多変数関数の Taylor 展開

多変数関数の Taylor 展開

[全微分可能な多変数関数の一次式による近似] x-y 座標を定められた平面で定義された関数 $f(x,y)$ が全微分可能、即ち

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+R(x,y)$$

多変数関数の Taylor 展開

[全微分可能な多変数関数の一次式による近似] x-y 座標を定められた平面で定義された関数 $f(x,y)$ が全微分可能、即ち

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+R(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

が成り立つならば、

多変数関数の Taylor 展開

[全微分可能な多変数関数の一次式による近似] x-y 座標を定められた平面で定義された関数 $f(x,y)$ が全微分可能、即ち

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+R(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

が成り立つならば、 $f(x,y)$ を (x_0,y_0) の近くで一次関数

$$f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

で近似できた。

多変数関数の Taylor 展開

[全微分可能な多変数関数の一次式による近似] x-y 座標を定められた平面で定義された関数 $f(x,y)$ が全微分可能、即ち

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+R(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

が成り立つならば、 $f(x,y)$ を (x_0,y_0) の近くで一次関数

$$f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

で近似できた。

同様に n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が $(x_{10},\ldots,x_{n0})$ で全微分可能ならば $f(x_1,\ldots,x_n)$ は $(x_{10},\ldots,x_{n0})$ のまわりで一次関数

$$f(x_{10},\ldots,x_{n0})+f_{x_1}(x_{10},\ldots,x_{n0})(x_1-x_{10})+\cdots+f_{x_n}(x_{10},\ldots,x_{n0})(x_n-x_{n0})$$

で近似できる。

多変数関数の Taylor 展開

多変数関数の Taylor 展開

[多項式による多変数関数の近似] 同様に、二次の多項式で

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0)$$
$$+a_2(x-x_0)^2 + c_2(x-x_0)(y-y_0) + b_2(y-y_0)^2 + R_3(x,y)$$

とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_3(x,y)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$$

が成り立つものが存在するとする。

多変数関数の Taylor 展開

[多項式による多変数関数の近似] 同様に、二次の多項式で

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0)$$
$$+a_2(x-x_0)^2 + c_2(x-x_0)(y-y_0) + b_2(y-y_0)^2 + R_3(x,y)$$

とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_3(x,y)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$$

が成り立つものが存在するとする。

このとき多項式

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0)$$
$$+a_2(x-x_0)^2 + c_2(x-x_0)(y-y_0) + b_2(y-y_0)^2$$

は、$f(x,y)$ を (x_0,y_0) の近くでもっとも良く近似している二次多項式であると考えられる。

多変数関数の Taylor 展開

更に一般に $n-1$ 次の多項式で

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} C_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j + R_n(x,y)$$

とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_n(x,y)}{\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\}^{n-1}} = 0$$

が成り立つものが存在するとする。

多変数関数の Taylor 展開

更に一般に $n-1$ 次の多項式で

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} C_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j + R_n(x,y)$$

とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_n(x,y)}{\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\}^{n-1}} = 0$$

が成り立つものが存在するとする。
このとき多項式

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} C_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

は、$f(x,y)$ を (x_0,y_0) の近くでもっとも良く近似している $n-1$ 次多項式であると考えられる。

多変数関数の Taylor 展開

[係数の求め方] $f(x,y)$ が $n-1$ 次多項式の場合は $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ で括ることによって

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} C_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

と書ける。

多変数関数の Taylor 展開

[係数の求め方] $f(x,y)$ が $n-1$ 次多項式の場合は $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ で括ることによって

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} C_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

と書ける。

このとき $f(x,y)$ を最も良く近似している $n-1$ 次多項式は当然 $f(x,y)$ そのものである。従って $f(x)$ を上のように書いたときの $C_{i,j}$ を求めれば良い。

多変数関数の Taylor 展開

[係数の求め方] $f(x,y)$ が $n-1$ 次多項式の場合は $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ で括ることによって

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} C_{i,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

と書ける。
このとき $f(x,y)$ を最も良く近似している $n-1$ 次多項式は当然 $f(x,y)$ そのものである。従って $f(x)$ を上のように書いたときの $C_{i,j}$ を求めれば良い。
具体的には、

$$C_{i,j} = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$$

である。(但し、$0! = 1$ とする。)

