

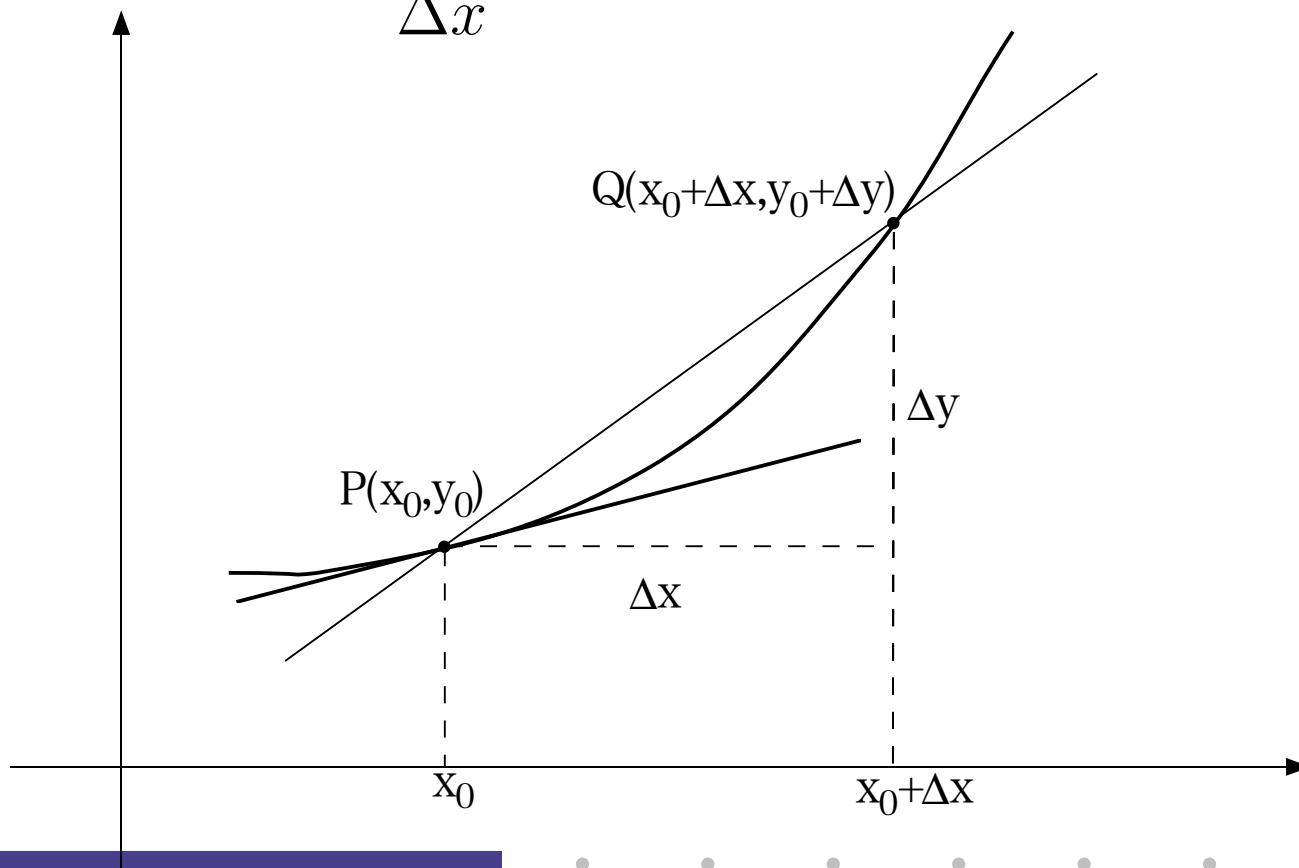
ライプニッツの微積分法

曲線の接線

曲線上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線を求めることを考える。

曲線の接線

曲線上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線を求めることを考える。
曲線上で P の近く点 $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ を考えると、 P, Q を通る直線の傾きは $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



曲線の接線

ここで Δx を 0 に近づけると、この比は P における接線の傾きに近づくと考えられるのは、合理的と考えられる。

曲線の接線

ここで Δx を 0 に近づけると、この比は P における接線の傾きに近づくと考えられる。

つまり、 P における曲線の接線の傾きを m_P として

$$m_P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

曲線の接線

ここで Δx を 0 に近づけると、この比は P における接線の傾きに近づくと考えられる。

つまり、 P における曲線の接線の傾きを m_P として

$$m_P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

よって求める接線の方程式は

$$y - y_0 = m_P(x - x_0)$$

となる。

曲線の接線

具体例

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2$$

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2 \quad \text{つまり}$$

$$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2 \quad \text{である。}$$

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2 \quad \text{つまり}$$

$$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2 \quad \text{である。}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad \text{なので} \quad 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = 0$$

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2 \quad \text{つまり}$$

$$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2 \quad \text{である。}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad \text{なので} \quad 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = 0$$

$$\text{これより} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x_0 + \Delta x}{2y_0 + \Delta y}$$

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2 \quad \text{つまり}$$

$$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2 \quad \text{である。}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad \text{なので} \quad 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = 0$$

$$\text{これより} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x_0 + \Delta x}{2y_0 + \Delta y}$$

$$m_P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{x_0}{y_0}$$

曲線の接線

具体例

円： $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2 \quad \text{つまり}$$

$$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2 \quad \text{である。}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad \text{なので} \quad 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = 0$$

$$\text{これより} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x_0 + \Delta x}{2y_0 + \Delta y}$$

$$m_P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{x_0}{y_0}$$

よって、 P における接線の方程式は

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

現代的な立場

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。

このとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。

このとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。

[例]

実数 $a > 0$ について、指数関数

$$y = a^x$$

は x の関数である。

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、 y は x の関数であるという。

このとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、 $y = f(x)$ 等と書く。

[例]

