

関数と逆関数

関数と逆関数

[定義] 実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。またこのとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。また x のとり得る範囲を定義域、 y のとり得る範囲を値域という。

関数と逆関数

[定義] 実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。またこのとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。また x のとり得る範囲を定義域、 y のとり得る範囲を値域という。逆に値域内の各 y に対して定義域内の x が唯一つ決まるとき、この y から x を決める規則を $y = f(x)$ の逆関数と呼び $f^{-1}(y)$ 等の記号を用いて $x = f^{-1}(y)$ 等と表す。明らかに f^{-1} の定義域は f の値域であり f^{-1} の値域は f の定義域である。

関数と逆関数

[定義] 実数 x に対して実数 y が唯一つ決まる時、 y は x の関数であるという。またこのとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。また x のとり得る範囲を定義域、 y のとり得る範囲を値域という。逆に値域内の各 y に対して定義域内の x が唯一つ決まる時、この y から x を決める規則を $y = f(x)$ の逆関数と呼び $f^{-1}(y)$ 等の記号を用いて $x = f^{-1}(y)$ 等と表す。明らかに f^{-1} の定義域は f の値域であり f^{-1} の値域は f の定義域である。

[例] 実数 $a > 1$ について、指数関数 $y = a^x$ は実数全体 (これを以降 $\mathbf{R}$ で表す) を定義域とし正の実数全体を値域とする関数であり、

関数と逆関数

[定義] 実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。またこのとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。また x のとり得る範囲を定義域、 y のとり得る範囲を値域という。逆に値域内の各 y に対して定義域内の x が唯一つ決まるとき、この y から x を決める規則を $y = f(x)$ の逆関数と呼び $f^{-1}(y)$ 等の記号を用いて $x = f^{-1}(y)$ 等と表す。明らかに f^{-1} の定義域は f の値域であり f^{-1} の値域は f の定義域である。

[例] 実数 $a > 1$ について、指数関数 $y = a^x$ は実数全体 (これを以降 $\mathbf{R}$ で表す) を定義域とし正の実数全体を値域とする関数であり、この逆関数は $x = \log_a y$ ($a = e$ のときは a を省略) でありその定義域は正の実数全体で値域は $\mathbf{R}$ である。

