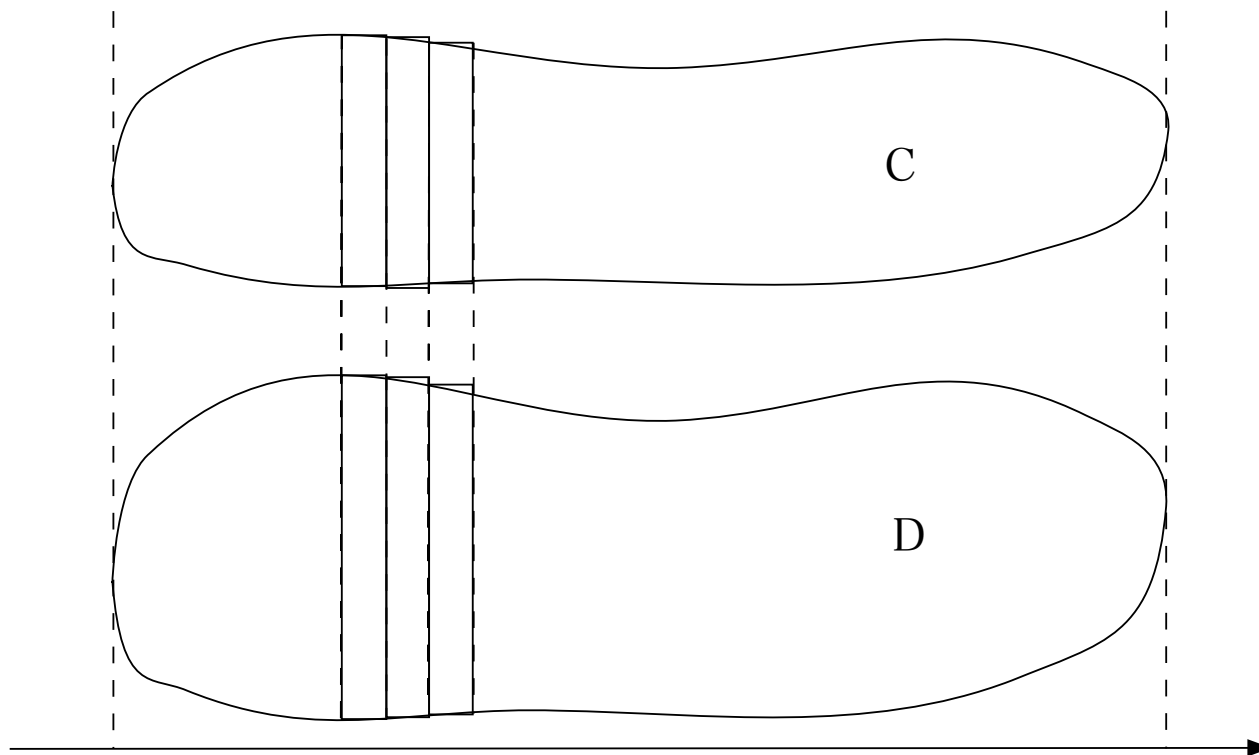


カバリエリの原理

カバリエリの原理

x 軸の上に置かれた二つの図形を、図のように細い短冊に切ってそれぞれの短冊の面積を比較する。



カバリエリの原理

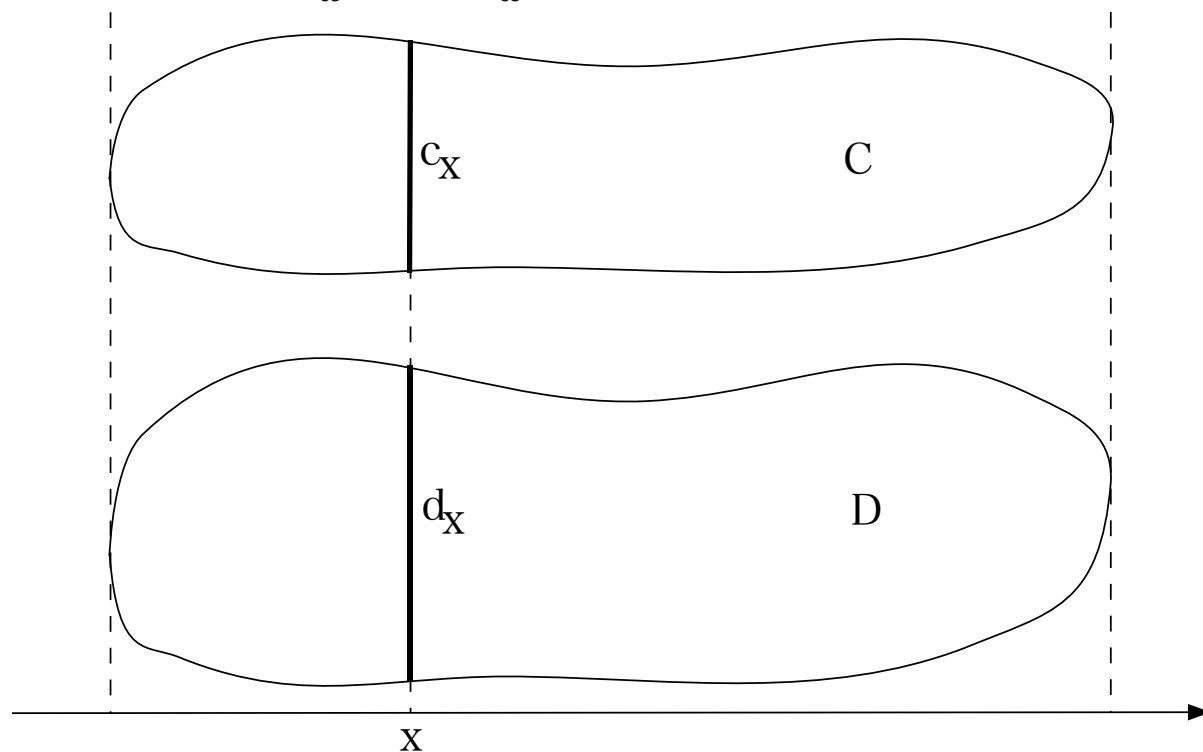
短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