実数 $a > 0$ について、指数関数

$$y = a^x$$

は x の関数である。

楕円の方程式

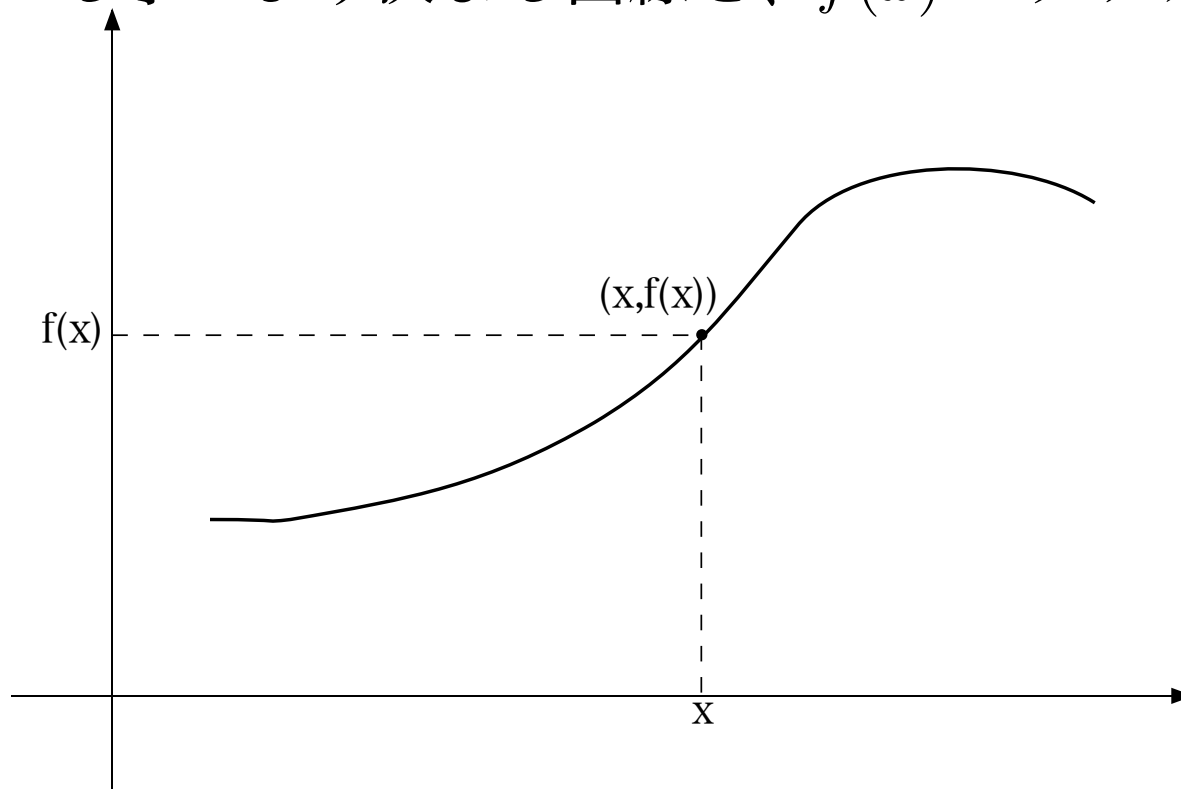
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

については、 y は x の関数ではなく、 x も y の関数ではない。

関数のグラフ

[定義]

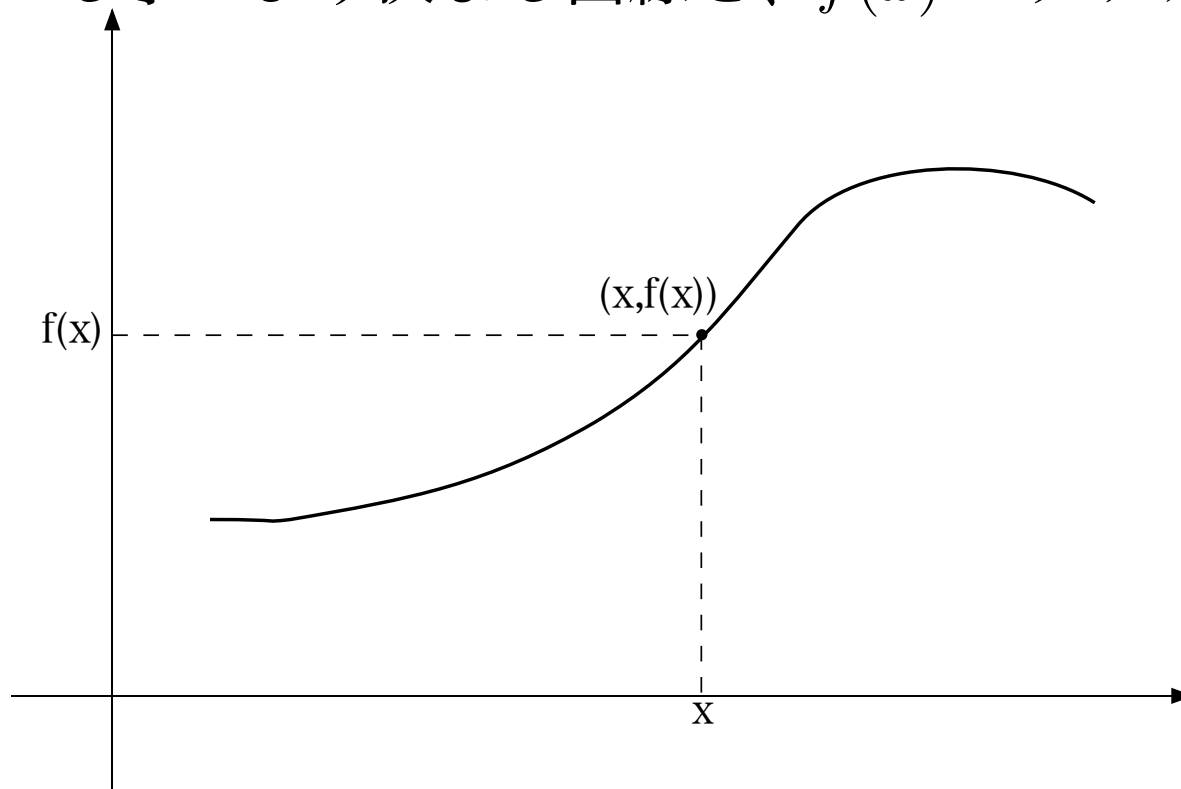
関数 $f(x)$ に対し、各 x に対しデカルト座標上の点 $(x, f(x))$ を対応させる事により決まる曲線を、 $f(x)$ のグラフと呼ぶ。



関数のグラフ

[定義]

関数 $f(x)$ に対し、各 x に対しデカルト座標上の点 $(x, f(x))$ を対応させる事により決まる曲線を、 $f(x)$ のグラフと呼ぶ。



$f(x)$ のグラフは、 $y - f(x) = 0$ の定める曲線である。

関数の近似とグラフの接線

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き換えられる：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き換えられる：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

つまり $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き換えられる：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

つまり $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

このことは $f(x)$ を $x = x_0$ の近くで一次関数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