関数と逆関数

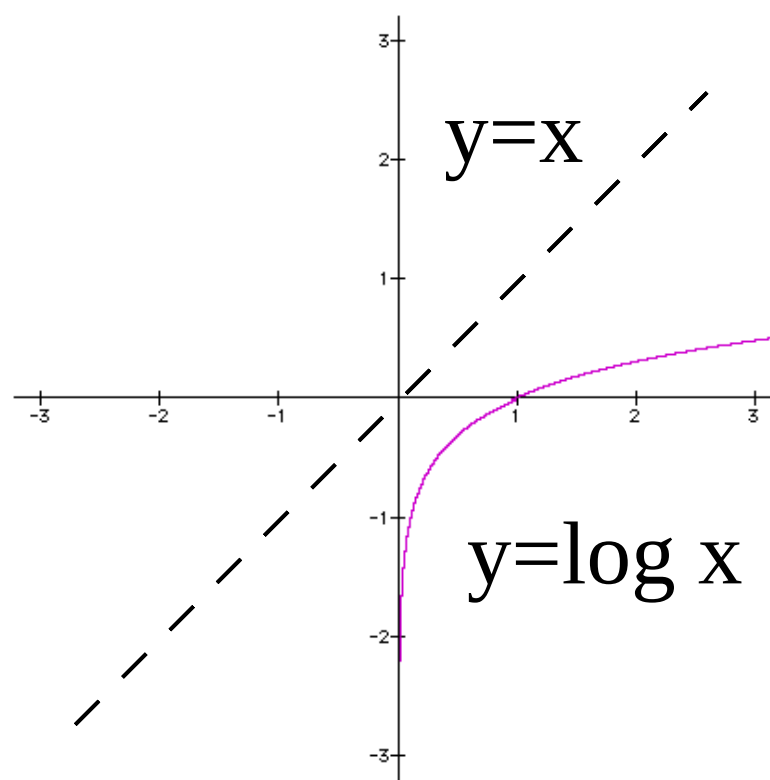
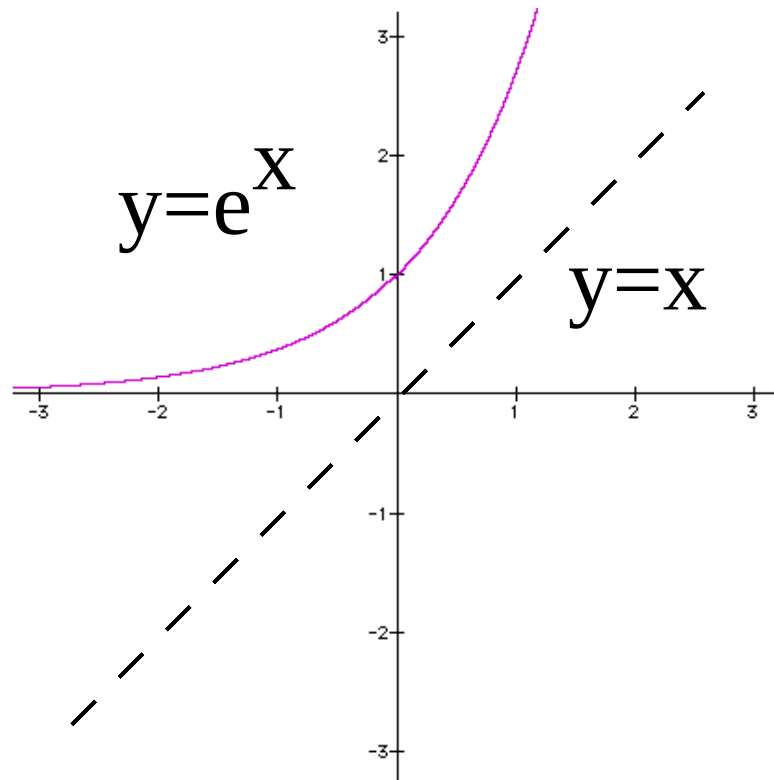
関数と逆関数

[逆関数のグラフ] $y = f(x)$ のグラフが分かっているときは、そのグラフを対角線 $y = x$ に対して対称に折り返すことにより逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフが得られる。

関数と逆関数

[逆関数のグラフ] $y = f(x)$ のグラフが分かっているときは、そのグラフを対角線 $y = x$ に対して対称に折り返すことにより逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフが得られる。

