多変数関数と偏導関数

多変数関数と偏導関数

二変数関数 $f(x,y)$ について各点 (x,y) において偏微分係数を考えることによって決まる二変数関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を $f(x,y)$ の x 又は y による偏導関数とよぶ。
$f_x(x,y), f_y(x,y)$ とも書く。

多変数関数と偏導関数

二変数関数 $f(x, y)$ について各点 (x, y) において偏微分係数を考えることによって決まる二変数関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を $f(x, y)$ の x 又は y による偏導関数とよぶ。
$f_x(x, y), f_y(x, y)$ とも書く。

三変数以上の多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ についても同様に偏微分係数と偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

を考えることが出来る。$f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ 等と書くこともある。

多変数関数と偏導関数

二変数関数 $f(x, y)$ について各点 (x, y) において偏微分係数を考えることによって決まる二変数関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を $f(x, y)$ の x 又は y による偏導関数とよぶ。

$f_x(x, y), f_y(x, y)$ とも書く。

三変数以上の多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ についても同様に偏微分係数と偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

を考えることが出来る。$f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ 等と書くこともある。

[注意] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ が存在しても f が (x_0, y_0) で全微分可能とは限らない。(詳細は適当な教科書参照。)

合成関数の偏微分

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な二変数関数 $f(x,y)$ と微分可能な一変数関数 $x(t), y(t)$ の合成関数 $f(x(t), y(t))$ について次が成り立つ。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な二変数関数 $f(x,y)$ と微分可能な一変数関数 $x(t), y(t)$ の合成関数 $f(x(t), y(t))$ について次が成り立つ。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

[証明]

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t)) = f(x(t_0), y(t_0)) &+ f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot (x(t) - x(t_0)) \\ &+ f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot (y(t) - y(t_0)) + R(x(t), y(t)) \end{aligned}$$ より

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な二変数関数 $f(x,y)$ と微分可能な一変数関数 $x(t), y(t)$ の合成関数 $f(x(t),y(t))$ について次が成り立つ。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

[証明]

$$f(x(t),y(t)) = f(x(t_0),y(t_0)) + f_x(x(t_0),y(t_0))\cdot(x(t)-x(t_0))$$
$$+f_y(x(t_0),y(t_0))\cdot(y(t)-y(t_0)) + R\,(x(t),y(t))$$ より

$$\frac{f(x(t),y(t))-f(x(t_0),y(t_0))}{t-t_0}$$
$$= f_x(x(t_0),y(t_0))\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + f_y(x(t_0),y(t_0))\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} + \frac{R(x(t),y(t))}{t-t_0}$$ 但し

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な二変数関数 $f(x,y)$ と微分可能な一変数関数 $x(t), y(t)$ の合成関数 $f(x(t), y(t))$ について次が成り立つ。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

[証明]

$$f(x(t),y(t)) = f(x(t_0),y(t_0)) + f_x(x(t_0),y(t_0))\cdot(x(t)-x(t_0))$$
$$+f_y(x(t_0),y(t_0))\cdot(y(t)-y(t_0)) + R\,(x(t),y(t)) \quad \text{より}$$

$$\frac{f(x(t),y(t))-f(x(t_0),y(t_0))}{t-t_0}$$
$$= f_x(x(t_0),y(t_0))\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + f_y(x(t_0),y(t_0))\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} + \frac{R(x(t),y(t))}{t-t_0} \quad \text{但し}$$

$$\frac{R(x(t),y(t))}{t-t_0} = \frac{R(x(t),y(t))}{\sqrt{\{x(t)-x(t_0)\}^2+\{y(t)-y(t_0)\}^2}}\cdot\frac{\sqrt{\{x(t)-x(t_0)\}^2+\{y(t)-y(t_0)\}^2}}{t-t_0} =$$

$$\frac{R(x(t),y(t))}{\sqrt{\{x(t)-x(t_0)\}^2+\{y(t)-y(t_0)\}^2}}\cdot\frac{\sqrt{\{x'(t_0)(t-t_0)+R_1(t)\}^2+\{y'(t_0)(t-t_0)+R_2(t)\}^2}}{t-t_0}$$

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ と微分可能な一変数関数 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ の合成関数 $f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ について $f' = f_{x_1} \cdot x_1' + \cdots + f_{x_n} \cdot x_n'$ が成り立つ。

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ と微分可能な一変数関数 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ の合成関数 $f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ について $f' = f_{x_1} \cdot x_1' + \cdots + f_{x_n} \cdot x_n'$ が成り立つ。

[応用問題] 全微分可能な二変数関数 $f(x, y)$ と偏微分可能な二変数関数 $x(u, v), y(u, v)$ の合成関数 $f(x(u, v), y(u, v))$ について次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

