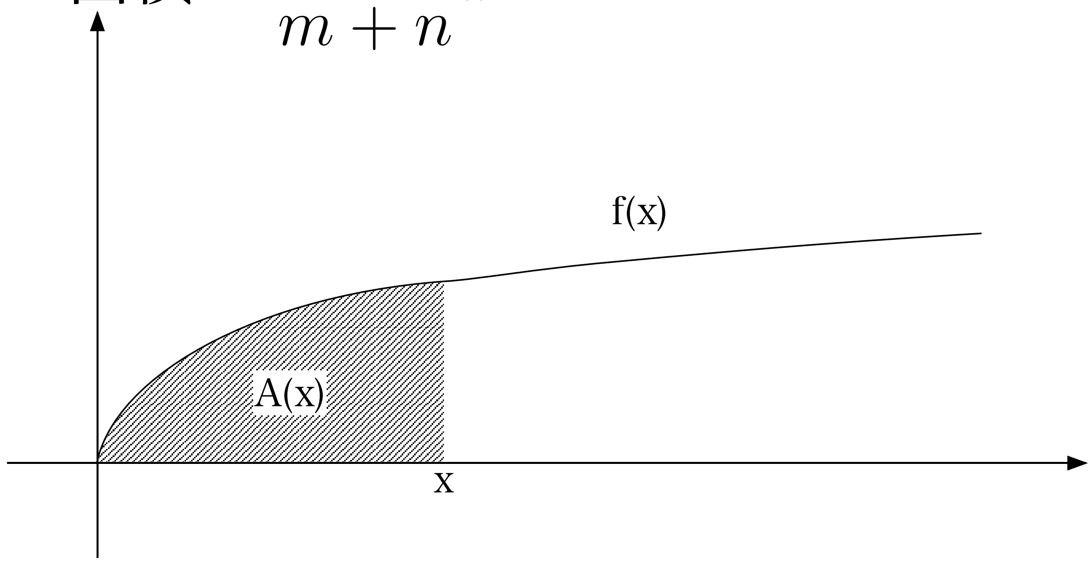
ニュートンの微積分法

曲線の下の面積

[公式]

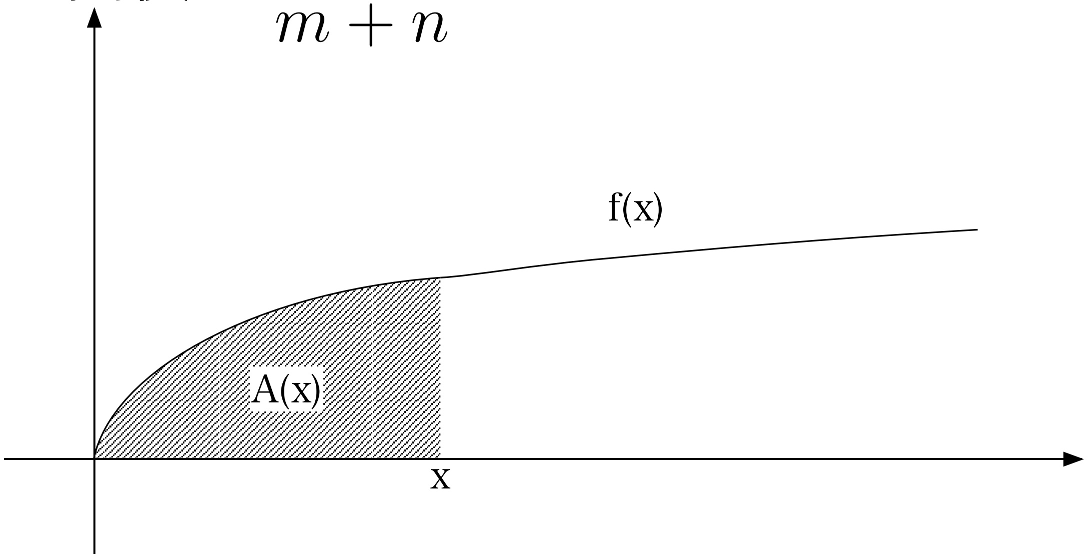
$c > 0$ と自然数 m, n に対し下図の曲線を $cx^{\frac{m}{n}}$ とすると、その下の部分の面積は $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$