全ての x について $d_x = kc_x$ ならば $D = kC$ である。

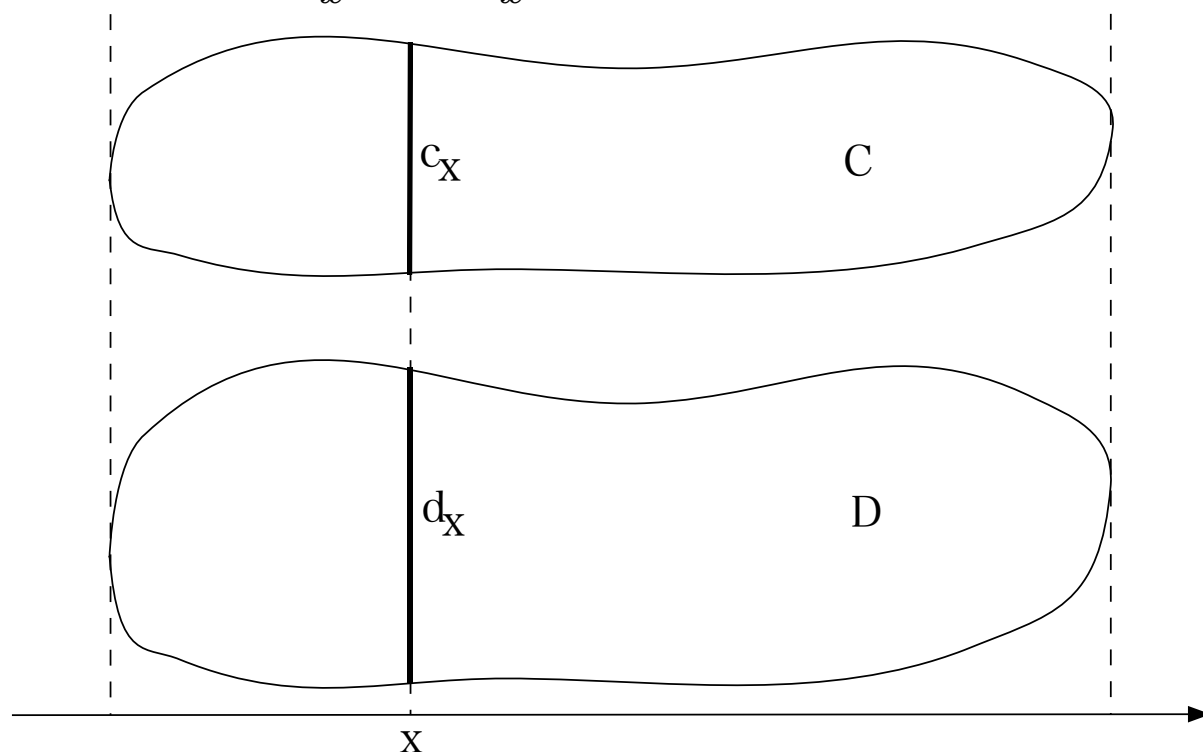


カバリエリの原理

短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

全ての x について $d_x = k c_x$ ならば $D = kC$ である。