で近似すると、 x が x_0 に近付くとき「余り」 $R(x)$ は x の一次式より速く 0 に近付くということである。

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き換えられる：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

つまり $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

このことは $f(x)$ を $x = x_0$ の近くで一次関数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

で近似すると、 x が x_0 に近付くとき「余り」 $R(x)$ は x の一次式より速く 0 に近付くということである。よって

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

は $y = f(x)$ のグラフの $(x_0, f(x_0))$ での接線の方程式である。

関数の近似とグラフの接線

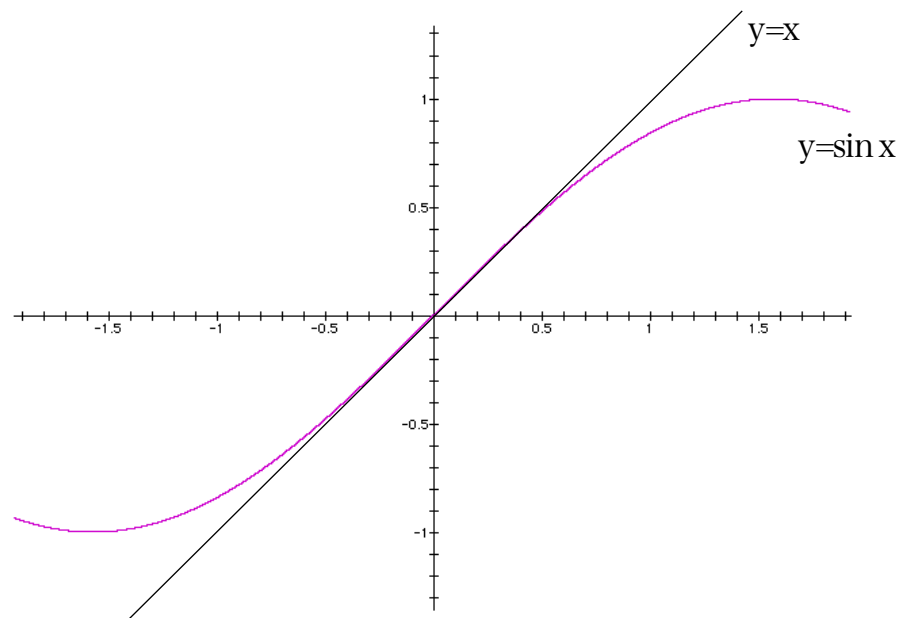
【例】

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$

関数の近似とグラフの接線

【例】

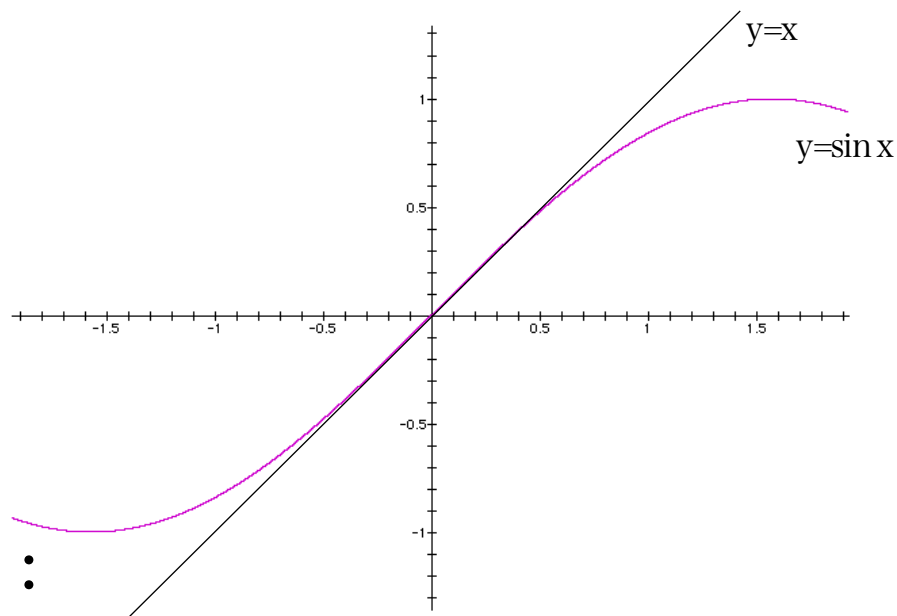
$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