曲線の下の面積

[公式]

$c > 0$ と自然数 m, n に対し下図の曲線を $cx^{\frac{m}{n}}$ とすると、その下の部分の面積は $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$

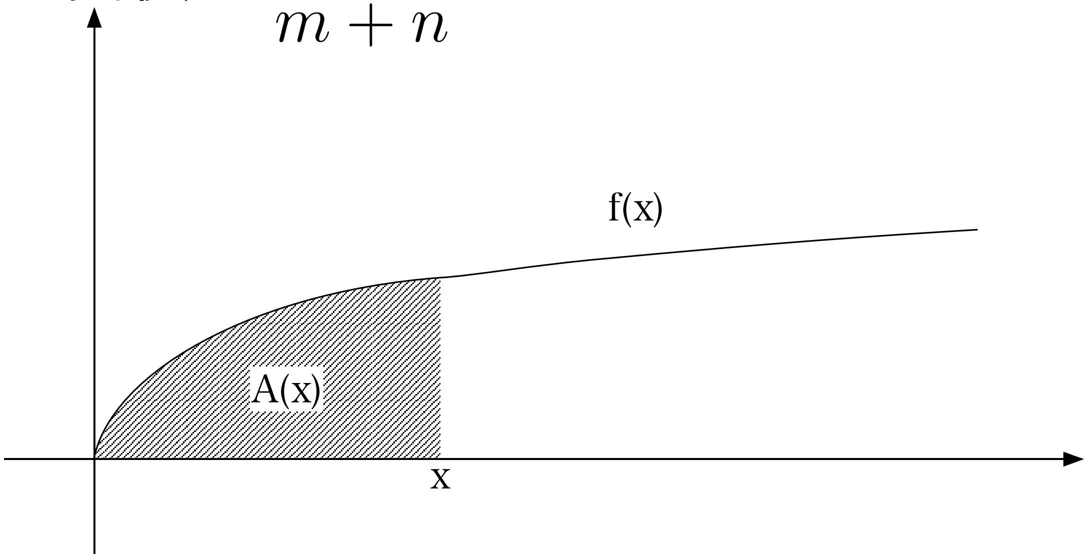


ニュートンの議論を次の二つのステップで示す：

曲線の下の面積

[公式]

$c > 0$ と自然数 m, n に対し下図の曲線を $cx^{\frac{m}{n}}$ とすると、その下の部分の面積は $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$