注意：この考え方を進めると積分の概念が得られる。

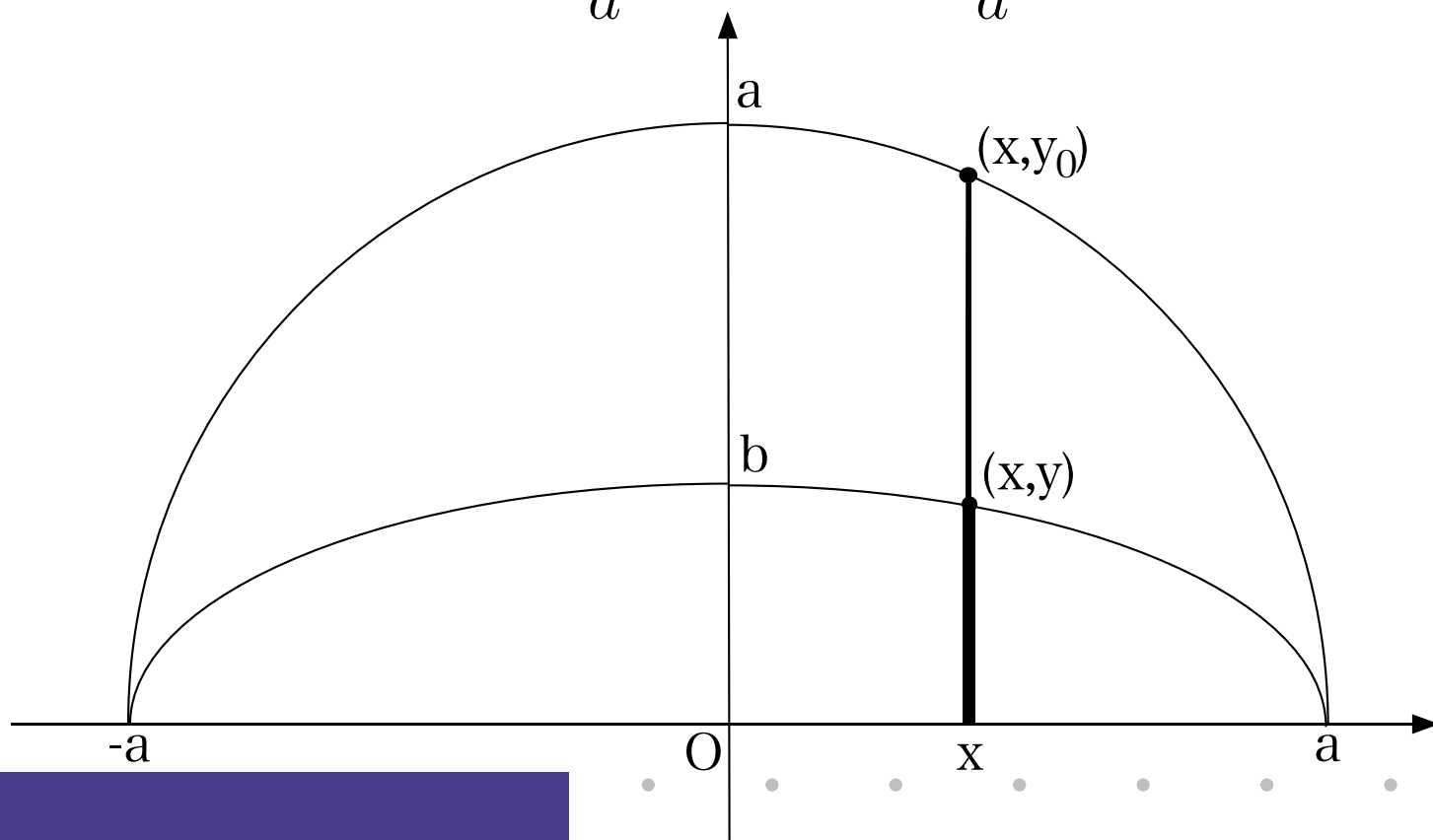
カバリエリの原理

カバリエリの原理を楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に適用すると、面積は πab となる。

