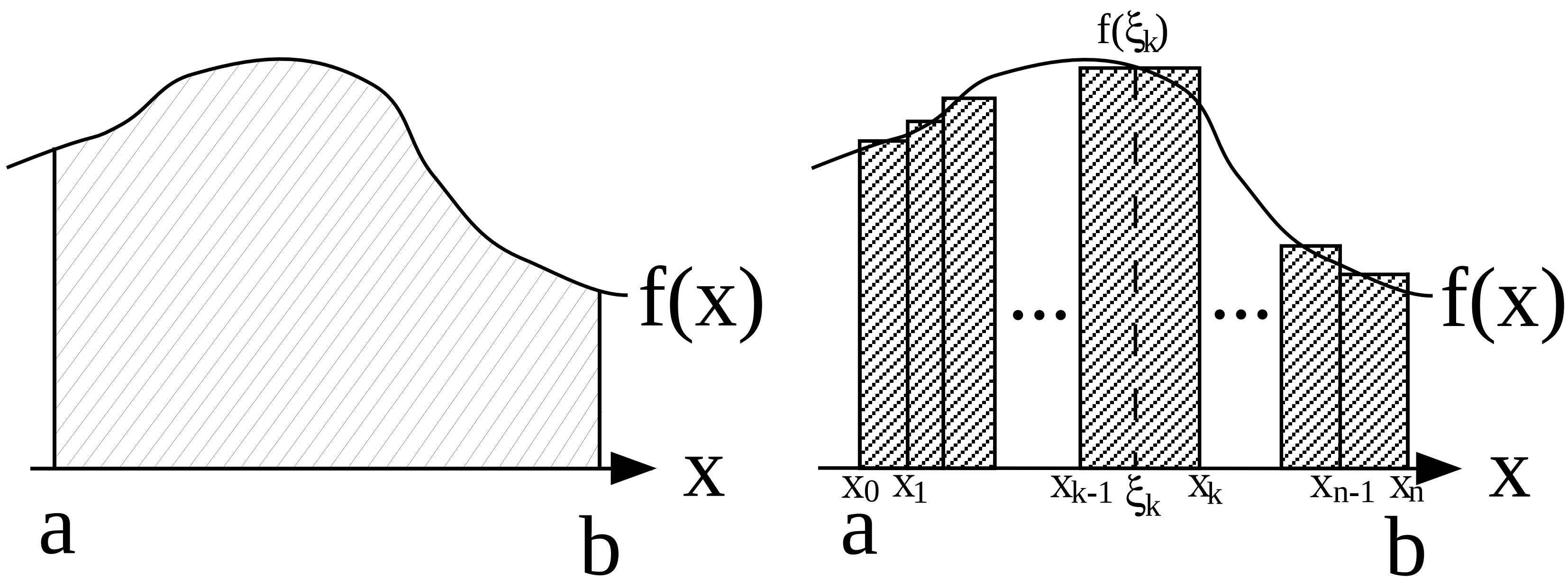
定積分

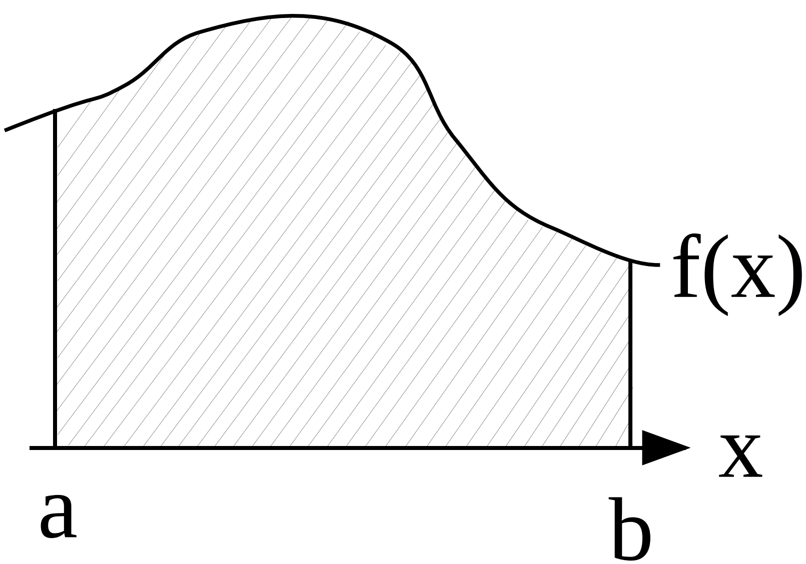
定積分

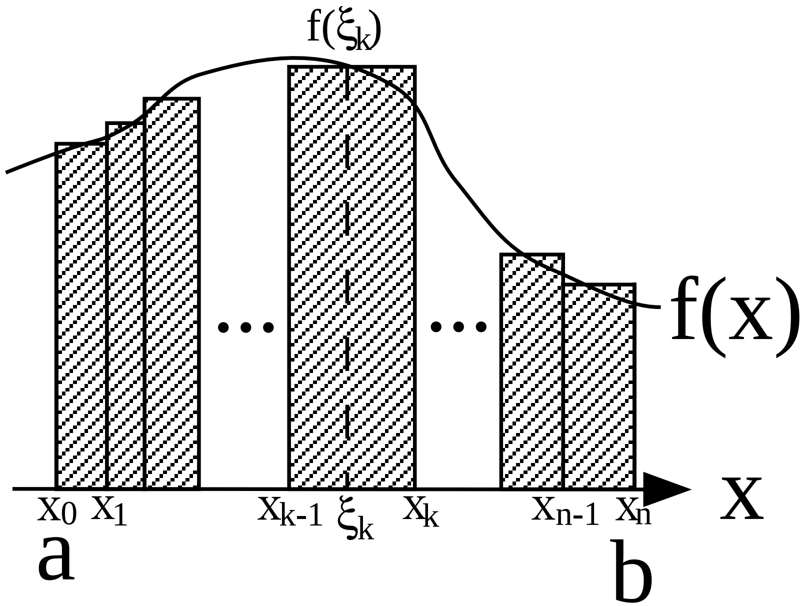
定義域が閉区間 $[a, b]$ を含む連続関数 $f(x)$ について、左図の (符合付き) 面積を右図の Riemann 和 S_n によって近似する：



定積分

定義域が閉区間 $[a, b]$ を含む連続関数 $f(x)$ について、左図の(符合付き) 面積を右図の Riemann 和 S_n によって近似する：





$$\text{つまり } S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$$

定積分

このとき分点 $x_0, \ldots, x_n$ を無限に細かくしていって $\max\{|x_k - x_{x-1}|\} \to 0$ とすると S_n は求める (符合付き) 面積に収束する。