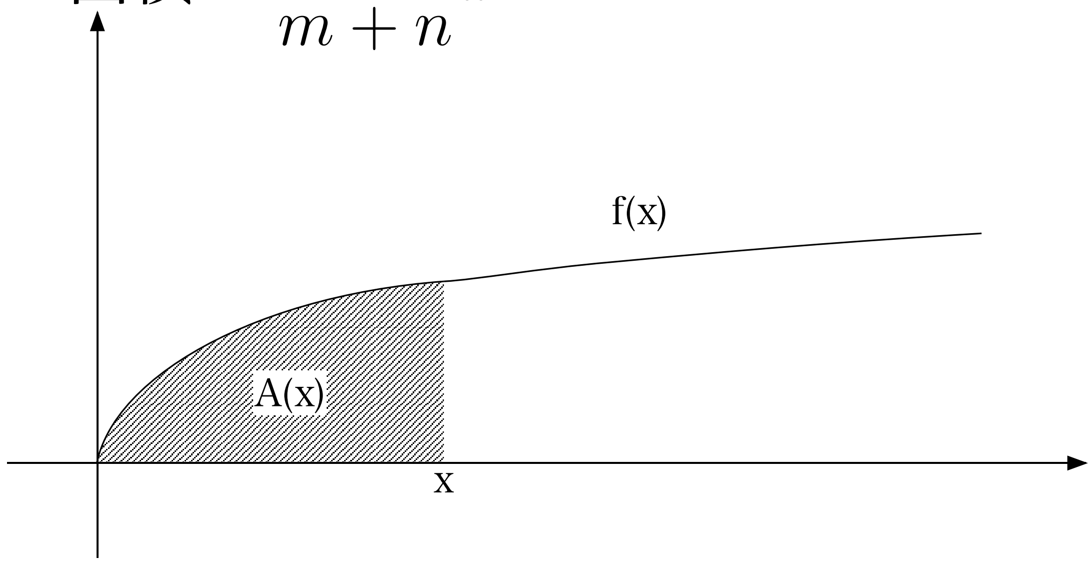
ニュートンの議論を次の二つのステップで示す：

1．$F(x) = kx^s$, $s = \dfrac{m}{n}$ とすると $F'(x) = ksx^{s-1}$

曲線の下の面積

[公式]

$c > 0$ と自然数 m, n に対し下図の曲線を $cx^{\frac{m}{n}}$ とすると、その下の部分の面積は $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$



ニュートンの議論を次の二つのステップで示す：

1. $F(x) = kx^s$, $s = \dfrac{m}{n}$ とすると $F'(x) = ksx^{s-1}$
2. 曲線の下の部分の面積を $A(x)$ とすると $A'(x) = f(x)$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。
方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので
$(y + \Delta y)^n = k^n \left(x + \Delta x\right)^m$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。

方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので

$(y + \Delta y)^n = k^n (x + \Delta x)^m$　つまり

$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。

方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので

$(y + \Delta y)^n = k^n (x + \Delta x)^m$ 　つまり

$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

P がグラフ上にあることより $y^n = k^n x^m$ を両辺から引いて

$ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ をとる。

方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので

$(y+\Delta y)^n = k^n (x+\Delta x)^m$　つまり

$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

P がグラフ上にあることより $y^n = k^n x^m$ を両辺から引いて

$ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$　よって

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} + \cdots$$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。

方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので

$(y + \Delta y)^n = k^n (x + \Delta x)^m$　つまり

$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

P がグラフ上にあることより $y^n = k^n x^m$ を両辺から引いて

$ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$　よって

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \dfrac{m}{n} \dfrac{x^{m-1}}{y^{n-1}} + \cdots$　従って

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{k^{n-1} x^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。

方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので

$(y + \Delta y)^n = k^n (x + \Delta x)^m$　つまり

$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

P がグラフ上にあることより $y^n = k^n x^m$ を両辺から引いて

$ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$　よって

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \dfrac{m}{n} \dfrac{x^{m-1}}{y^{n-1}} + \cdots$　従って

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{k^{n-1} x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = k \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$$

曲線の下の面積

$y = kx^{\frac{m}{n}}$ グラフ上の点 $P(x, y)$ を固定し、同じグラフ上に $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ をとる。

