二次曲線

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点 (x, y) を角度 θ だけ回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点 (x, y) を角度 θ だけ回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta X + \sin\theta Y \\ -\sin\theta X + \cos\theta Y \end{pmatrix}$$

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点 (x, y) を角度 θ だけ回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta X + \sin\theta Y \\ -\sin\theta X + \cos\theta Y \end{pmatrix}$$

これを $ax^2 + bxy + cy^2$ に代入すると

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 = a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
+b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
+c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 = a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
+b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
+c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a\cos^2\theta - b\sin\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\
&\quad + \left\{2a\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2c\sin\theta\cos\theta\right\} XY \\
&\quad +(a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 = a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
+b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
+c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a\cos^2\theta - b\sin\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\
&\quad + \left\{2a\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2c\sin\theta\cos\theta\right\} XY \\
&\quad\quad +(a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) + (a-c)\cos 2\theta - b\sin 2\theta\right\} X^2 \\
&\quad + \left\{(a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\right\} XY \\
&\quad\quad +\tfrac{1}{2}\left\{(a+c) - (a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta\right\} Y^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
&\quad + b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
&\quad + c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2 \\
&= (a\cos^2\theta - b\sin\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\
&\quad + \left\{2a\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2c\sin\theta\cos\theta\right\} XY \\
&\quad + (a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) + (a-c)\cos 2\theta - b\sin 2\theta\right\} X^2 \\
&\quad + \left\{(a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\right\} XY \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) - (a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta\right\} Y^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}) \cos(2\theta + \alpha)\} X^2 \\
&\quad + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \sin(2\theta + \alpha) XY \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}) \cos(2\theta + \alpha)\} Y^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta + \alpha = 0$ となる様に θ を取ると

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta + \alpha = 0$ となる様に θ を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2 + bxy + cy^2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}X^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}Y^2 \end{aligned}$$

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta+\alpha=0$ となる様に θ を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2+bxy+cy^2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}X^2 \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\left\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}Y^2 \end{aligned}$$

これは、楕円もしくは双曲線の方程式である。

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta+\alpha=0$ となる様に θ を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2+bxy+cy^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}X^2 \\ +\tfrac{1}{2}\left\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}Y^2 \end{aligned}$$

これは、楕円もしくは双曲線の方程式である。

$\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\}\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\} = 4ac-b^2$
の符号によって、楕円か双曲線かが決まる。

三角関数

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

[証明]

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

[証明]

平面上で角度 θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ と書くと

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

[証明]

平面上で角度 θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ と書くと

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

[証明]

平面上で角度 θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ と書くと

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= R(\alpha+\beta)$$

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

[証明]

平面上で角度 θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ と書くと

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$
$$= R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$$

三角関数

[公式]

α, β を実数とするとき以下が成り立つ。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

[証明]

平面上で角度 θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ と書くと

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

三角関数

[練習問題] 以下の公式を証明せよ：

(1)
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(2)
$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

(3)
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta), \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

(4)
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2},$$
$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}$$

(5)
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2},$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

部分分数

部分分数

有理式 *i.e.* $\dfrac{B(x)}{A(x)} = \dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ を簡単な式の和に変形する。

部分分数

有理式 *i.e.* $\dfrac{B(x)}{A(x)} = \dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ を簡単な式の和に変形する。

- 割り算をして ($B(x)$ の次数)<($A(x)$ の次数) の形にする。

部分分数

有理式 *i.e.* $\dfrac{B(x)}{A(x)} = \dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ を簡単な式の和に変形する。

- 割り算をして (**$B(x)$ の次数**)<(**$A(x)$ の次数**) の形にする。
- 分母を因数分解する：

$$\begin{aligned} A(x) &= (a_1 x + b_1)^{m_1} \cdots (a_k x + b_k)^{m_k} \\ &\quad \times \left((x - c_1)^2 + d_1\right)^{n_1} \cdots \left((x - c_l)^2 + d_l\right)^{n_l},\ (d_i > 0) \end{aligned}$$

部分分数

有理式 *i.e.* $\dfrac{B(x)}{A(x)} = \dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ を簡単な式の和に変形する。

- 割り算をして **(**$B(x)$ の次数**)**$<$**(**$A(x)$ の次数**)** の形にする。
- 分母を因数分解する：
$$A(x) = (a_1x+b_1)^{m_1}\cdots(a_kx+b_k)^{m_k}$$
$$\times\left((x-c_1)^2+d_1\right)^{n_1}\cdots\left((x-c_l)^2+d_l\right)^{n_l}, \ (d_i>0)$$
- 全体を次の形に変形する：
$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{C_{1,1}}{a_1x+b_1}+\frac{C_{1,2}}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{C_{1,m_1}}{(a_1x+b_1)^{m_1}}+\cdots+$$
$$+\frac{D_{1,1}x+E_{1,1}}{(x-c_1)^2+d_1}+\frac{D_{1,2}x+E_{1,2}}{\left((x-c_1)^2+d_1\right)^2}+\cdots+\frac{D_{1,n_1}x+E_{1,n_1}}{\left((x-c_1)^2+d_1\right)^{n_1}}$$
$$+\cdots+$$

部分分数

[例**]**

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}$$

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}=\frac{x^2-2x-1}{x\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}$$

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}=\frac{x^2-2x-1}{x\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$ とおく。

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}=\frac{x^2-2x-1}{x\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$ とおく。

右辺をまとめると

$$\frac{(a+b)x^2+(a+c)x+a}{x^3+x^2+x}$$

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x} = \frac{x^2-2x-1}{x\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$ とおく。

右辺をまとめると

$$\frac{(a+b)x^2+(a+c)x+a}{x^3+x^2+x} = \frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}$$

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x} = \frac{x^2-2x-1}{x\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$ とおく。

右辺をまとめると

$$\frac{(a+b)x^2+(a+c)x+a}{x^3+x^2+x} = \frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}$$

従って $a=-1,\ b=2,\ c=-1$ であり、

部分分数

[例]

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}=\frac{x^2-2x-1}{x\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$ とおく。

右辺をまとめると

$$\frac{(a+b)x^2+(a+c)x+a}{x^3+x^2+x}=\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}$$

従って $a=-1,\ b=2,\ c=-1$ であり、

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2+x}=-\frac{1}{x}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}$$

となる。

部分分数

[練習問題]

$\dfrac{x^2+1}{(x+2)^3}$ を部分分数に分解せよ。

部分分数

[練習問題]

$\dfrac{x^2+1}{(x+2)^3}$ を部分分数に分解せよ。

[解答]

$$\frac{x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^3}$$

宿題

問題集

セクション46〜セクション47