微分積分・同演習 A

(準備) 高校数学の復習

新居 俊作

二次式の平方完成

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

平方完成：$a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

平方完成：$a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$

整理して：$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

平方完成：$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$

整理して：$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = \dfrac{D}{4a^2}, \quad (D:\text{判別式})$

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2+bx+c=0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

平方完成：$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$

整理して：$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = \dfrac{D}{4a^2}, \quad (D:\text{判別式})$

従って、$D \geq 0$ ならばこの方程式は実数の範囲で解を持ち

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

平方完成：$a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$

整理して：$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{D}{4a^2}, \quad (D : \text{判別式})$

従って、$D \geq 0$ ならばこの方程式は実数の範囲で解を持ち

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

二次式の平方完成

二次方程式：

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

の解を求める。

平方完成：$a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$

整理して：$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{D}{4a^2}, \quad (D:$ 判別式$)$

従って、$D \geq 0$ ならばこの方程式は実数の範囲で解を持ち

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

すなわち $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad$ となる。

二次式の平方完成

$D < 0$ の場合も、形式的な計算では

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となるが、

二次式の平方完成

$D < 0$ の場合も、形式的な計算では

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となるが、 このときは

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

の中身が負で、実数の範囲では平方根は考えられない。

二次式の平方完成

$D < 0$ の場合も、形式的な計算では

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となるが、 このときは

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

の中身が負で、実数の範囲では平方根は考えられない。
そこで

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$$

と変形して、

二次式の平方完成

$D < 0$ の場合も、形式的な計算では

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となるが、 このときは

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

の中身が負で、実数の範囲では平方根は考えられない。
そこで

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$$

と変形して、 解は

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

となる。

二次式の平方完成

[練習問題]

二次方程式

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

の解を求めよ。

二次式の平方完成(二変数の場合)

二次式の平方完成(二変数の場合)

二変数の方程式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad (d \neq 0)$$

が x-y 平面上に定める曲線を考える。

二次式の平方完成(二変数の場合)

二変数の方程式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad (d \neq 0)$$

が x-y 平面上に定める曲線を考える。

- $b = 0$ の場合：$ac <, > 0$ に応じ、双曲線, 楕円

二次式の平方完成(二変数の場合)

二変数の方程式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad (d \neq 0)$$

が x-y 平面上に定める曲線を考える。

- $b = 0$ の場合：$ac <, > 0$ に応じ、双曲線, 楕円
- $b \neq 0$ の場合

二次式の平方完成(二変数の場合)

二変数の方程式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad (d \neq 0)$$

が x-y 平面上に定める曲線を考える。

- $b = 0$ の場合：$ac <, > 0$ に応じ、双曲線, 楕円
- $b \neq 0$ の場合

$a \neq 0$ の場合は左辺を平方完成すると：

二次式の平方完成(二変数の場合)

二変数の方程式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad (d \neq 0)$$

が x-y 平面上に定める曲線を考える。

- $b = 0$ の場合：$ac <, > 0$ に応じ、双曲線, 楕円
- $b \neq 0$ の場合

$a \neq 0$ の場合は左辺を平方完成すると：

$$a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2 = d$$

二次式の平方完成(二変数の場合)