方程式の両辺を n 乗すると $y^n = k^n x^m$ で、Q はこのグラフ上のあるので

$(y + \Delta y)^n = k^n (x + \Delta x)^m$ つまり

$y^n + ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$

P がグラフ上にあることより $y^n = k^n x^m$ を両辺から引いて

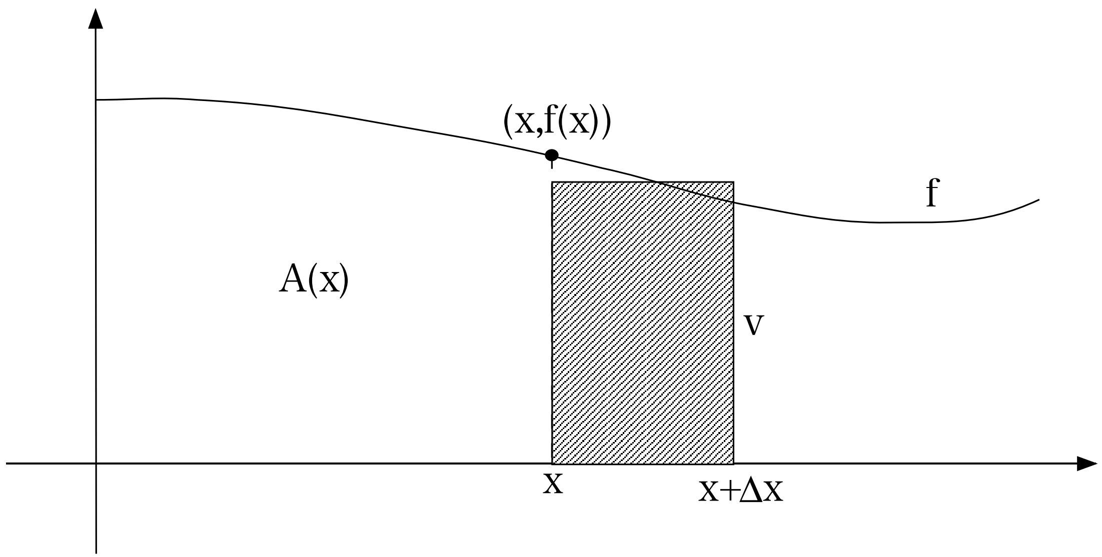
$ny^{n-1}\Delta y + \cdots = k^n \left(mx^{m-1}\Delta x + \cdots\right)$ よって

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \dfrac{m}{n} \dfrac{x^{m-1}}{y^{n-1}} + \cdots$ 従って

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k^n \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{k^{n-1} x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = k\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = ksx^{s-1}$$

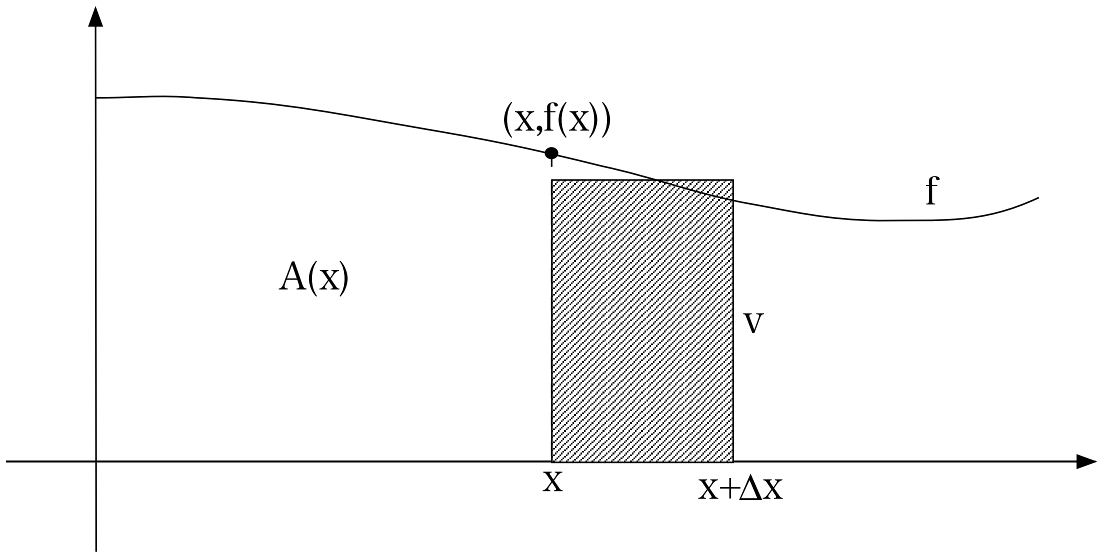
曲線の下の面積

関数 f のグラフの下の 0 から x までの範囲の面積を $A(x)$ とし、小さな数 Δx に対し、グラフの下の x から $x+\Delta x$ までの面積と等しい面積を持つ長方形の高さを v とする。