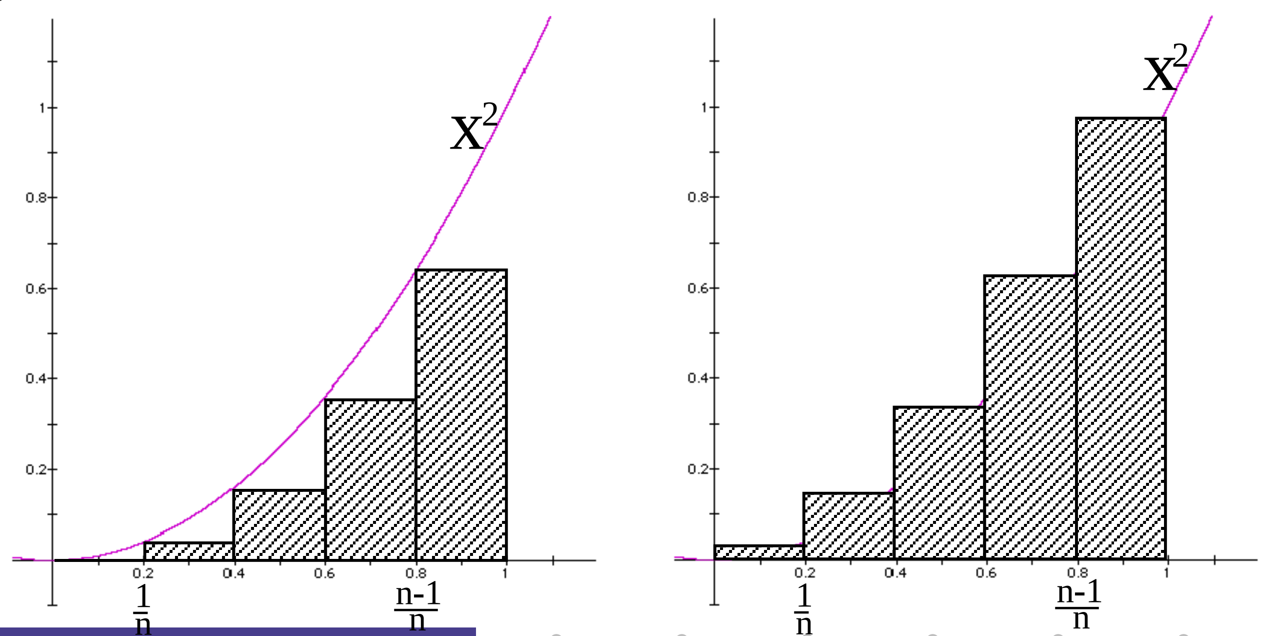
定積分

このとき分点 $x_0, \ldots, x_n$ を無限に細かくしていって $\max\{|x_k - x_{x-1}|\} \to 0$ とすると S_n は求める (符合付き) 面積に収束する。 この収束する値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書き、$f(x)$ の a から b までの定積分と呼ぶ。

定積分

このとき分点 $x_0, \ldots, x_n$ を無限に細かくしていって $\max\{|x_k - x_{x-1}|\} \to 0$ とすると S_n は求める (符合付き) 面積に収束する。 この収束する値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書き、$f(x)$ の a から b までの定積分と呼ぶ。

[例題] $\int_0^1 x^2 dx$ を下図の Riemann 和の極限として求めよ。



定積分

[解答]

左図の Riemann 和は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

右図の Riemann 和は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

よってどちらも $n \to \infty$ で $\frac{1}{3}$ に収束する。

定積分

[解答]

左図の Riemann 和は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

右図の Riemann 和は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

よってどちらも $n \to \infty$ で $\frac{1}{3}$ に収束する。

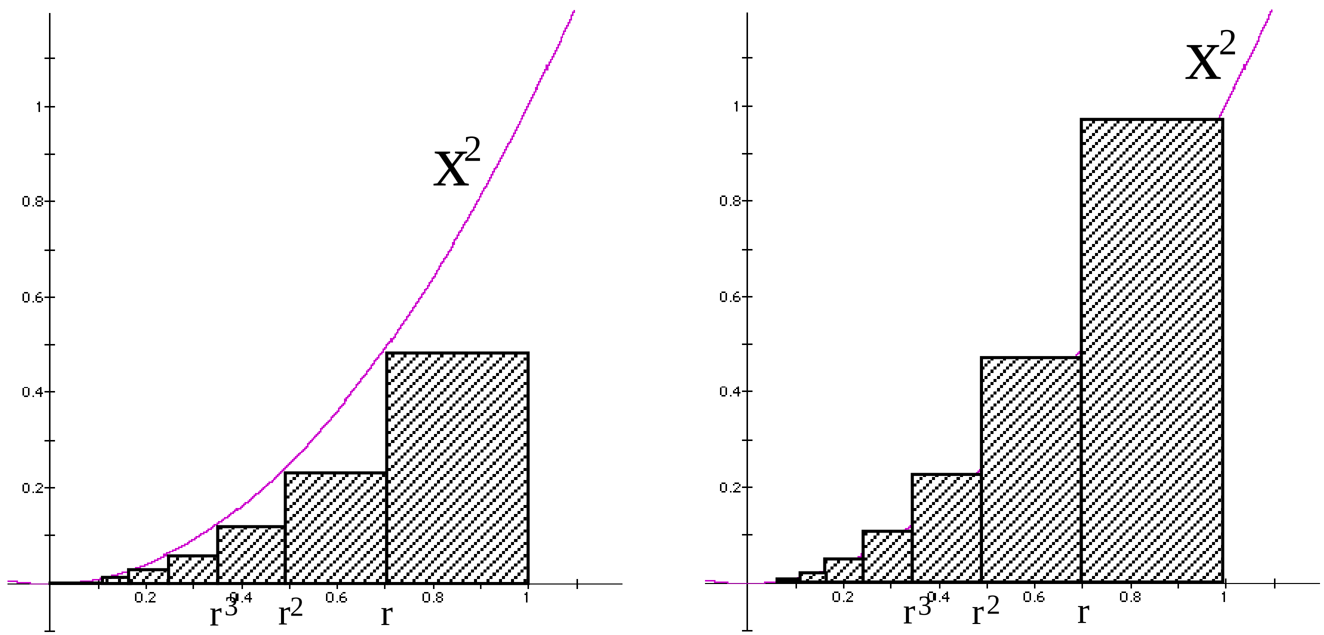
[注意]