関数の近似とグラフの接線

【例】

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$

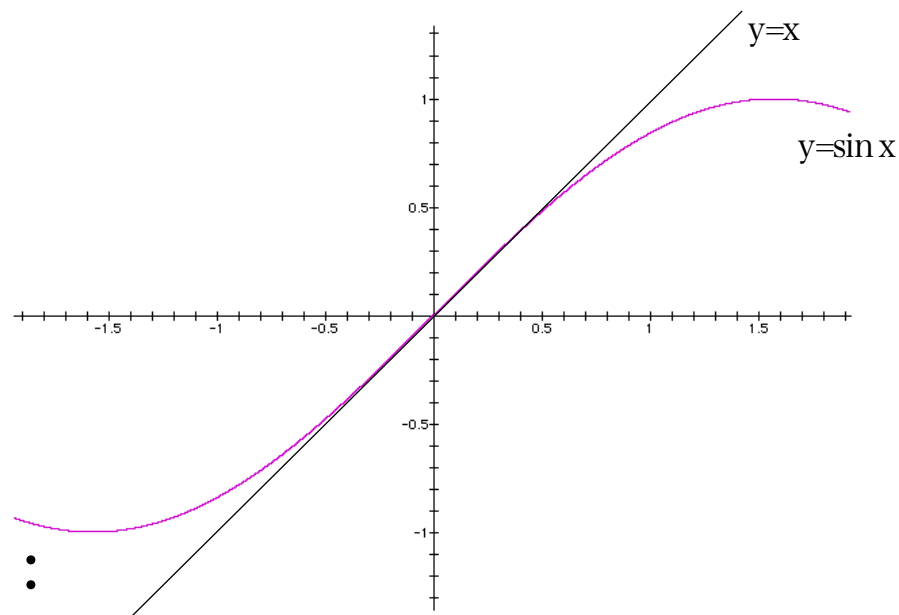


$\sin x - x$ の値：

関数の近似とグラフの接線

【例】

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



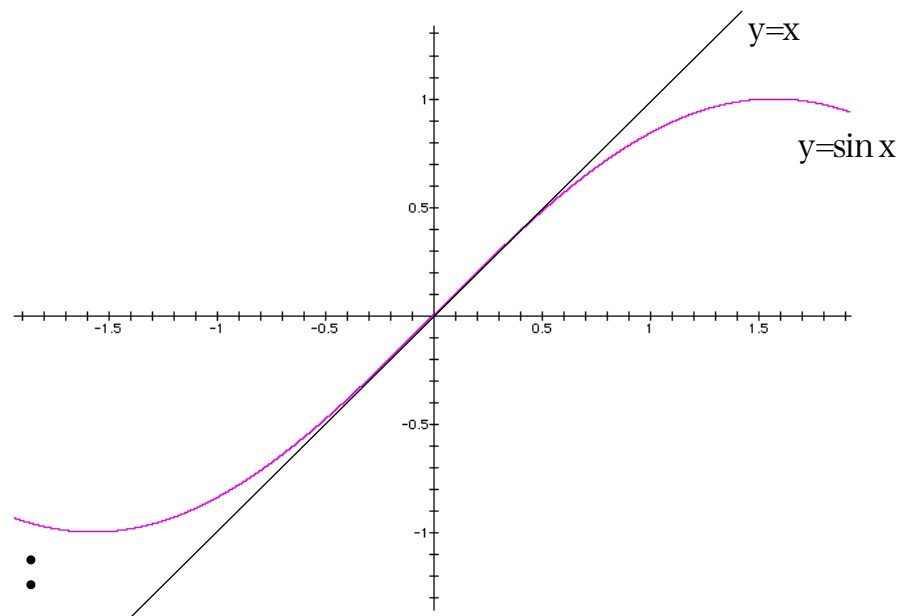
$\sin x - x$ の値：

$$x = 1 : \sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$$

関数の近似とグラフの接線

【例】

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

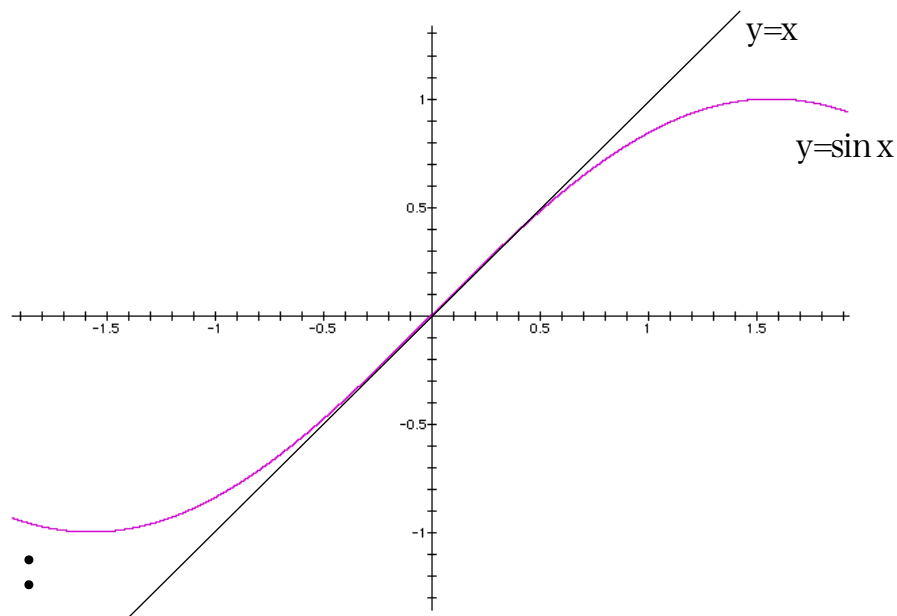
$$x = 1 : \sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$$

$$x = 0.1 : \sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$$

関数の近似とグラフの接線

【例】

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

$$x = 1 : \sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$$

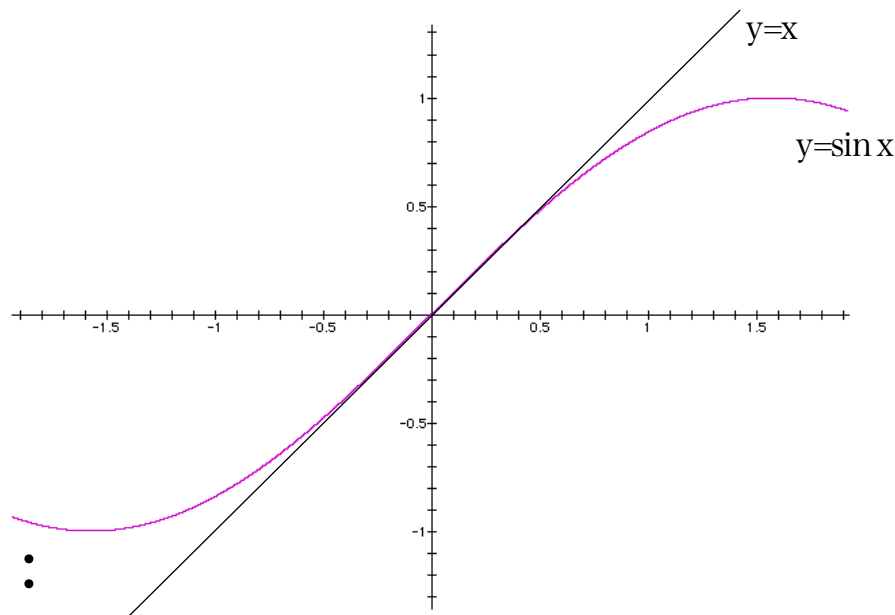
$$x = 0.1 : \sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$$