[例] $y = e^x$ と $y = \log x$ のグラフ



関数と逆関数

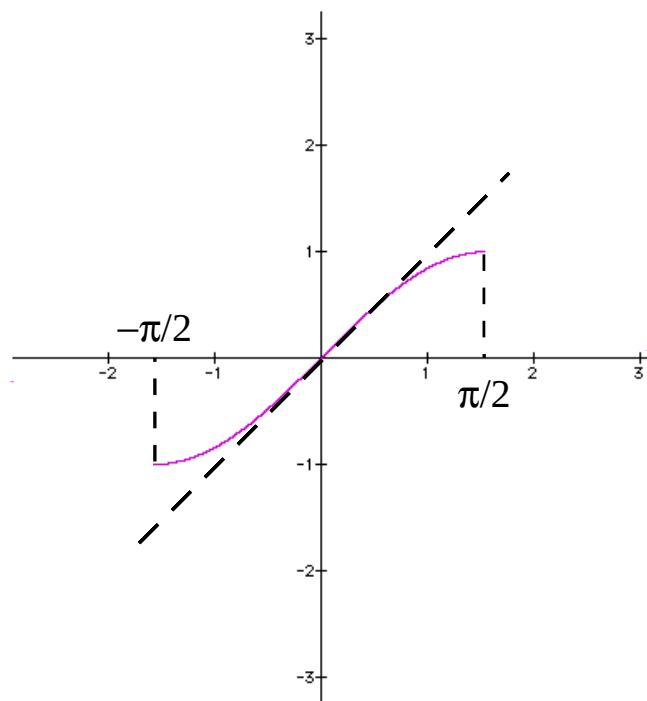
関数と逆関数

[練習問題] 定義域と値域を適切に狭めることにより、三角関数の逆関数を考えそのグラフを描け。

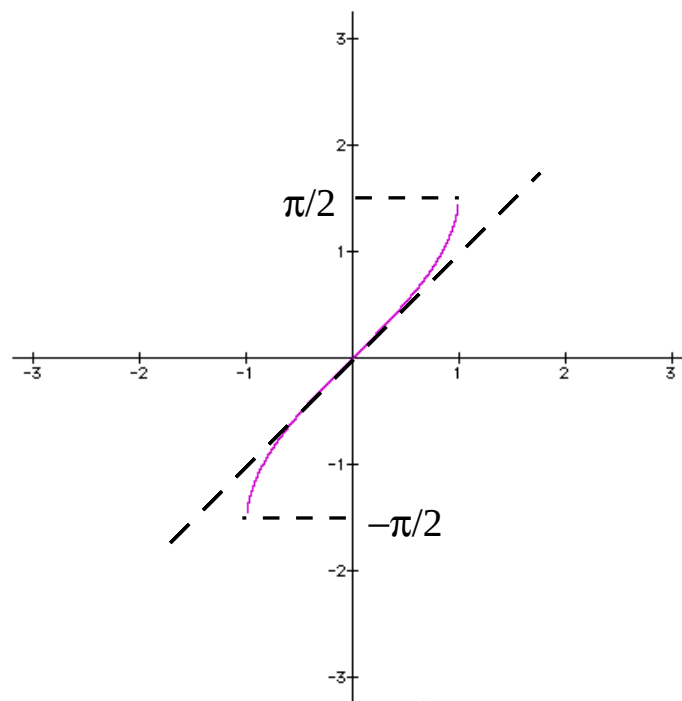
関数と逆関数

[練習問題] 定義域と値域を適切に狭めることにより、三角関数の逆関数を考えそのグラフを描け。

[解答] $y = \sin x$ と $y = \sin^{-1} x$ のグラフ。($\sin^{-1} x$ を $\arcsin x$ と書く場合もある。)