カバリエリの原理

カバリエリの原理を楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に適用すると、面積は πab となる。

$$\therefore \text{全ての } x \text{ について } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} y_0$$



惑星軌道の解析

惑星軌道の解析

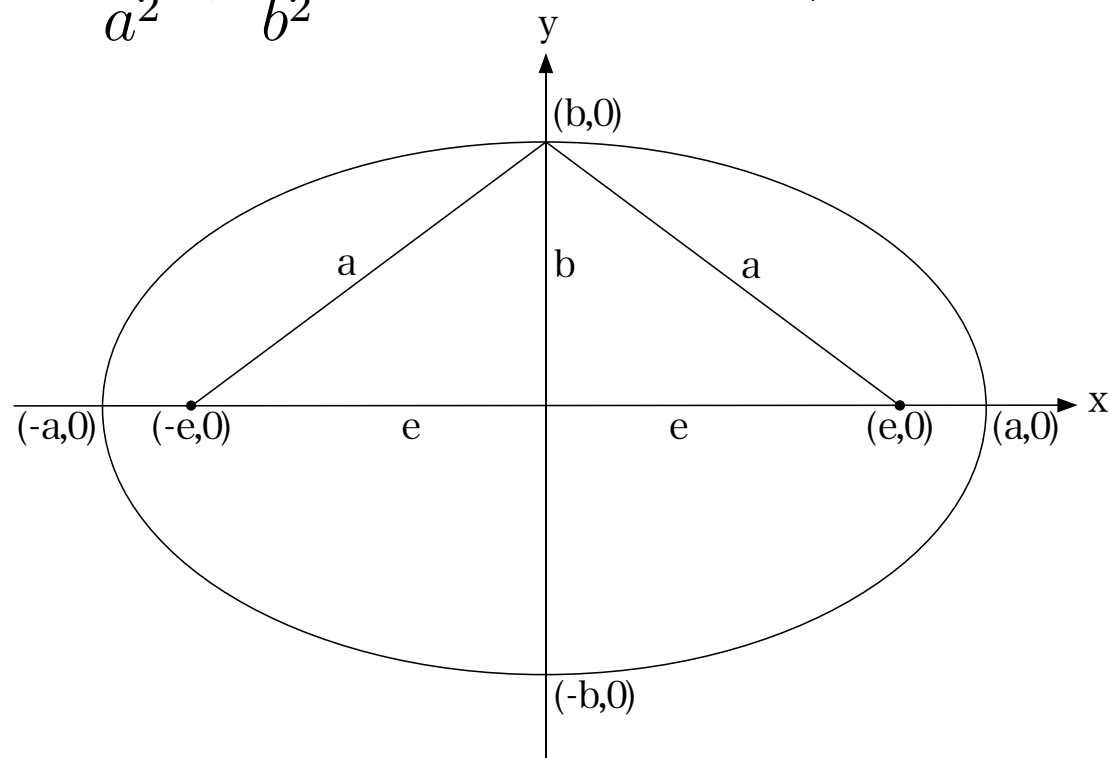
座標平面上で $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようなになる：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