$$x = 0.01 : \sin 0.01 - 0.01 = 0.00999983 - 0.01 = -0.00000017$$

関数の近似とグラフの接線

【例】

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

$$x = 1 : \sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$$

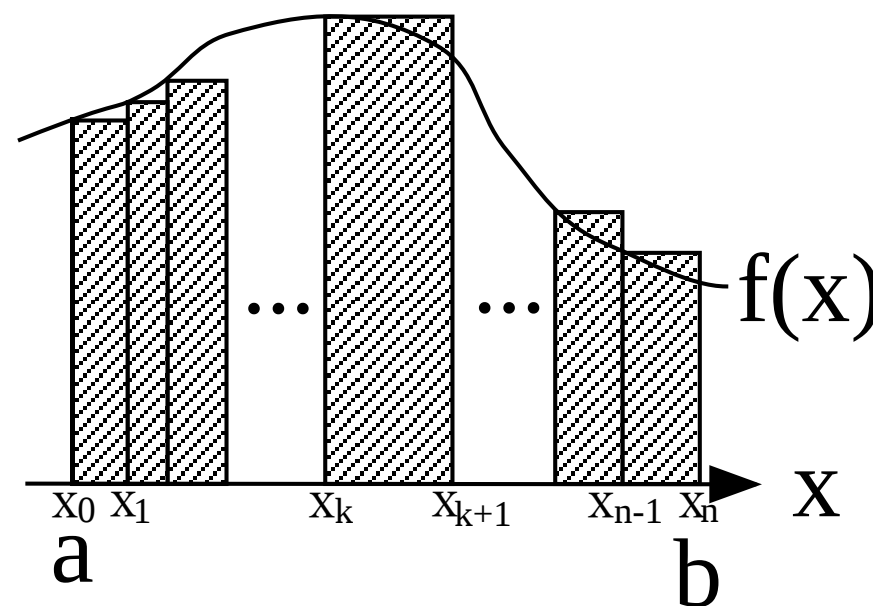
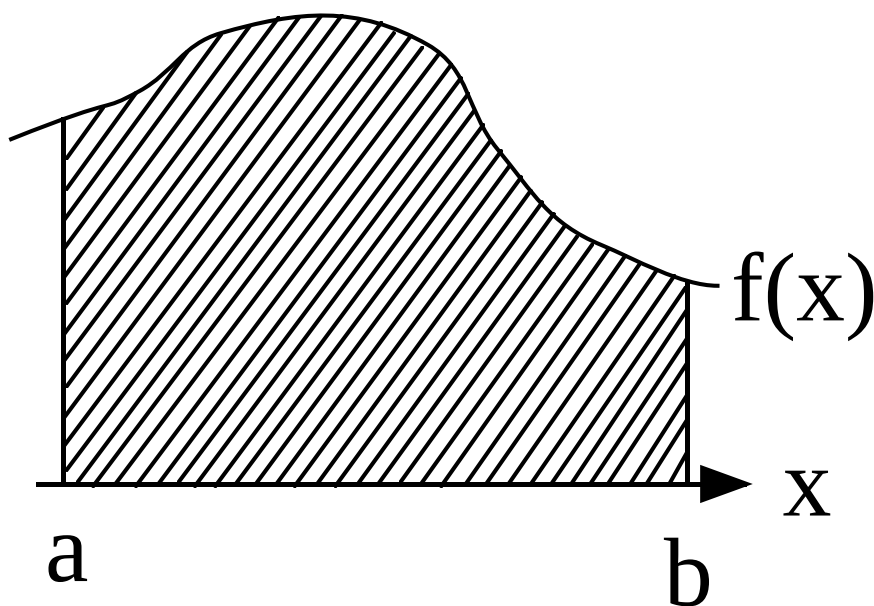
$$x = 0.1 : \sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$$

$$x = 0.01 : \sin 0.01 - 0.01 = 0.00999983 - 0.01 = -0.00000017$$

と、 x が 0 に近づくよりはるかに「速く」0 に近づく。

面積と積分

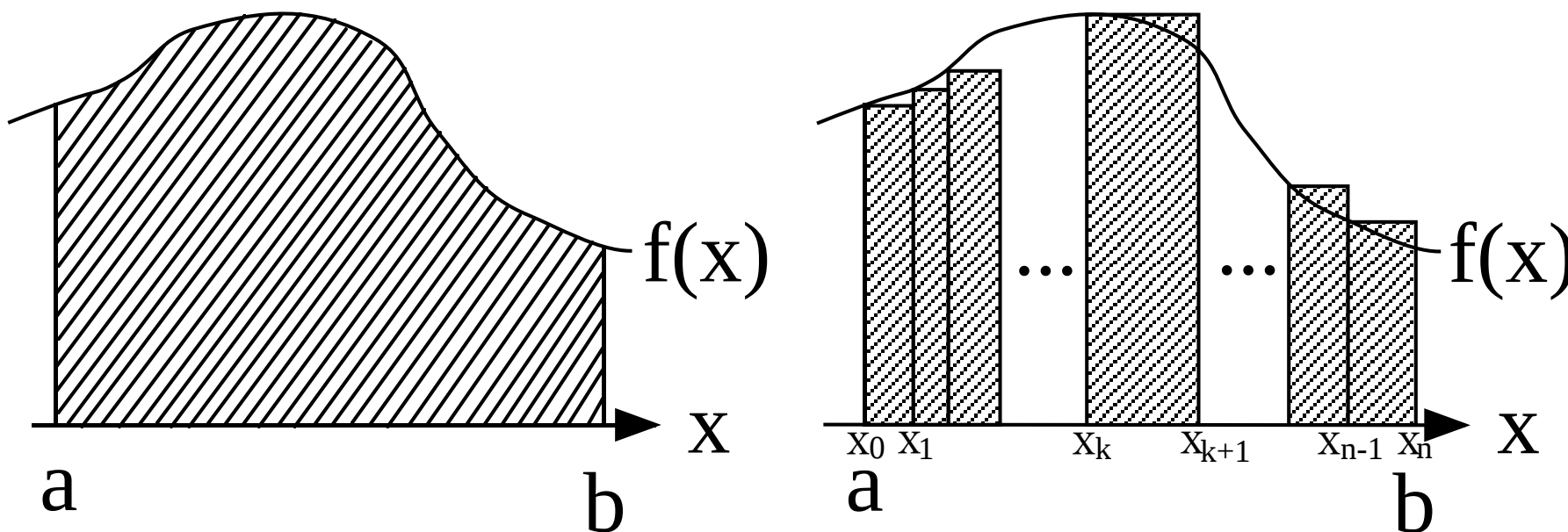
関数 $f(x)$ について、左図の面積を右図の様な長方形の面積の和によって近似する：



但し、各長方形の面積は $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ である。

面積と積分

関数 $f(x)$ について、左図の面積を右図の様な長方形の面積の和によって近似する：



但し、各長方形の面積は $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ である。

このとき、 $x_{k+1} - x_k$ が十分小さいならば、十分良い近似が得られる。

面積と積分

更に、 $dx = x_{k+1} - x_k$ が無限に小さい極限を考え、無限に細い長方形の面積 $f(x)dx$ を全て足し合わせると、求める面積が得られるはずである。

面積と積分

更に、 $dx = x_{k+1} - x_k$ が無限に小さい極限を考え、無限に細い長方形の面積 $f(x)dx$ を全て足し合わせると、求める面積が得られるはずである。

(dx を x の「微分」と呼ぶ)