多変数関数の Taylor 展開

[練習問題] 実際に $C_{i,j} = \dfrac{1}{i!j!}\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$ となることを $f(x,y)$ が三次式の場合について確かめよ。

多変数関数の Taylor 展開

n 階までの偏導関数が存在して連続な二変数関数について

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} (x-x_0)^i (y-y_0)^j + R_n(x,y)$$

と書くと、

多変数関数の Taylor 展開

n 階までの偏導関数が存在して連続な二変数関数について

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} (x-x_0)^i (y-y_0)^j + R_n(x,y)$$

と書くと、「余り」 $R_n(x)$ は

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_n(x,y)}{\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\}^{n-1}} = 0$$

を満たし、この多項式部分は $f(x,y)$ の (x_0,y_0) の近くでの最も良い $n-1$ 次多項式による近似になっている。

多変数関数の Taylor 展開

n 階までの偏導関数が存在して連続な二変数関数について

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i+j=1}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x-x_0)^i (y-y_0)^j + R_n(x,y)$$

と書くと、「余り」 $R_n(x)$ は

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_n(x,y)}{\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\}^{n-1}} = 0$$

を満たし、この多項式部分は $f(x,y)$ の (x_0,y_0) の近くでの最も良い $n-1$ 次多項式による近似になっている。

上記の $f(x,y)$ の変形を Taylor 展開とよぶ。

特に $(x_0,y_0) = (0,0)$ のときの Taylor 展開を Maclaurin 展開とよぶ。

$$f(x,y) = f(0,0) \ + \sum_{i+j=1}^{n-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} x^i y^j + R_n(x,y)$$

多変数関数の Taylor 展開

「余り」 $R_n(x)$ は剰余項とよばれ次の様に書かれる。

$$R_n(x,y) =$$

$$\sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0+\theta_n(x-x_0), y_0+\theta_n(y-y_0)) \cdot (x-x_0)^i \cdot (y-y_0)^j$$

$$(\ 0 < \theta_n = \theta_n(x,y) < 1\ )$$

多変数関数の Taylor 展開

「余り」 $R_n(x)$ は剰余項とよばれ次の様に書かれる。

$$R_n(x,y) = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0+\theta_n(x-x_0), y_0+\theta_n(y-y_0)) \cdot (x-x_0)^i \cdot (y-y_0)^j$$

$$(\ 0 < \theta_n = \theta_n(x,y) < 1\ )$$

n 階偏導関数まで存在して連続な多変数関数 $f(x_1,\ldots,x_m)$ についても同様の公式が成り立つ。

多変数関数の Taylor 展開

「余り」 $R_n(x)$ は剰余項とよばれ次の様に書かれる。

$$R_n(x,y) = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0+\theta_n(x-x_0), y_0+\theta_n(y-y_0)) \cdot (x-x_0)^i \cdot (y-y_0)^j$$

$$(\ 0 < \theta_n = \theta_n(x,y) < 1 \ )$$

n 階偏導関数まで存在して連続な多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_m)$ についても同様の公式が成り立つ。

[練習問題] t の一変数関数 $F(t) = f\,(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))$ を Maclaurin 展開して $t=1$ と置くことにより、二変数の Taylor 展開の公式を証明せよ。(前記の仮定の下では n 回までの偏微分の順序は交換できる。)

多変数関数の Taylor 展開

[練習問題] 三階偏導関数が存在して連続な二変数関数 $f(x,y)$ について $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ が成り立つとする。このとき次が成り立つことを Taylor 展開を用いて示せ。

(1) $\{f_{xy}(x_0,y_0)\}^2 - f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) < 0$ のとき、
$f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ ならば $f(x,y)$ は (x_0,y_0) で極小値をとり、
$f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ ならば $f(x,y)$ は (x_0,y_0) で極大値をとる。

(2) $\{f_{xy}(x_0,y_0)\}^2 - f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) > 0$ のときは
$f(x_0,y_0)$ は極値ではない 。

宿題

セクション 77〜79 (153 ページ〜158 ページ)