惑星軌道の解析

座標平面上で $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようなになる：

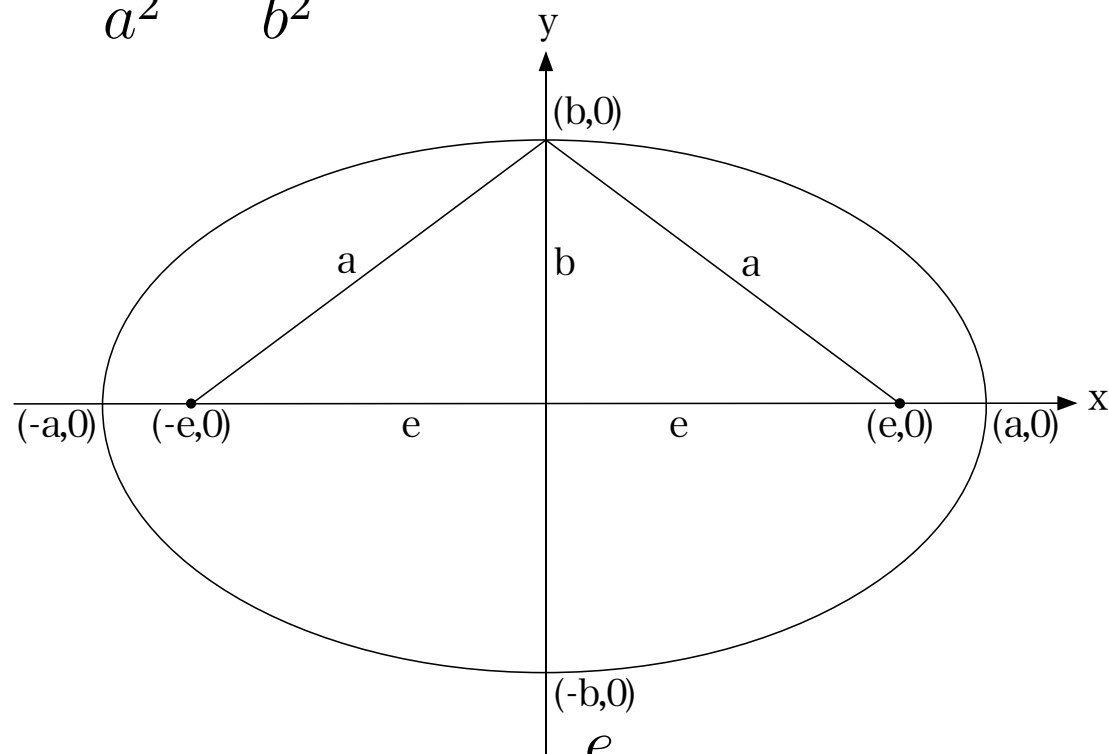
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



惑星軌道の解析

座標平面上で $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようになる：

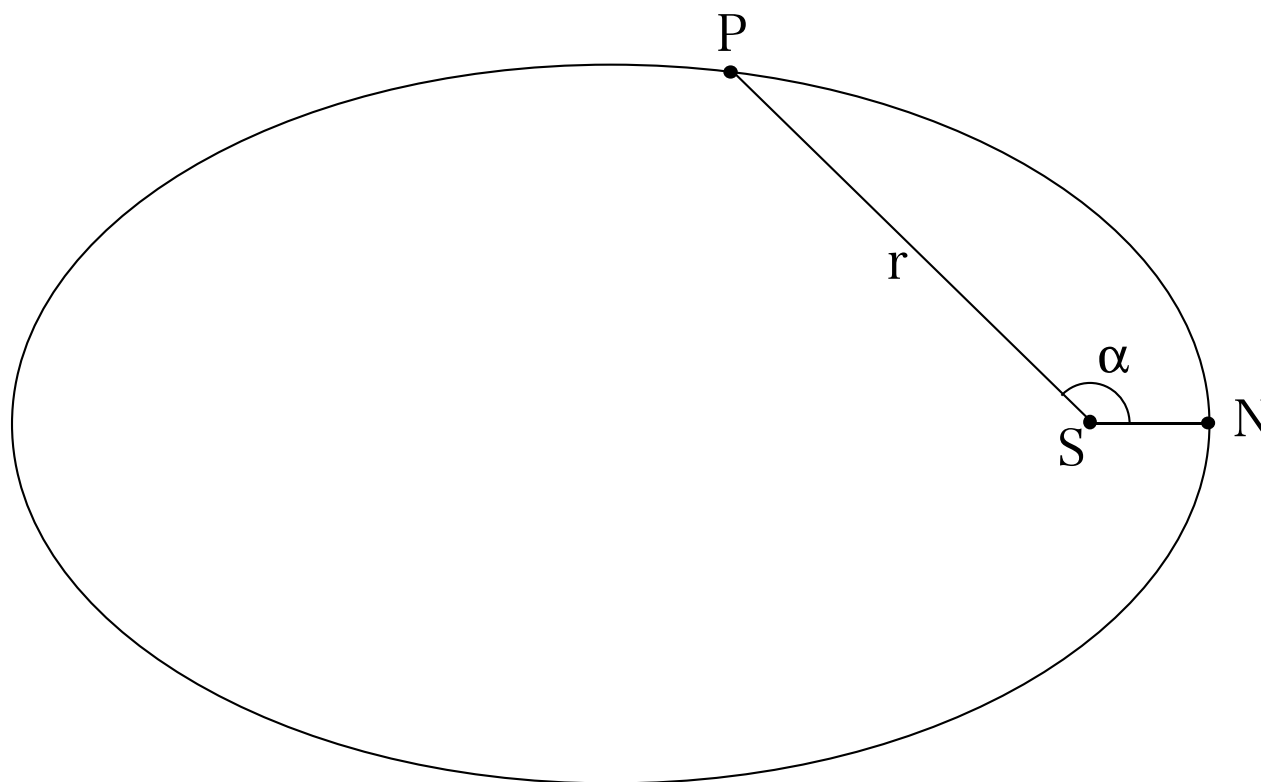
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