面積と積分

更に、 $dx = x_{k+1} - x_k$ が無限に小さい極限を考え、無限に細い長方形の面積 $f(x)dx$ を全て足し合わせると、求める面積が得られるはずである。

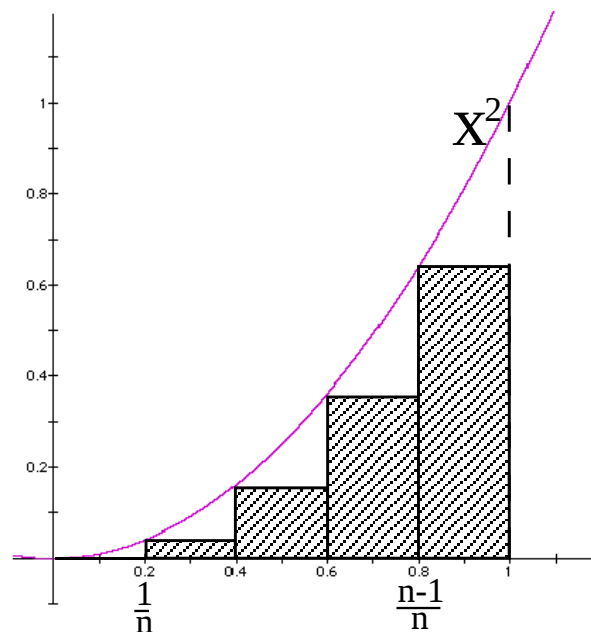
(dx を x の「微分」と呼ぶ)

この無限に細い長方形の面積の和を $\int_a^b f(x)dx$ と書き、 $f(x)$ の a から b までの定積分と呼ぶ。

面積と積分

[例]

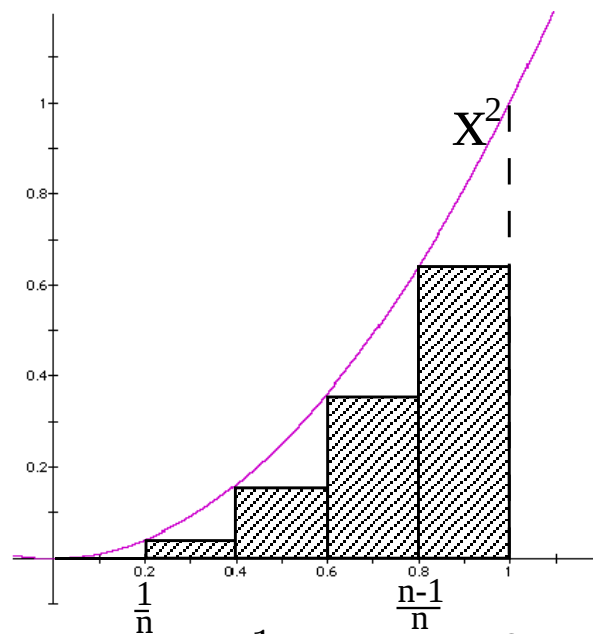
$\int_0^1 x^2 dx$ を下図の和の極限として求める。



面積と積分

[例]

$\int_0^1 x^2 dx$ を下図の和の極限として求める。



幅 $\frac{1}{n}$ が有限のときの和は
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

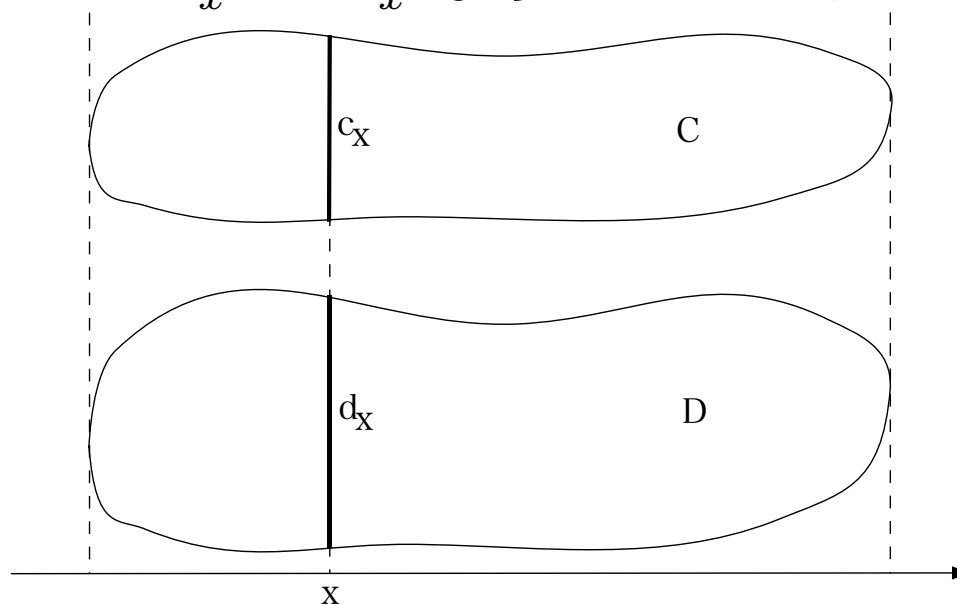
よって $n \rightarrow \infty$ で $\frac{1}{3}$ に収束する。

カバリエリの原理

カバリエリの原理

カバリエリの原理

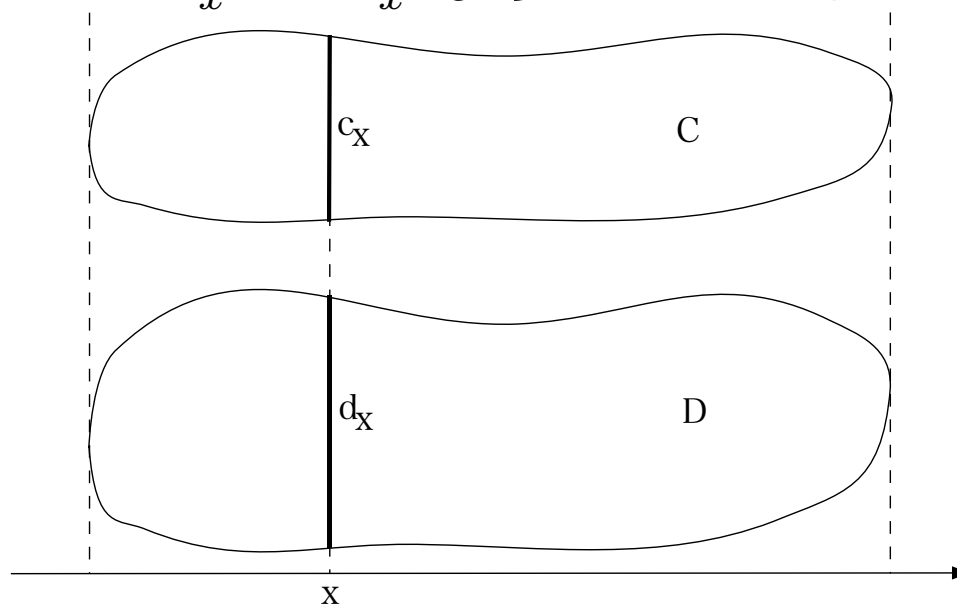
全ての x について $d_x = kc_x$ ならば $D = kC$ である。



