

級数

級数

[定義] 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ について、

極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ が存在するとき、これを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き

無限級数 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ の和とよぶ。

極限をとる前の $\sum_{n=1}^N a_n$ をこの級数の部分和とよぶ。

級数

[定義] 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ について、

極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ が存在するとき、これを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き

無限級数 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ の和とよぶ。

極限をとる前の $\sum_{n=1}^N a_n$ をこの級数の部分和とよぶ。

[注意] 部分和 $\sum_{n=1}^N a_n$ を考えずにいきなり $a_1 + \dots + a_n + \dots$ を考えることはできない。(意味がはっきりしない。)

級数

[定義] 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ について、

極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ が存在するとき、これを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き

無限級数 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ の和とよぶ。

極限をとる前の $\sum_{n=1}^N a_n$ をこの級数の部分和とよぶ。

[注意] 部分和 $\sum_{n=1}^N a_n$ を考えずにいきなり $a_1 + \dots + a_n + \dots$

を考えることはできない。(意味がはっきりしない。)

例えば $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$ は

級数

[定義] 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ について、

極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ が存在するとき、これを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き

無限級数 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ の和とよぶ。

極限をとる前の $\sum_{n=1}^N a_n$ をこの級数の部分和とよぶ。

[注意] 部分和 $\sum_{n=1}^N a_n$ を考えずにいきなり $a_1 + \dots + a_n + \dots$

を考えることはできない。(意味がはっきりしない。)

例えば $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$ は

$1, 1 - 1 + 1, 1 - 1 + 1 - 1 + 1, \dots$ と足していけば 1 になるが、

級数

[定義] 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ について、

極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ が存在するとき、これを $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き

無限級数 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ の和とよぶ。

極限をとる前の $\sum_{n=1}^N a_n$ をこの級数の部分和とよぶ。

[注意] 部分和 $\sum_{n=1}^N a_n$ を考えずにいきなり $a_1 + \dots + a_n + \dots$

を考えることはできない。(意味がはっきりしない。)

例えば $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$ は

$1, 1 - 1 + 1, 1 - 1 + 1 - 1 + 1, \dots$ と足していけば 1 になるが、

$1 - 1, 1 - 1 + 1 - 1, 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1, \dots$ と足していくと

0 になる。(値が定まらない。) 実際、部分和は振動している。

級数

[例]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \dots\dots\dots = 1\right)$$

としてはいけない！

級数

[例]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \dots\dots\dots = 1\right.$$

としてはいけない！

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

としなければならない！

冪級数

冪級数

[定義] 変数 x を含む

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

の形の級数を冪級数または整級数とよぶ。

冪級数

[定義] 変数 x を含む

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

の形の級数を冪級数または整級数とよぶ。

[例] 一変数関数 $f(x)$ が x_0 の近くで無限回微分でき、その Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_N(x)$$

において $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x) = 0$ が成り立つとする。

冪級数

[定義] 変数 x を含む

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots$$

の形の級数を冪級数または整級数とよぶ。

[例] 一変数関数 $f(x)$ が x_0 の近くで無限回微分でき、その Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_N(x)$$

において $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x) = 0$ が成り立つとする。

このとき $f(x)$ は x_0 の近くで冪級数に展開される。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

冪級数

- $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

冪級数

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$

冪級数

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots$

冪級数

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots$

冪級数

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (|x| < 1)$

冪級数

[定理] 冪級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ について以下が成り立つ。

冪級数

[定理] 冪級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ について以下が成り立つ。

$$(1) \quad c \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) x^n \quad (c \text{ は定数})$$

冪級数

[定理] 冪級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

について以下が成り立つ。

$$(1) \quad c \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) x^n \quad (c \text{ は定数})$$

$$(2) \quad f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

冪級数

[定理] 冪級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ について以下が成り立つ。

$$(1) \quad c \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) x^n \quad (c \text{ は定数})$$

$$(2) \quad f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$(3) \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) x^n$$

冪級数

[定理] 冪級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ について以下が成り立つ。

$$(1) \quad c \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) x^n \quad (c \text{ は定数})$$

$$(2) \quad f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$(3) \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) x^n$$

$$(4) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n$$

冪級数

[練習問題]

(1) $\frac{1}{1+x^2}$ の Maclaurin 展開を求めよ。

(2) $\frac{1}{1+\sin x}$ の Maclaurin 展開を求めよ。

冪級数

[練習問題]

(1) $\frac{1}{1+x^2}$ の Maclaurin 展開を求めよ。

(2) $\frac{1}{1+\sin x}$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答例]

$$(1) \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

冪級数

[練習問題]

(1) $\frac{1}{1+x^2}$ の Maclaurin 展開を求めよ。

(2) $\frac{1}{1+\sin x}$ の Maclaurin 展開を求めよ。

[解答例]

$$(1) \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

$$(2) \frac{1}{1+\sin x} = 1 - x + x^2 + \left(\frac{1}{3!} - 1\right)x^3 + \left(-\frac{2}{3!} + 1\right)x^4 + \dots$$

宿題

問題集

セクション 9 (17 ページ～18)