a を長半径、 b を短半径、 $\varepsilon = \frac{e}{a}$ を離心率と呼ぶ。

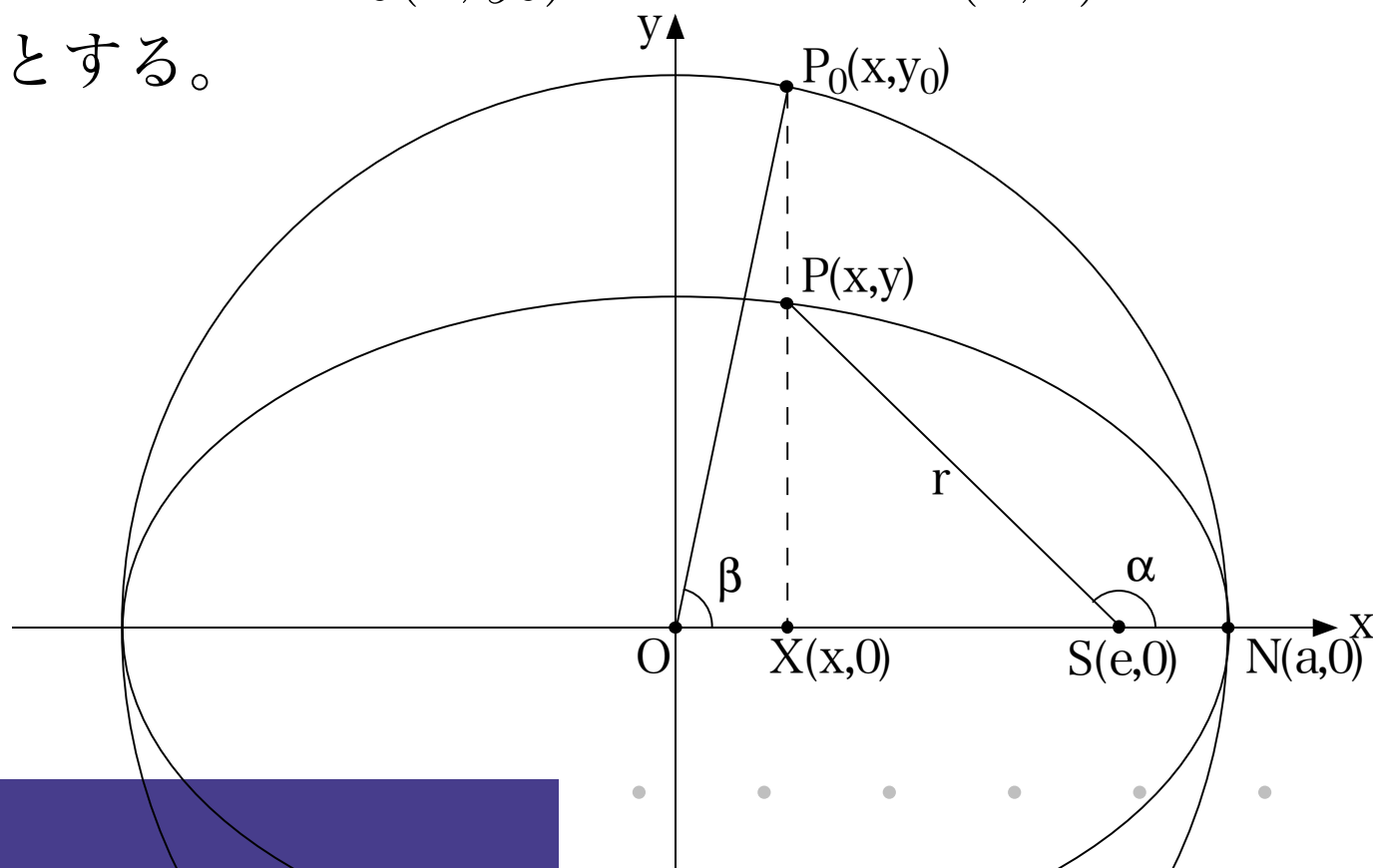
惑星軌道の解析

惑星が時刻 0 で近日点 N に居たとするとき、時刻 t における惑星の位置 P について、太陽 S からの距離 r と SN と SP の間の角 α を求めることを考える：