カバリエリの原理

カバリエリの原理

全ての x について $d_x = kc_x$ ならば $D = kC$ である。



この原理は、積分の文脈では以下のように書ける：

$$\int_a^b c f dx = c \int_a^b f dx$$

カバリエリの原理

例

カバリエリの原理

例

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分の面積は、

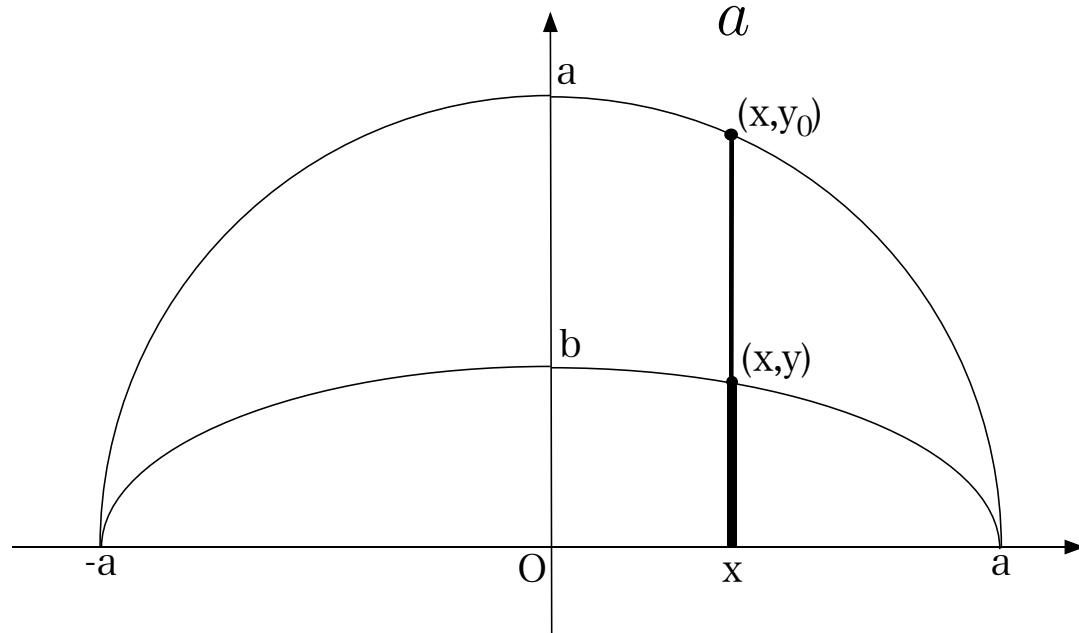
円： $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分の面積の $\frac{b}{a}$ 倍である。

カバリエリの原理

例

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分の面積は、

円： $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分の面積の $\frac{b}{a}$ 倍である。

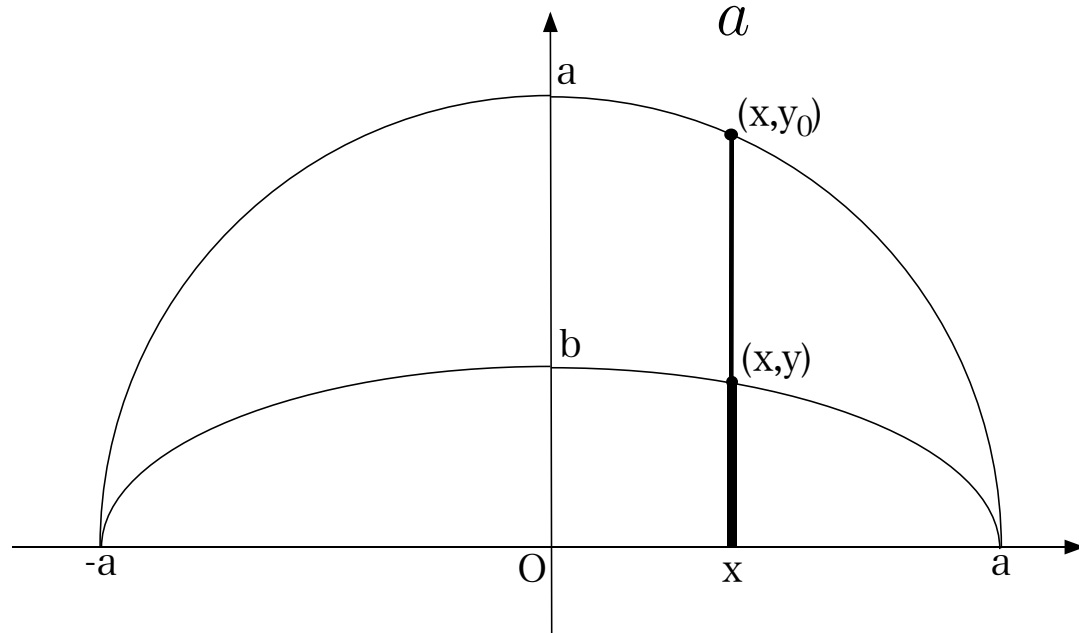


カバリエリの原理

例

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分の面積は、

円： $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分の面積の $\frac{b}{a}$ 倍である。