合成関数の偏微分

[定理] 全微分可能な多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ と微分可能な一変数関数 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ の合成関数 $f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ についてて $f' = f_{x_1} \cdot x_1' + \cdots + f_{x_n} \cdot x_n'$ が成り立つ。

[応用問題] 全微分可能な二変数関数 $f(x, y)$ と偏微分可能な二変数関数 $x(u, v), y(u, v)$ の合成関数 $f(x(u, v), y(u, v))$ について次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

全微分可能な多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_m)$ と偏微分可能な多変数関数 $x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_m(y_1, \ldots, y_n)$ の合成関数 $f(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_m(y_1, \ldots, y_n))$ について次を示せ。

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial y_i}$$

合成関数の偏微分

合成関数の偏微分

[定理] 微分可能な一変数関数 $f(x)$ と偏微分可能な二変数関数 $x(u,v)$ の合成関数 $f(x(u,v))$ について次が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

合成関数の偏微分

[定理] 微分可能な一変数関数 $f(x)$ と偏微分可能な二変数関数 $x(u,v)$ の合成関数 $f(x(u,v))$ について次が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

微分可能な一変数関数 $f(x)$ と微分可能な多変数関数 $x(y_1,\ldots,y_n)$ の合成関数 $f(x(y_1,\ldots,y_n))$ について次が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial y_i}$$

方向微分

方向微分

[定義] $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ を平面の単位ベクトルとする。点 (x, y) で全微分可能な平面上の関数 $f(x, y)$ について

$$D_{\mathbf{n}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

方向微分

[定義] $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ を平面の単位ベクトルとする。点 (x, y) で

全微分可能な平面上の関数 $f(x, y)$ について

$$D_{\mathbf{n}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

方向微分

[定義] $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ を平面の単位ベクトルとする。点 (x, y) で全微分可能な平面上の関数 $f(x, y)$ について

$$D_{\mathbf{n}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

を $f(x, y)$ の $\mathbf{n}$ 方向への方向微分とよぶ。$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ とも表す。

方向微分

[定義] $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ を平面の単位ベクトルとする。点 (x, y) で全微分可能な平面上の関数 $f(x, y)$ について

$$D_{\mathbf{n}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

を $f(x, y)$ の $\mathbf{n}$ 方向への方向微分とよぶ。$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ とも表す。

(f_x, f_y) を勾配ベクトルとよび $\mathrm{grad} f$ で表す。

方向微分

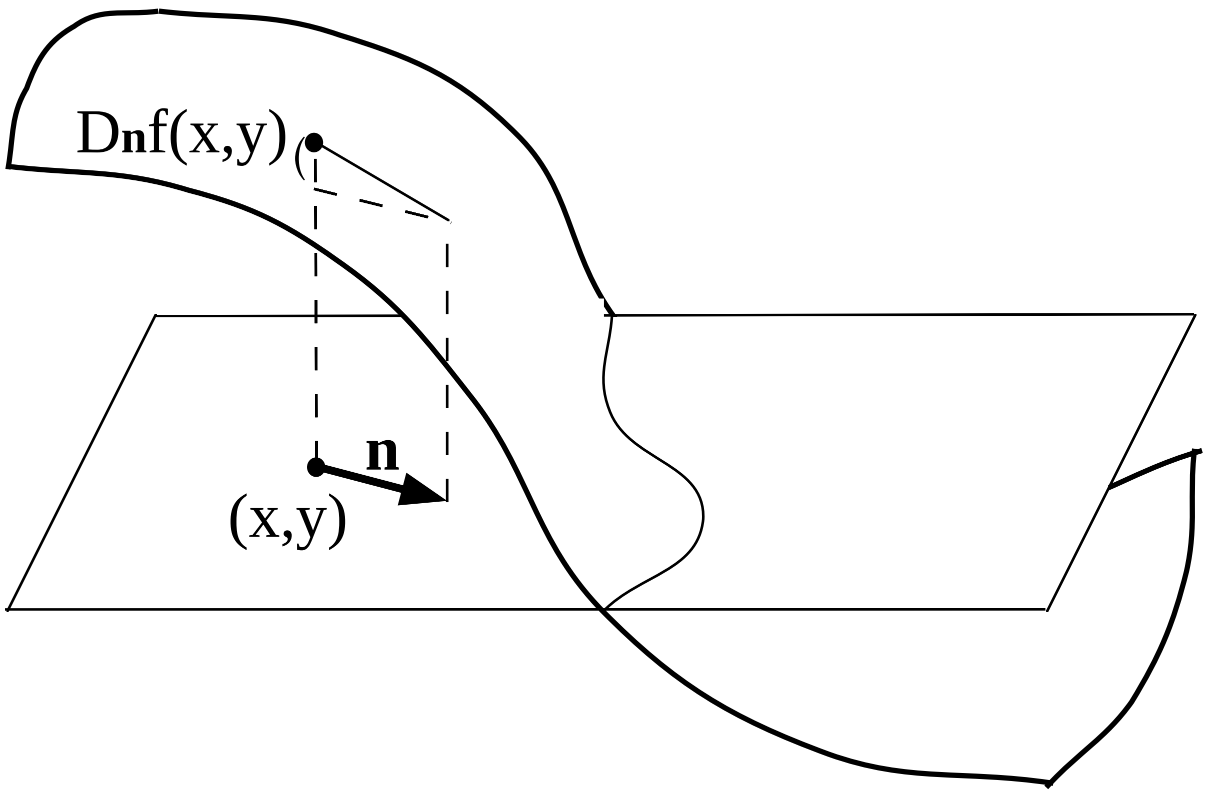
[定義] $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ を平面の単位ベクトルとする。点 (x, y) で全微分可能な平面上の関数 $f(x, y)$ について