惑星軌道の解析

惑星軌道の中心を原点とし、太陽の位置 S を片方の焦点 $(e, 0)$ とする座標系をとる。この楕円の長半径を a 、短半径を $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ 、 P の座標を (x, y) とする。更に、原点中心半径 a の円周上に $P_0(x, y_0)$ 、 x 軸上に $X(x, 0)$ をとり $\angle P_0ON$ を β とする。



惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

- r と α を β で表す。

惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

- r と α を β で表す。
- β と t の関係式を求める。

惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

- r と α を β で表す。
- β と t の関係式を求める。
- 上の関係式を解き、 β を t で表す。

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。
 $\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$r^2 = y^2 + (e - x)^2$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$r^2 = y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

従って、 $a > e$ より

$$r = a - e \cos \beta$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

従って、 $a > e$ より

$$r = a - e \cos \beta = a \left(1 - \frac{e}{a} \cos \beta \right)$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

従って、 $a > e$ より

$$\begin{aligned} r &= a - e \cos \beta = a \left(1 - \frac{e}{a} \cos \beta \right) \\ &= a(1 - \varepsilon \cos \beta) \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha)$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x} \\ &= \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta - e}\end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x} \\ &= \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta - e} = \frac{b \sin \beta}{a(\cos \beta - \varepsilon)}\end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x} \\ &= \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta - e} = \frac{b \sin \beta}{a(\cos \beta - \varepsilon)}\end{aligned}$$