曲線の下の面積

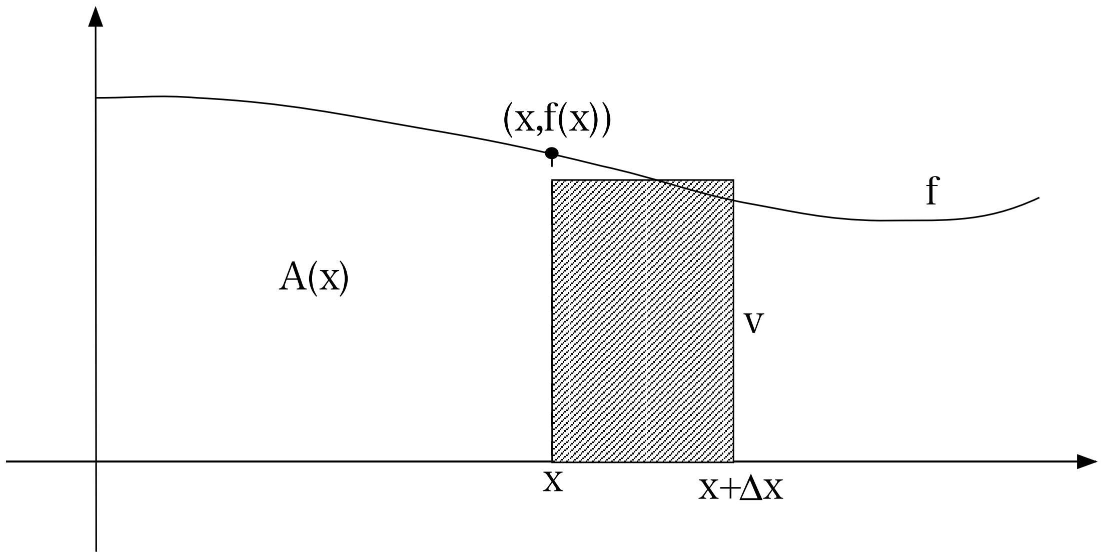
関数 f のグラフの下の 0 から x までの範囲の面積を $A(x)$ とし、小さな数 Δx に対し、グラフの下の x から $x+\Delta x$ までの面積と等しい面積を持つ長方形の高さを v とする。



すなわち $A(x+\Delta x) = A(x) + v\Delta x$

曲線の下の面積

関数 f のグラフの下の 0 から x までの範囲の面積を $A(x)$ とし、小さな数 Δx に対し、グラフの下の x から $x+\Delta x$ までの面積と等しい面積を持つ長方形の高さを v とする。