二変数の方程式：

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad (d \neq 0)$$

が x-y 平面上に定める曲線を考える。

- $b = 0$ の場合：$ac <, > 0$ に応じ、双曲線, 楕円
- $b \neq 0$ の場合

$a \neq 0$ の場合は左辺を平方完成すると：

$$a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2 = d$$

よって $X = x + \frac{b}{2a}y, Y = y$ とすると：

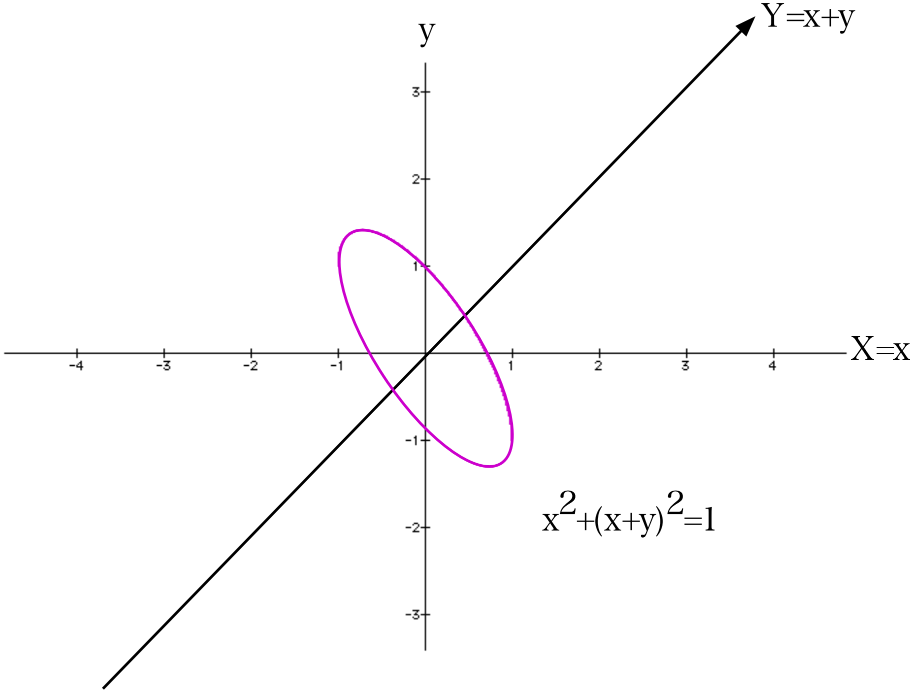
$$aX^2 - \frac{D}{4a}Y^2 = d, \quad (D = b^2 - 4ac)$$

二次式の平方完成(二変数の場合)

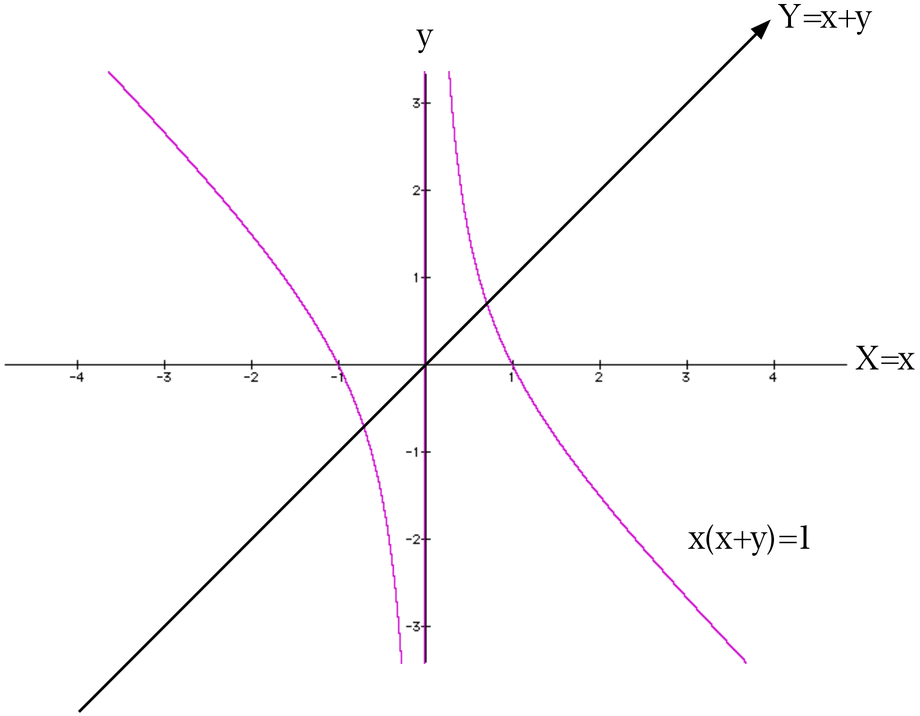
これより $D <, > 0$ に応じ、楕円, 双曲線となる。

二次式の平方完成(二変数の場合)