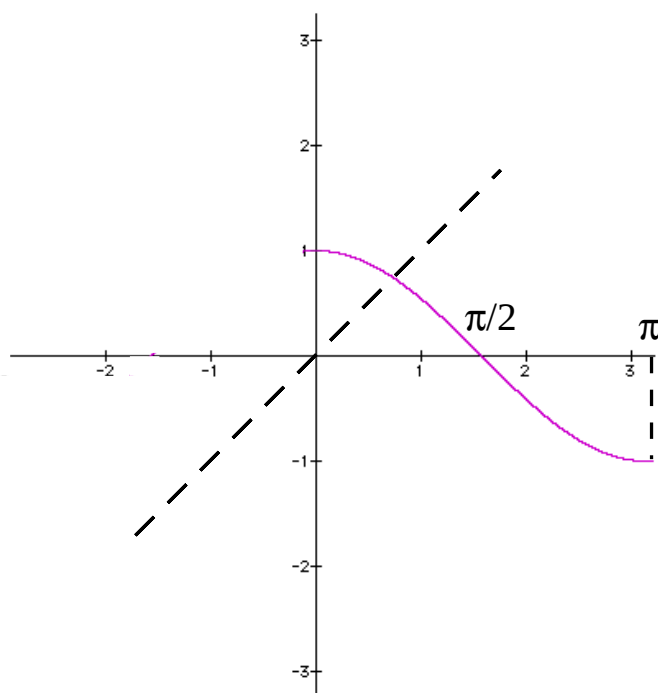
$$y = \sin x$$



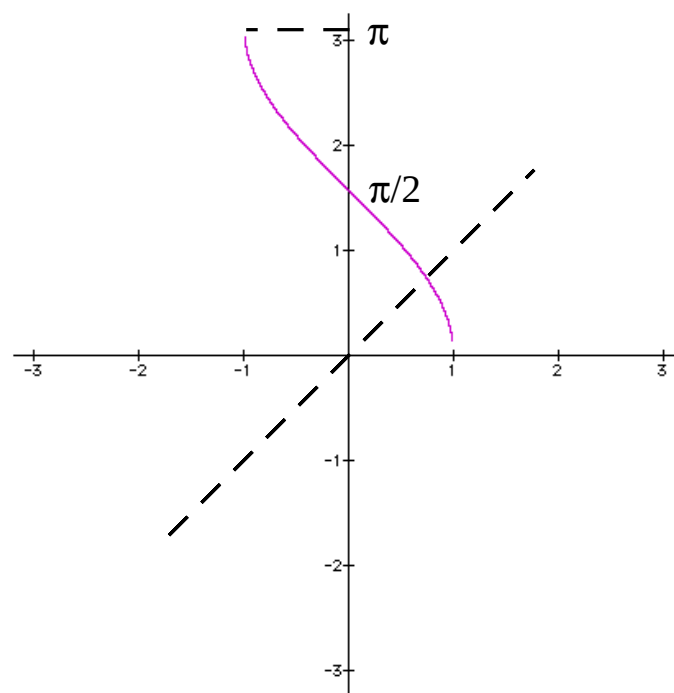
$$y = \sin^{-1} x$$

関数と逆関数

$y = \cos x$ と $y = \cos^{-1} x$ のグラフ。($\cos^{-1} x$ を $\arccos x$ と書く場合もある。)