分点 $\{x_k\}$ は $\max\{|x_k - x_{k-1}\} \to 0$ となるように細かくとってゆけば、均等でなくても良い。

定積分

[練習問題]

$0 < r < 1$ に対し $x_n = r^n$, $n = 0, 1, \ldots$ ととることにより (この場合分点は無限個になる)$\int_0^1 x^2 dx$ を求めよ。



定積分

[解答]

定積分

[解答] 左図で右から n 番目の長方形の幅は $r^{n-1} - r^n$ でその高さは r^{2n} なのでその面積は $(r^{n-1} - r^n)r^{2n} = (1-r)r^{3n-1}$ である。よって全ての長方形の面積の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r)r^{3n-1} = \frac{r^2}{1+r+r^2}$$

定積分

[解答] 左図で右から n 番目の長方形の幅は $r^{n-1}-r^n$ でその高さは r^{2n} なのでその面積は $(r^{n-1}-r^n)r^{2n}=(1-r)r^{3n-1}$ である。よって全ての長方形の面積の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r)r^{3n-1}=\frac{r^2}{1+r+r^2}$$

右図で右から n 番目の長方形の幅は $r^{n-1}-r^n$ でその高さは $r^{2(n-1)}$ なのでその面積は $(r^{n-1}-r^n)r^{2(n-1)}=(1-r)r^{3(n-1)}$ である。よって全ての長方形の面積の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r)r^{3(n-1)}=\frac{1}{1+r+r^2}$$

定積分

[解答] 左図で右から n 番目の長方形の幅は $r^{n-1}-r^n$ でその高さは r^{2n} なのでその面積は $(r^{n-1}-r^n)r^{2n}=(1-r)r^{3n-1}$ である。よって全ての長方形の面積の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r)r^{3n-1}=\frac{r^2}{1+r+r^2}$$

右図で右から n 番目の長方形の幅は $r^{n-1}-r^n$ でその高さは $r^{2(n-1)}$ なのでその面積は $(r^{n-1}-r^n)r^{2(n-1)}=(1-r)r^{3(n-1)}$ である。よって全ての長方形の面積の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r)r^{3(n-1)}=\frac{1}{1+r+r^2}$$

従って、どちらも $r\to 1$ として分点の間隔を無限に細かくすると $\frac{1}{3}$ に収束する。

定積分

定積分

[定理] 以下では $a \leq b$ とする。

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

定積分

[定理] 以下では $a \le b$ とする。

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

定積分

[定理] 以下では $a \leq b$ とする。

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

定積分

[定理] 以下では $a \leq b$ とする。

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

定積分

[定理] 以下では $a \leq b$ とする。

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$
- $f(x) \leq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

定積分

[定理] 以下では $a \leq b$ とする。

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$
- $f(x) \leq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

定積分

[証明]

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = -\sum_{k=n}^{1} f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)$
  ($a = x_0 < \cdots < x_n = b$) の極限より。

定積分

[証明]

- $$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = -\sum_{k=n}^{1} f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。
- $$\sum_{k=1}^{m+n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_m = b < x_{m+1} < \cdots < x_{m+n} = c)$ の極限より。

定積分

[証明]

- $$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = -\sum_{k=n}^{1} f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。
- $$\sum_{k=1}^{m+n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_m = b < x_{m+1} < \cdots < x_{m+n} = c)$ の極限より。
- $$\sum_{k=1}^{n} k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = k \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。

定積分

[証明]

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = -\sum_{k=n}^{1} f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
  $(a = x_0 < \cdots < x_m = b < x_{m+1} < \cdots < x_{m+n} = c)$ の極限より。
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{f+g\}(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。