これより $D <, > 0$ に応じ、楕円, 双曲線となる。



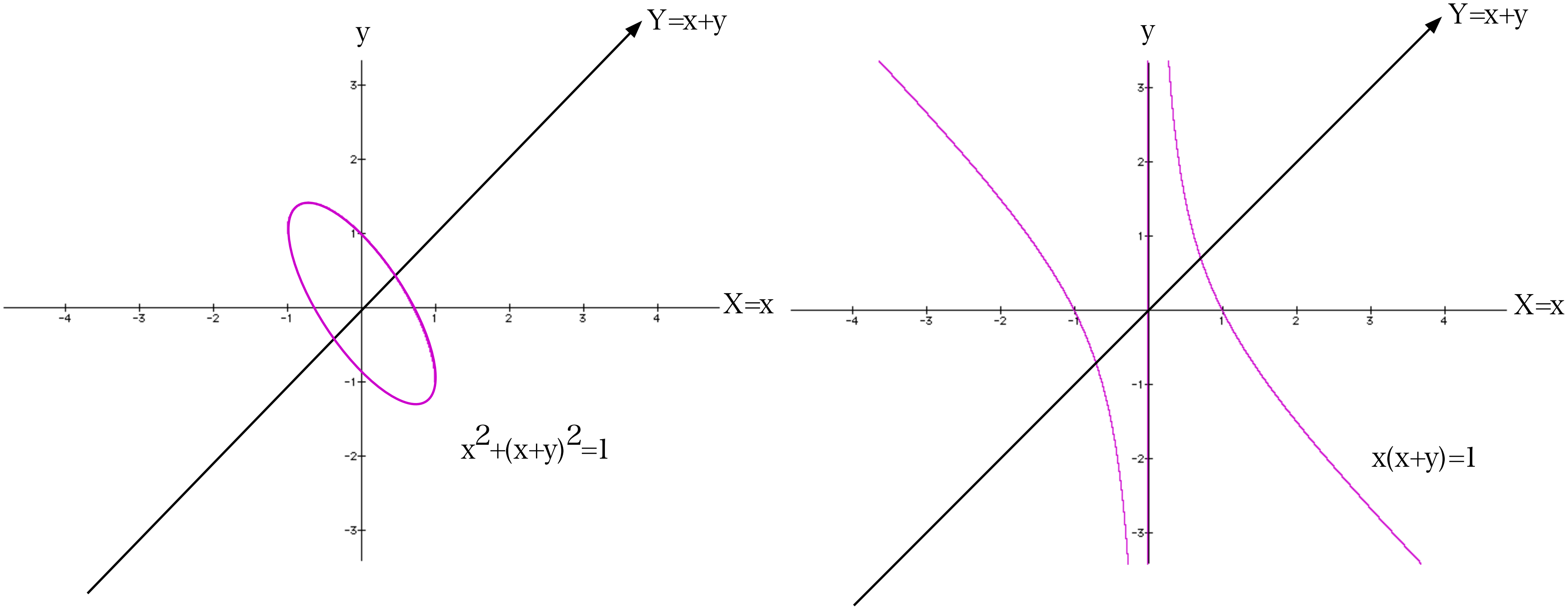
D<0



D>0

二次式の平方完成(二変数の場合)

これより $D <, > 0$ に応じ、楕円, 双曲線となる。



D<0　　D>0

$a = 0$ の場合は双曲線 $(b \neq 0)$。

二次式の平方完成(二変数の場合)

[練習問題]

次の方程式が x-y 平面上に定める曲線を描け。

(1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$

(2) $x^2 - 6xy + y^2 = -1$

宿題

問題集 (「ドリルと演習シリーズ微分積分」電気書院)
セクション 1〜セクション 6。