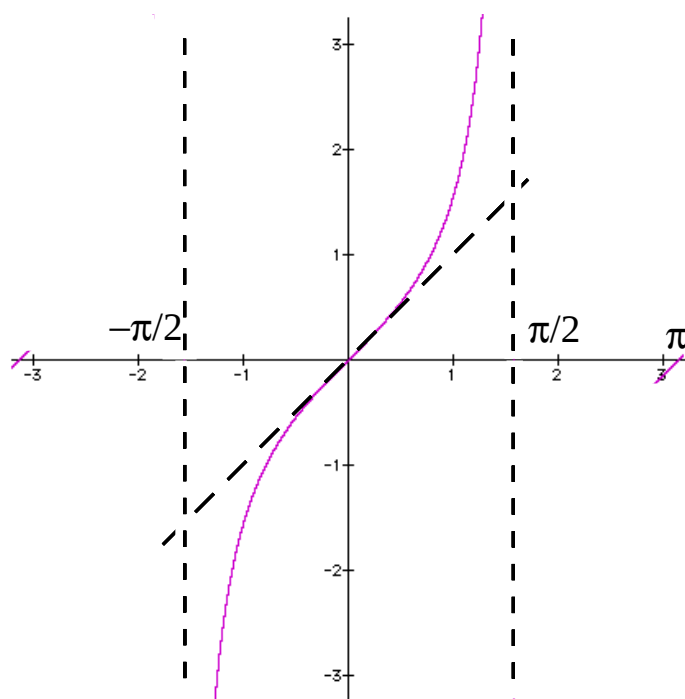
$y = \cos x$



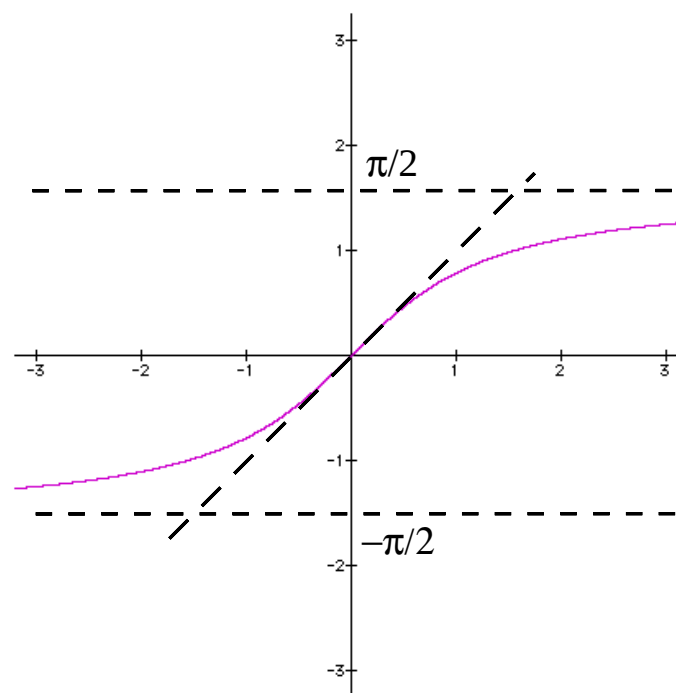
$y = \cos^{-1} x$

関数と逆関数

$y = \tan x$ と $y = \tan^{-1} x$ のグラフ。($\tan^{-1} x$ を $\arctan x$ と書く場合もある。)



$y = \tan x$



$y = \tan^{-1} x$

関数と逆関数

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$(f^{-1}(x_0))' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$$

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$(f^{-1}(x_0))' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}$$

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$\begin{aligned} (f^{-1}(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - f(f^{-1}(x_0))} \\ &= \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{1}{\frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)}} \end{aligned}$$

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$\begin{aligned} (f^{-1}(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - f(f^{-1}(x_0))} \\ &= \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{1}{\frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - f(f^{-1}(x_0))} \\ &= \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{1}{\frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\end{aligned}$$

[例] $(\log x)'$

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - f(f^{-1}(x_0))} \\ &= \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{1}{\frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\end{aligned}$$

[例] $(\log x)' = \frac{1}{(\exp(\log x))'}$

関数と逆関数

[逆関数の導関数] $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ についてその導関数を考える。

$y = f^{-1}(x)$ ならば $x = f(y)$ であることと、 $x \rightarrow x_0$ のとき ($f^{-1}(x)$ が $x = x_0$ で連続であるならば) $f^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ であることから、

$$\begin{aligned} (f^{-1}(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - f(f^{-1}(x_0))} \\ &= \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{1}{\frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$

【例】 $(\log x)' = \frac{1}{(\exp(\log x))'} = \frac{1}{x}$ 但し、 $\exp x := e^x$

関数と逆関数

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$(\sin^{-1} x)'$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \end{aligned}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \end{aligned}$$

$$(\cos^{-1} x)'$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \\ (\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} \end{aligned}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \\ (\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} \end{aligned}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \\ (\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 \leq y \leq \pi \text{ で } \sin y \geq 0) \end{aligned}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 \leq y \leq \pi \text{ で } \sin y \geq 0) \end{aligned}$$

$$(\tan^{-1} x)'$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \\(\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} \\&= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 \leq y \leq \pi \text{ で } \sin y \geq 0) \\(\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\tan^{-1} x)}}\end{aligned}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \\(\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} \\&= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 \leq y \leq \pi \text{ で } \sin y \geq 0) \\(\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\tan^{-1} x)}} = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)}\end{aligned}$$

関数と逆関数

[練習問題] 逆三角関数 $\sin^{-1} x$ ($\arcsin x$)、 $\cos^{-1} x$ ($\arccos x$)、 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) の導関数を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \\&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos y \geq 0\right) \\(\cos^{-1} x)' &= \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} \\&= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 \leq y \leq \pi \text{ で } \sin y \geq 0) \\(\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\tan^{-1} x)}} = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

関数と逆関数

関数と逆関数

[注意] 練習問題の結果から、以下の原始関数の公式が得られる。

関数と逆関数

[注意] 練習問題の結果から、以下の原始関数の公式が得られる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \sin^{-1} x + C \\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \cos^{-1} x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \tan^{-1} x + C\end{aligned}$$

但し C は積分定数とする。

宿題

問題集

セクション 19(37 ページ)～セクション 22(44 ページ)