定積分

[証明続き]

- $$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。

定積分

[証明続き]

- $$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。
- $$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| (x_k - x_{k-1})$$
  $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ の極限より。

定積分

定積分

[定理] 実数 a を含む区間で定義された連続関数 $f(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)d\xi = f(x)$$

(微分積分学の基本定理)

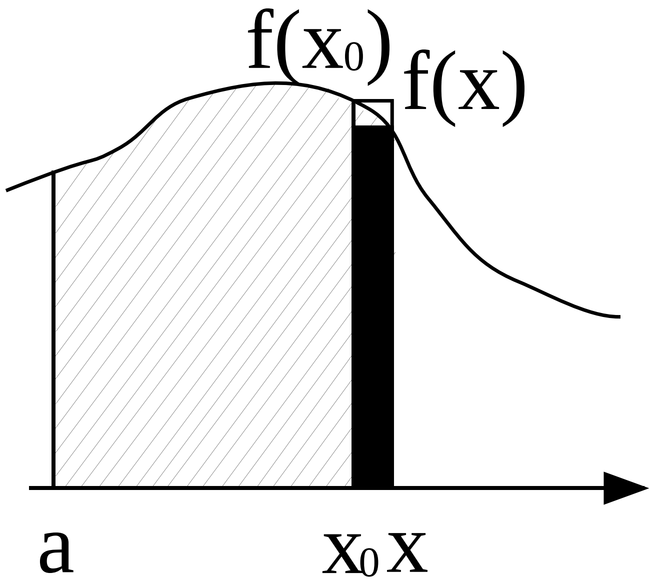
定積分

[定理] 実数 a を含む区間で定義された連続関数 $f(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)d\xi = f(x)$$

(微分積分学の基本定理)

[証明]



図の様に

$$\frac{1}{x-x_0}\left\{\int_a^x f(\xi)d\xi - \int_a^{x_0} f(\xi)d\xi\right\} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(\xi)d\xi \to f(x_0) \quad (x \to x_0)$$

定積分

[練習問題]
$\dfrac{1}{x-x_0}\left\{\displaystyle\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = \dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^x \xi^2 d\xi$ の極限を求めることにより $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \xi^2 d\xi = x^2$ を確かめよ。

定積分

[練習問題]

$\dfrac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = \dfrac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \xi^2 d\xi$ の極限を求めることにより $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \xi^2 d\xi = x^2$ を確かめよ。

[解答] $x > x_0 \geq 0$ のとき

$$x_0^2(x-x_0) = \int_{x_0}^x (x_0)^2 d\xi < \int_{x_0}^x \xi^2 d\xi < \int_{x_0}^x x^2 d\xi = x^2(x-x_0)$$

となるので

定積分

[練習問題]

$$\frac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \xi^2 d\xi$$ の極限を求めることにより $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \xi^2 d\xi = x^2$ を確かめよ。

[解答] $x > x_0 \geq 0$ のとき

$$x_0^2(x-x_0) = \int_{x_0}^x (x_0)^2 d\xi < \int_{x_0}^x \xi^2 d\xi < \int_{x_0}^x x^2 d\xi = x^2(x-x_0)$$

となるので

$$(x_0)^2 < \frac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} < x^2$$

となり、

定積分

[練習問題]
$\dfrac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = \dfrac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \xi^2 d\xi$ の極限を求めることにより $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \xi^2 d\xi = x^2$ を確かめよ。

[解答] $x > x_0 \geq 0$ のとき

$$x_0^2(x-x_0) = \int_{x_0}^x (x_0)^2 d\xi < \int_{x_0}^x \xi^2 d\xi < \int_{x_0}^x x^2 d\xi = x^2(x-x_0)$$

となるので

$$(x_0)^2 < \frac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} < x^2$$

となり、挟み撃ちの原理より

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = (x_0)^2$$

定積分

[練習問題]
$\dfrac{1}{x-x_0}\left\{\displaystyle\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = \dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^x \xi^2 d\xi$ の極限を求めることにより $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \xi^2 d\xi = x^2$ を確かめよ。

[解答] $x > x_0 \geq 0$ のとき

$$x_0^2(x-x_0) = \int_{x_0}^x (x_0)^2 d\xi < \int_{x_0}^x \xi^2 d\xi < \int_{x_0}^x x^2 d\xi = x^2(x-x_0)$$