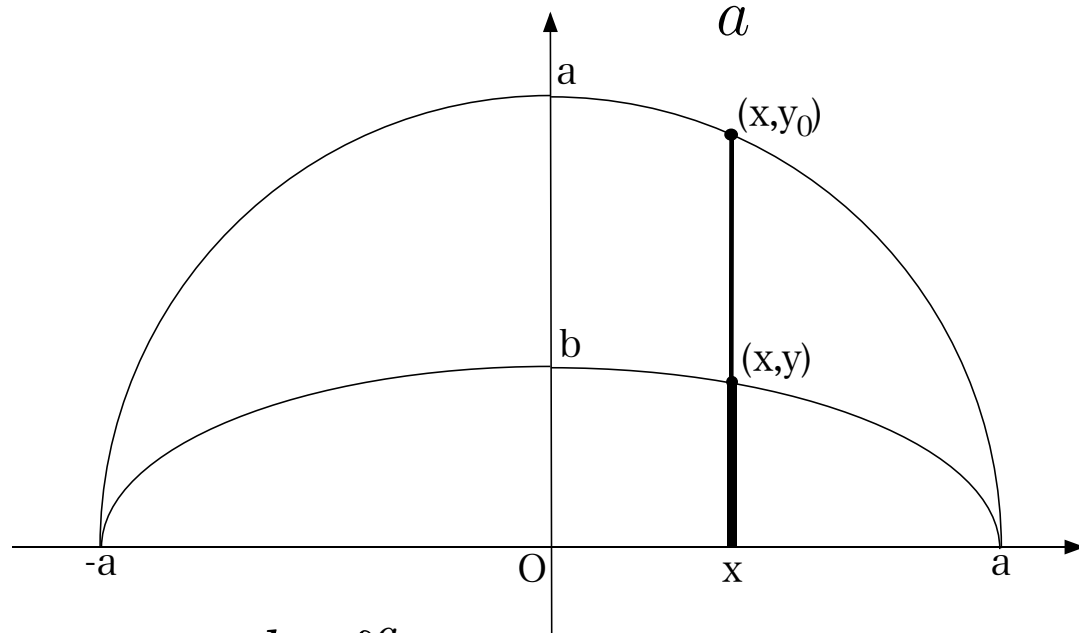
$$\int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

カバリエリの原理

例

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分の面積は、

円： $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分の面積の $\frac{b}{a}$ 倍である。



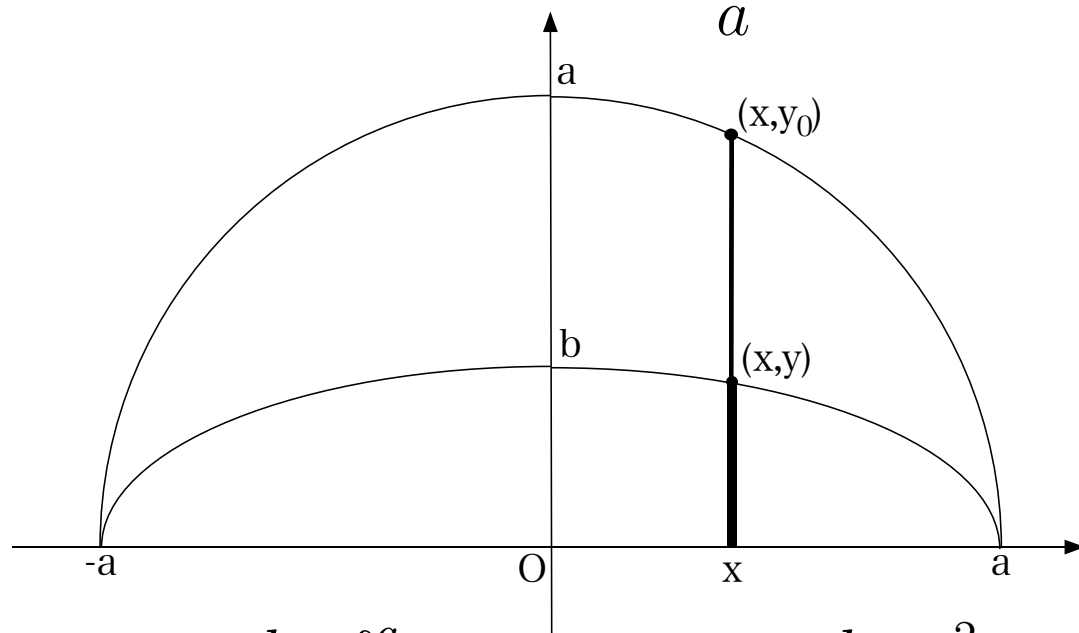
$$\int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

カバリエリの原理

例

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分の面積は、

円： $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分の面積の $\frac{b}{a}$ 倍である。



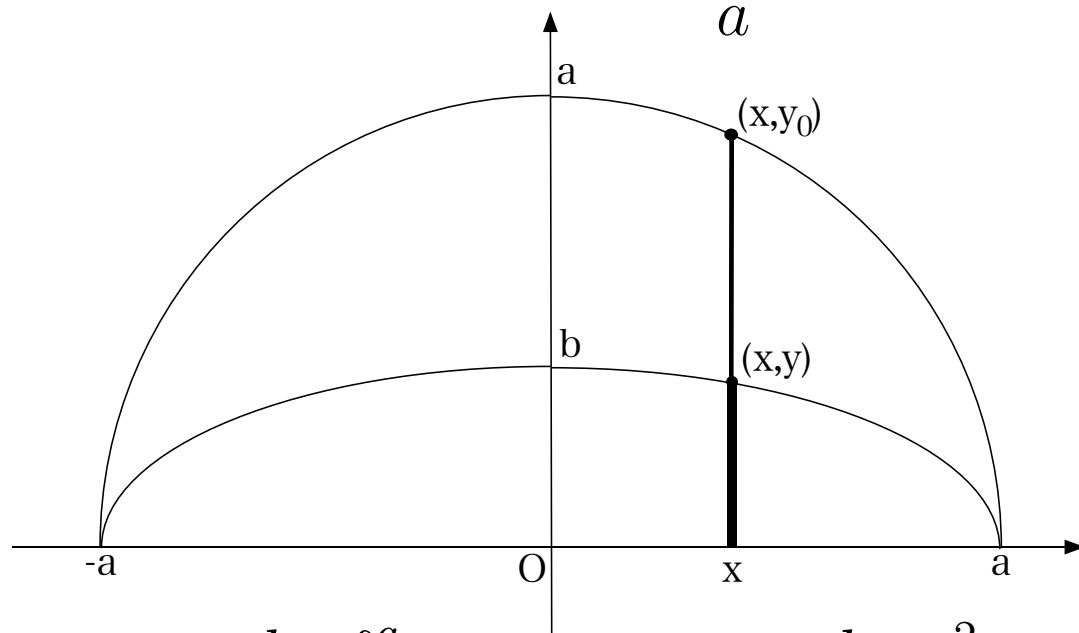
$$\int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \frac{\pi a^2}{2}$$

カバリエリの原理

例

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上半分の面積は、

円： $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分の面積の $\frac{b}{a}$ 倍である。



$$\int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}$$