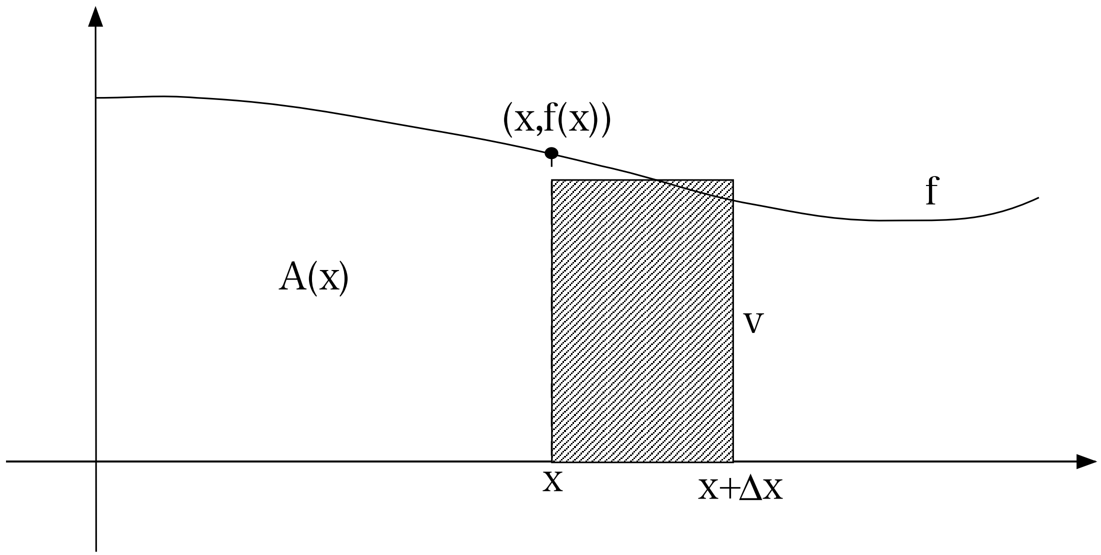


すなわち $A(x+\Delta x) = A(x) + v\Delta x$

このとき、$\Delta x \to 0$ とすると $v \to f(x)$ となるので、

曲線の下の面積

関数 f のグラフの下の 0 から x までの範囲の面積を $A(x)$ とし、小さな数 Δx に対し、グラフの下の x から $x+\Delta x$ までの面積と等しい面積を持つ長方形の高さを v とする。



すなわち $A(x+\Delta x) = A(x) + v\Delta x$

このとき、$\Delta x \to 0$ とすると $v \to f(x)$ となるので、

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v = f(x)$$

曲線の下の面積

以上より

曲線の下の面積

以上より

1. $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ は $cx^{\frac{m}{n}}$ の原始関数であり

曲線の下の面積

以上より

１．$\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ は $cx^{\frac{m}{n}}$ の原始関数であり

２．一般に $A(x)$ は $f(x)$ の原始関数である：

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x)$$

曲線の下の面積

以上より

1. $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ は $cx^{\frac{m}{n}}$ の原始関数であり

2. 一般に $A(x)$ は $f(x)$ の原始関数である：

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x)$$

従って、微積分法の基本定理より

$$\int_a^b c\,x^r dx = \frac{c}{r+1}b^{r+1} - \frac{c}{r+1}a^{r+1}, \quad \left(r = \frac{m}{n}\right)$$

曲線の下の面積

以上より

1. $\dfrac{cn}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ は $cx^{\frac{m}{n}}$ の原始関数であり

2. 一般に $A(x)$ は $f(x)$ の原始関数である：

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x)$$

従って、微積分法の基本定理より

$$\int_a^b c\,x^r dx = \frac{c}{r+1}b^{r+1} - \frac{c}{r+1}a^{r+1}, \quad \left(r = \frac{m}{n}\right)$$

$a = 0$ とすると最初の **[公式]** が得られる。

関数のべき級数による近似

関数のべき級数による近似

関数 $\dfrac{1}{1+x}$ は $|x|<1$ の範囲で次のように展開出来る。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

関数のべき級数による近似

関数 $\dfrac{1}{1+x}$ は $|x|<1$ の範囲で次のように展開出来る。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

これより、以下の近似が成り立つ：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \approx \int_0^1 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n dx$$

関数のべき級数による近似

関数 $\dfrac{1}{1+x}$ は $|x|<1$ の範囲で次のように展開出来る。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

これより、以下の近似が成り立つ：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \approx \int_0^1 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n dx$$

同様に $\sqrt{1+x}$ は $|x|<1$ の範囲で次のように展開出来る。

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n + \cdots$$

但し、$\displaystyle \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}$

関数のべき級数による近似

更にニュートンは

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

等も示している。

関数のべき級数による近似

更にニュートンは

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

等も示している。

これらを用いると

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \int_0^1 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} dx$$

等も成り立つ。

関数の近似と **Taylor** 展開(現代の理論)

関数の近似と Taylor 展開 (現代の理論)

n 回微分可能な関数 $f(x)$ に対して、

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n(x)(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (\ 0<\theta_n(x)<1\ )$$