となるので

$$(x_0)^2 < \frac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} < x^2$$

となり、挟み撃ちの原理より

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{1}{x-x_0}\left\{\int_0^x \xi^2 d\xi - \int_0^{x_0} \xi^2 d\xi\right\} = (x_0)^2$$

他の場合も同様。

定積分

[定理] 関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

定積分

[定理] 関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

[証明] 微分積分学の基本定理より $\displaystyle\int_a^x f(\xi)d\xi$ も $f(x)$ の原始関数の一つである。

定積分

[定理] 関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

[証明] 微分積分学の基本定理より $\displaystyle\int_a^x f(\xi)d\xi$ も $f(x)$ の原始関数の一つである。 よって、$f(x)$ が定義された全ての x で

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(\xi)d\xi - F(x)\right\} = f(x) - f(x) = 0 \text{ より } \int_a^x f(\xi)d\xi - F(x) = C$$

定積分

[定理] 関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

[証明] 微分積分学の基本定理より $\displaystyle\int_a^x f(\xi)d\xi$ も $f(x)$ の原始関数の一つである。 よって、$f(x)$ が定義された全ての x で

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(\xi)d\xi - F(x)\right\} = f(x) - f(x) = 0 \text{ より } \int_a^x f(\xi)d\xi - F(x) = C$$

定義より $\displaystyle\int_a^a f(\xi)d\xi = 0$ なので $C = -F(a)$。

定積分

[定理] 関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

[証明] 微分積分学の基本定理より $\displaystyle\int_a^x f(\xi)d\xi$ も $f(x)$ の原始関数の一つである。 よって、$f(x)$ が定義された全ての x で

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(\xi)d\xi - F(x)\right\} = f(x) - f(x) = 0 \text{ より } \int_a^x f(\xi)d\xi - F(x) = C$$

定義より $\displaystyle\int_a^a f(\xi)d\xi = 0$ なので $C = -F(a)$。

従って $\displaystyle\int_a^b f(\xi)d\xi = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$。

定積分

[定理]

- **(置換積分)** 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ と区間 $[\alpha,\beta]$ で定義された微分可能な関数 $g(\xi)$ について $a=g(\alpha), b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$$

定積分

[定理]

- **(置換積分)** 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ と区間 $[\alpha,\beta]$ で定義された微分可能な関数 $g(\xi)$ について $a=g(\alpha), b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$$

- **(部分積分)** $[a,b]$ で定義された微分可能な関数 $F(x), G(x)$ について

$$\int_a^b F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$$

定積分

[注意]

全ての初等関数の原始関数が初等関数で書けるわけではない。

定積分

[注意]

全ての初等関数の原始関数が初等関数で書けるわけではない。

[反例] e^{-x^2} の原始関数の初等的な (簡単な) 表記は知られていない。

定積分

[定理] 区間 $[a,b]$ で定義された微分可能な関数 $\varphi(t), \psi(t)$ によって $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$ で表される平面上の曲線の長さ l は次で求められる。

$$l = \int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt$$

定積分

[定理] 区間 $[a,b]$ で定義された微分可能な関数 $\varphi(t), \psi(t)$ によって $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$ で表される平面上の曲線の長さ l は次で求められる。

$$l = \int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt$$

[証明] 次の Riemann 和を考える ($a = t_0 < \cdots < t_n = b$):

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\}^2 + \{\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\}^2}$$

定積分

[定理] 区間 $[a,b]$ で定義された微分可能な関数 $\varphi(t),\psi(t)$ によって $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$ で表される平面上の曲線の長さ l は次で求められる。