$$D_{\mathbf{n}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

を $f(x, y)$ の $\mathbf{n}$ 方向への方向微分とよぶ。$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ とも表す。
(f_x, f_y) を勾配ベクトルとよび $\mathrm{grad} f$ で表す。
$D_{\mathbf{n}} f(x, y)$ は $f(x, y)$ のグラフの $\mathbf{n}$ 方向の傾きを表し、$\mathrm{grad} f$ はグラフが上向きに最も傾いている方向を向いている。

方向微分



高階の偏導関数

高階の偏導関数

[定義] 二変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ はやはり二変数関数なので、更にその偏導関数を考えることができる。それらを以下で定義し、f の二階偏導関数とよぶ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

高階の偏導関数

[定義] 二変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ はやはり二変数関数なので、更にその偏導関数を考えることができる。それらを以下で定義し、f の二階偏導関数とよぶ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

これらは $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ と書くこともある。(f_{xy}, f_{yx} の x, y の順序に注意)

高階の偏導関数

[定義] 二変数関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ はやはり二変数関数なので、更にその偏導関数を考えることができる。それらを以下で定義し、f の二階偏導関数とよぶ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

これらは $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ と書くこともある。(f_{xy}, f_{yx} の x, y の順序に注意)

[定理] f_{xy} と f_{yx} がともに存在して連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$

高階の偏導関数

[定義] 二変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ はやはり二変数関数なので、更にその偏導関数を考えることができる。それらを以下で定義し、f の二階偏導関数とよぶ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

これらは $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ と書くこともある。(f_{xy}, f_{yx} の x, y の順序に注意)

[定理] f_{xy} と f_{yx} がともに存在して連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$

三階以上の偏導関数も同様に定義し、同様の記号を用いる。

高階の偏導関数

[定義] 二変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ はやはり二変数関数なので、更にその偏導関数を考えることができる。それらを以下で定義し、f の二階偏導関数とよぶ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

これらは $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ と書くこともある。(f_{xy}, f_{yx} の x, y の順序に注意)

[定理] f_{xy} と f_{yx} がともに存在して連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$

三階以上の偏導関数も同様に定義し、同様の記号を用いる。

一般の多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ についても同様にして

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} (= f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}})$$ を定義する。(添字の順序に注意)

高階の偏導関数

高階の偏導関数

[練習問題]

- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき (極座標とよぶ)、二変数関数 $f(x, y)$ に対して以下が成り立つことを示せ。

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

高階の偏導関数

[練習問題]

- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき (極座標とよぶ)、二変数関数 $f(x,y)$ に対して以下が成り立つことを示せ。
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$
- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ とするとき (円柱座標とよぶ)、三変数関数 $f(x,y,z)$ に対して以下を示せ。
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

高階の偏導関数

[練習問題]

- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき (極座標とよぶ)、二変数関数 $f(x, y)$ に対して以下が成り立つことを示せ。
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$
- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ とするとき (円柱座標とよぶ)、三変数関数 $f(x, y, z)$ に対して以下を示せ。
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
- $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ とするとき (球座標とよぶ)、$f(x, y, z)$ に対して以下を示せ。
$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

高階の偏導関数

[練習問題]

- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき (極座標とよぶ)、二変数関数 $f(x,y)$ に対して以下が成り立つことを示せ。
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$
- $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ とするとき (円柱座標とよぶ)、三変数関数 $f(x,y,z)$ に対して以下を示せ。
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
- $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ とするとき (球座標とよぶ)、$f(x,y,z)$ に対して以下を示せ。
$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Δ を Laplacian とよぶ。

宿題

問題集

195〜198 ページと 206 ページ (例題と演習 A)