が成り立つ。これを Taylor 展開とよぶ。 $R_n(x)$ は剰余項とよばれる。

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

n 回微分可能な関数 $f(x)$ に対して、

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n(x)(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (\ 0<\theta_n(x)<1\ )$$

が成り立つ。これを Taylor 展開とよぶ。$R_n(x)$ は剰余項とよばれる。特に、$x_0=0$ のときは Maclaurin 展開とよぶ：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

関数の近似と Taylor 展開 (現代の理論)

n 回微分可能な関数 $f(x)$ に対して、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_n(x)(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (\ 0 < \theta_n(x) < 1\ )$$

が成り立つ。これを Taylor 展開とよぶ。$R_n(x)$ は剰余項とよばれる。特に、$x_0 = 0$ のときは Maclaurin 展開とよぶ：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

更に、$f(x)$ が無限回微分可能で $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ が成り立つときには、Taylor 展開は無限項まで出来る：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[Taylor 展開の証明]

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[Taylor 展開の証明]

x, x_0 を固定し、次が成り立つように K をとる。

$$\frac{K}{n!}(x-x_0)^n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[Taylor 展開の証明]

x, x_0 を固定し、次が成り立つように K をとる。

$$\frac{K}{n!}(x-x_0)^n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

このとき、$F(t)$ を以下のように置く：

$$F(t) = f(x) - \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{K}{n!}(x-t)^n \right\}$$

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[Taylor 展開の証明]

x, x_0 を固定し、次が成り立つように K をとる。

$$\frac{K}{n!}(x-x_0)^n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

このとき、$F(t)$ を以下のように置く：

$$F(t) = f(x) - \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{K}{n!}(x-t)^n \right\}$$

すると、$F(x) = F(x_0) = 0$ なので平均値の定理により

$F'(\xi) = 0$ となる ξ が x と x_0 の間にある。

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

ここで

$$F(t)' = -\Big\{\frac{f'(t)}{0!} - \frac{f'(t)}{1!}\cdot 1 + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t)$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\cdot(n-1)(x-t)^{n-2}$$
$$+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)} - \frac{K}{n!}\cdot n(x-t)^{n-1}\Big\}$$
$$= \frac{K - f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

なので、

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

ここで

$$F(t)' = -\Big\{\frac{f'(t)}{0!} - \frac{f'(t)}{1!}\cdot 1 + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t)$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\cdot(n-1)(x-t)^{n-2}$$

$$+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)} - \frac{K}{n!}\cdot n(x-t)^{n-1}\Big\}$$

$$= \frac{K - f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

なので、 $K = f^{(n)}(\xi)$ となり、

関数の近似と Taylor 展開 (現代の理論)

ここで

$$F(t)' = -\Big\{\frac{f'(t)}{0!} - \frac{f'(t)}{1!}\cdot 1 + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t)$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\cdot(n-1)(x-t)^{n-2}$$
$$+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)} - \frac{K}{n!}\cdot n(x-t)^{n-1}\Big\}$$
$$= \frac{K-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

なので、 $K = f^{(n)}(\xi)$ となり、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$\xi = (x_0 + \theta_n(x)(x-x_0))$, $(0 < \theta_n(x) < 1)$ が成り立つ。

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[例]

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[例]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[例]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[例]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開 (現代の理論)

[例]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開(現代の理論)

[例]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

全て $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ。

関数の近似と Taylor 展開 (現代の理論)

[定理]

無限項まで Taylot 展開出来るときは、次の「項別積分」ができる：

$$\int f(x)dx = \int f(x_0)dx + \int f'(x_0)(x-x_0)dx + \cdots$$
$$+ \int \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n dx + \cdots$$
$$= f(x_0)(x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \cdots$$

関数の近似と Taylor 展開 (現代の理論)

[定理]

同様に「項別微分」も出来る：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{f(x_0)\}' + \{f'(x_0)(x-x_0)\}' + \cdots \\ &\qquad + \left\{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right\}' + \cdots \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots \\ &\qquad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$