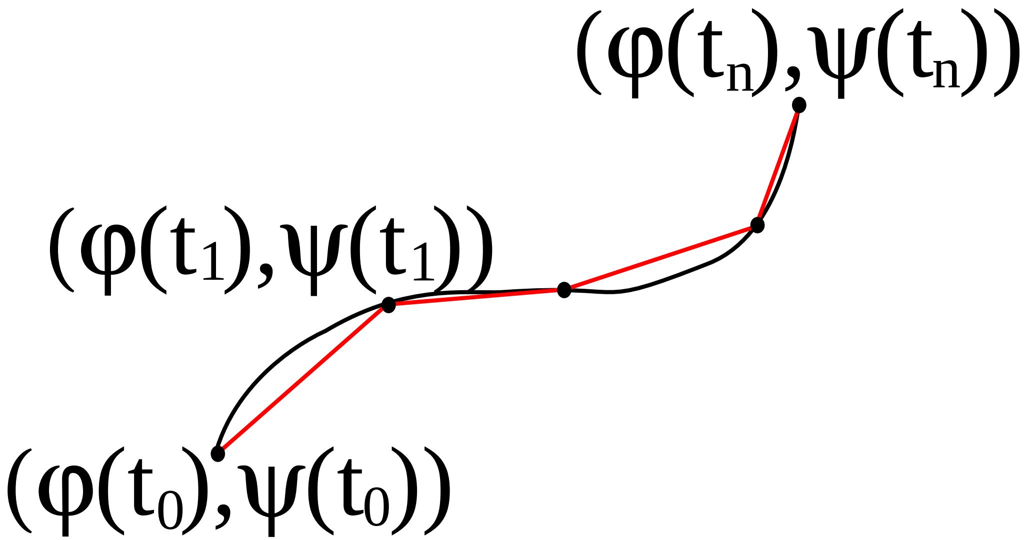
$$l=\int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2+\{\psi'(t)\}^2}dt$$

[証明] 次の Riemann 和を考える ($a=t_0<\cdots<t_n=b$):

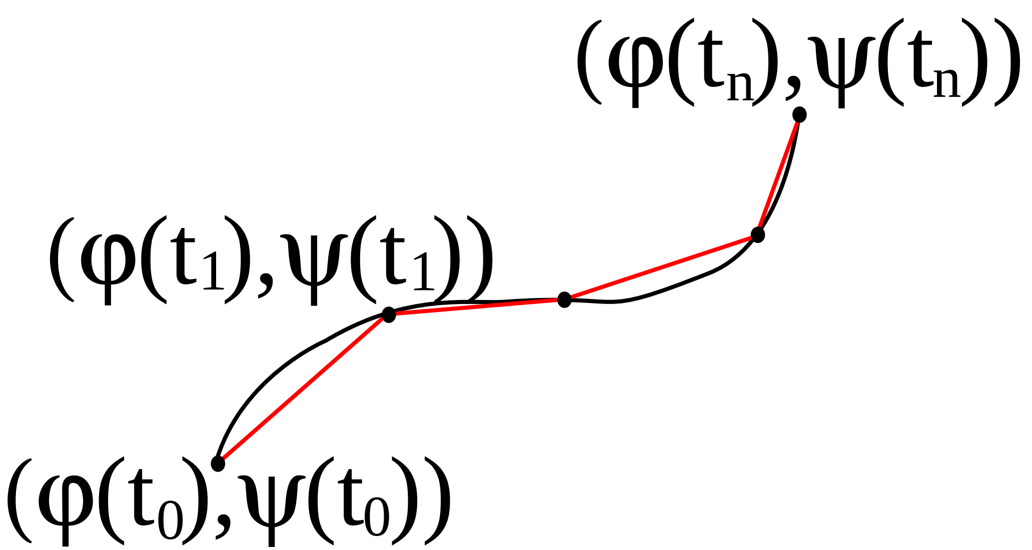
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\{\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\}^2+\{\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})\}^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left\{\frac{\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right\}^2+\left\{\frac{\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right\}^2}(t_k-t_{k-1})$$

定積分



定積分



分点を無限に細かくしたときのこの極限は

$$\int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2}dt$$

となる。

定積分

[練習問題]

平面上の曲線が区間 $[a,b]$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ によって $y=f(x)$ と表されている場合に、その長さが

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

で表されることを示せ。

定積分

[練習問題]

平面上の曲線が区間 $[a, b]$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ によって $y = f(x)$ と表されている場合に、その長さが

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

で表されることを示せ。

[解答]

この曲線は $(x, y) = (x, f(x))$ と表せるので、$(x)' = 1$ より定理から得られる。

宿題

問題集

セクション 50(99 ページ)〜56(112 ページ)、63(125 ページ)〜64(128 ページ)