知りたい。

冪級数 II

[背景] 関数が初めから冪級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ で与えられているとき、この級数が収束する範囲を知りたい。

[例題] 微分方程式

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$$

(Legendre の微分方程式とよばれる応用上重要な微分方程式)

の解が $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形をしていると仮定して $y=y(x)$ を求めよ。

冪級数 II

[解答例] $y' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ を方程式に代入して x の次数で整理すると、次の関係式が得られる。

$2a_2 + 2a_0 = 0,$

$(3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x = 0,$

$(4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2 = 0,$

$\ldots$

$\{((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2 \cdot n a_n + 2a_n)x^n = 0\}$

冪級数 II

[解答例] $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ を方程式に代入して x の次数で整理すると、次の関係式が得られる。

$2a_2 + 2a_0 = 0,$

$(3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x = 0,$

$(4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2 = 0,$

$\cdots$

$\{((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2 \cdot n a_n + 2a_n)x^n = 0\}$

これより

$$y = a_1 x + a_0 \left(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 - \cdots\right)$$

が得られる。(a_0, a_1 は任意の定数。)

冪級数 II

[問題点]

(1) この $y = y(x)$ は収束するか？(本当に関数を定めるか？)

(2)$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ は正しいか？

冪級数 II

[問題点]

(1) この $y = y(x)$ は収束するか？(本当に関数を定めるか？)

(2)$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ は正しいか？

[事実]

(1) この y は $-1 < x < 1$ で収束する。

幂級数II

[問題点]

(1) この $y=y(x)$ は収束するか？(本当に関数を定めるか？)

(2)$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ は正しいか？

[事実]

(1) この y は $-1<x<1$ で収束する。

(2) 次の定理より正しい

[定理] (項別微分、項別積分)

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-R<x<R$ で収束するならば

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ かつ } \int_0^x y(\xi)d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

が成り立ち、どちらも $-R<x<R$ で収束する。

冪級数 II

[定義] 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-R < x < R$ で収束し $|x| > R$ では発散するとき ($x = \pm R$ ではどちらでもよい) R をこの冪級数の収束半径とよぶ。

冪級数 II

[定義] 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-R < x < R$ で収束し $|x| > R$ では発散するとき ($x = \pm R$ ではどちらでもよい) R をこの冪級数の収束半径とよぶ。

全ての x でこの冪級数が収束するときは、収束半径は無限大であるといい、$x = 0$ 以外ではこの冪級数が発散するときは、収束半径は零であるという。

冪級数II

[定義] 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-R < x < R$ で収束し $|x| > R$ では発散するとき ($x = \pm R$ ではどちらでもよい) R をこの冪級数の収束半径とよぶ。

全ての x でこの冪級数が収束するときは、収束半径は無限大であるといい、$x = 0$ 以外ではこの冪級数が発散するときは、収束半径は零であるという。

[定理] 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ ならば、収束半径は $\dfrac{1}{\rho}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ ならば、収束半径は $\dfrac{1}{\rho}$

冪級数 II

$\because$

(1) $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x|}{|a_n|} = \rho|x| < 1$

幂級数 II

$\because$

(1) $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x|}{|a_n|} = \rho|x| < 1$

従って、充分大きい n については $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の各項は、収束する等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho|x|)^n$ の各項と同程度なので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する。

冪級数II

$\because$

(1) $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x|}{|a_n|} = \rho|x| < 1$

従って、充分大きい n については $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の各項は、収束する等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho|x|)^n$ の各項と同程度なので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する。

$|x| > \dfrac{1}{\rho}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の各項の大きさは 1 より大きいので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない。

冪級数II

$\because$

(1) $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x|}{|a_n|} = \rho|x| < 1$

従って、充分大きい n については $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の各項は、収束する等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho|x|)^n$ の各項と同程度なので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する。

$|x| > \dfrac{1}{\rho}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の各項の大きさは 1 より大きいので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = \rho|x|$ について (1) と同様の議論をすればよい。

冪級数 II

[練習問題]

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

の収束半径を求めよ。

冪級数 II

[練習問題]

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

の収束半径を求めよ。

[解答]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

より収束半径は 1。

冪級数 II

[おまけ]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が存在する} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

冪級数 II

[おまけ]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が存在する} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

逆は成り立たない。$\left(\text{反例} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \right)$

冪級数 II

[おまけ]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

  逆は成り立たない。$\left(\text{反例} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \right)$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{が存在する}$$ *i.e.* 絶対 (値) 収束する

冪級数 II

[おまけ]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

  逆は成り立たない。$\left(\text{反例} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{が存在する}$$ *i.e.* 絶対 (値) 収束する

  $$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する}$$

幂級数 II

[おまけ]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

  逆は成り立たない。$\left(\text{反例} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \right)$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{が存在する}$$ *i.e.* 絶対 (値) 収束する

  $$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ が収束するが絶対収束しない。

冪級数 II

[おまけ]

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

  逆は成り立たない。$\left(\text{反例} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \right)$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{が存在する}$$ *i.e.* 絶対 (値) 収束する

  $$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が存在する}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が収束するが絶対収束しない。}$$

  $\Longrightarrow$ 収束先は和の順序に依る。

宿題

セクション 37 (73～74 ページ)