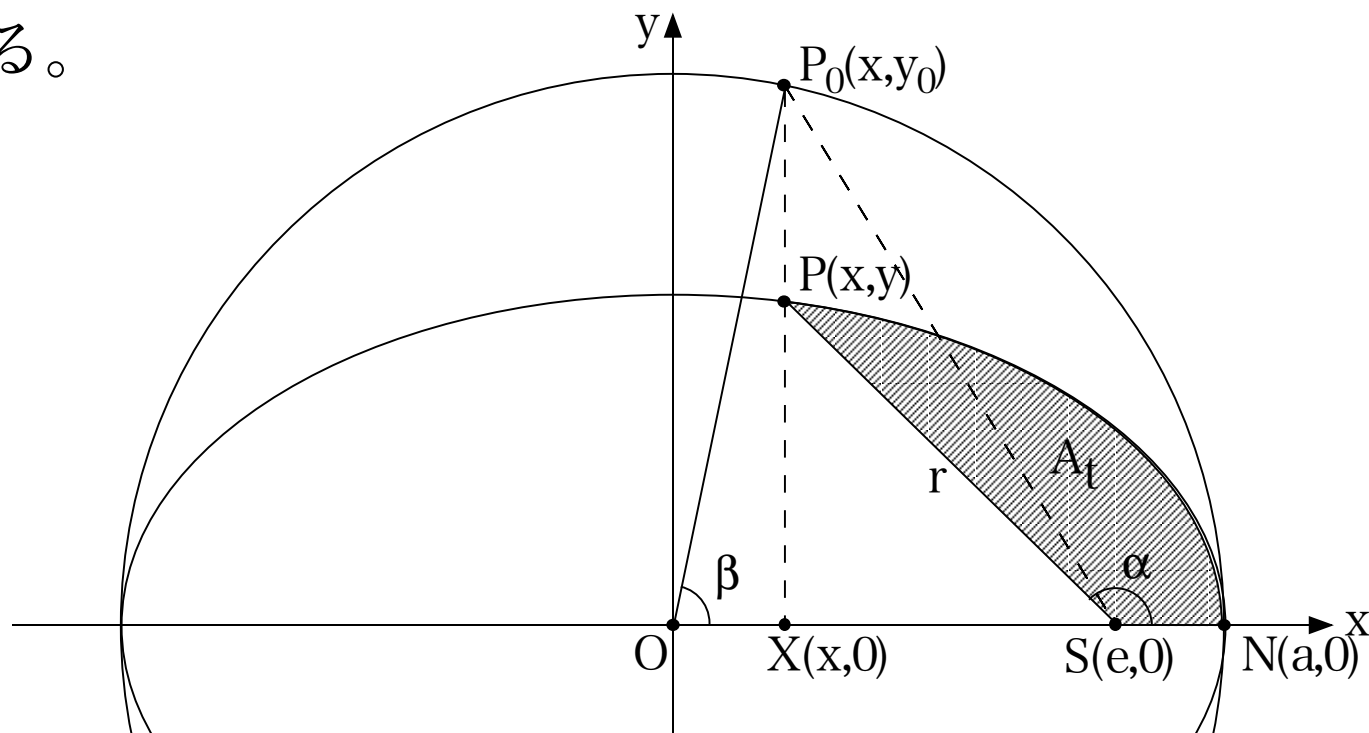
これより

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{\beta}{2} \quad (\text{ガウスの公式})$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

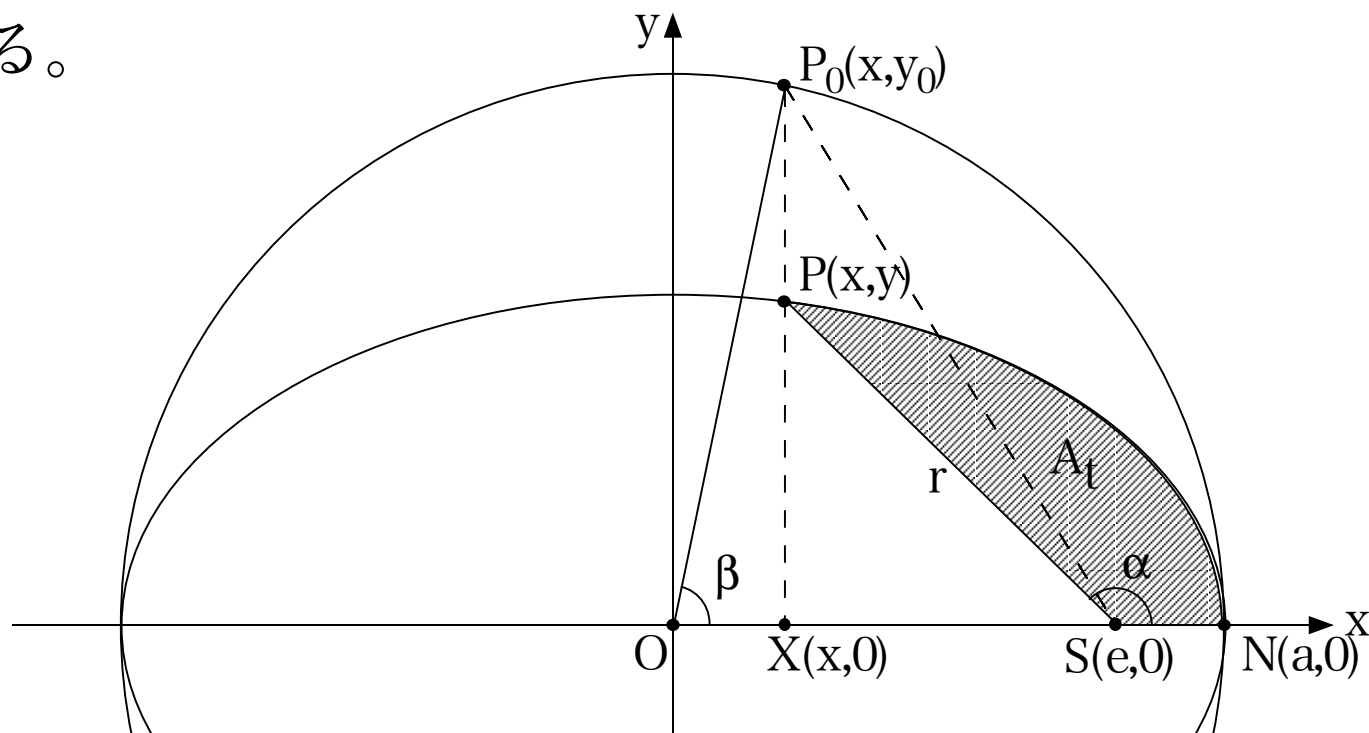
惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

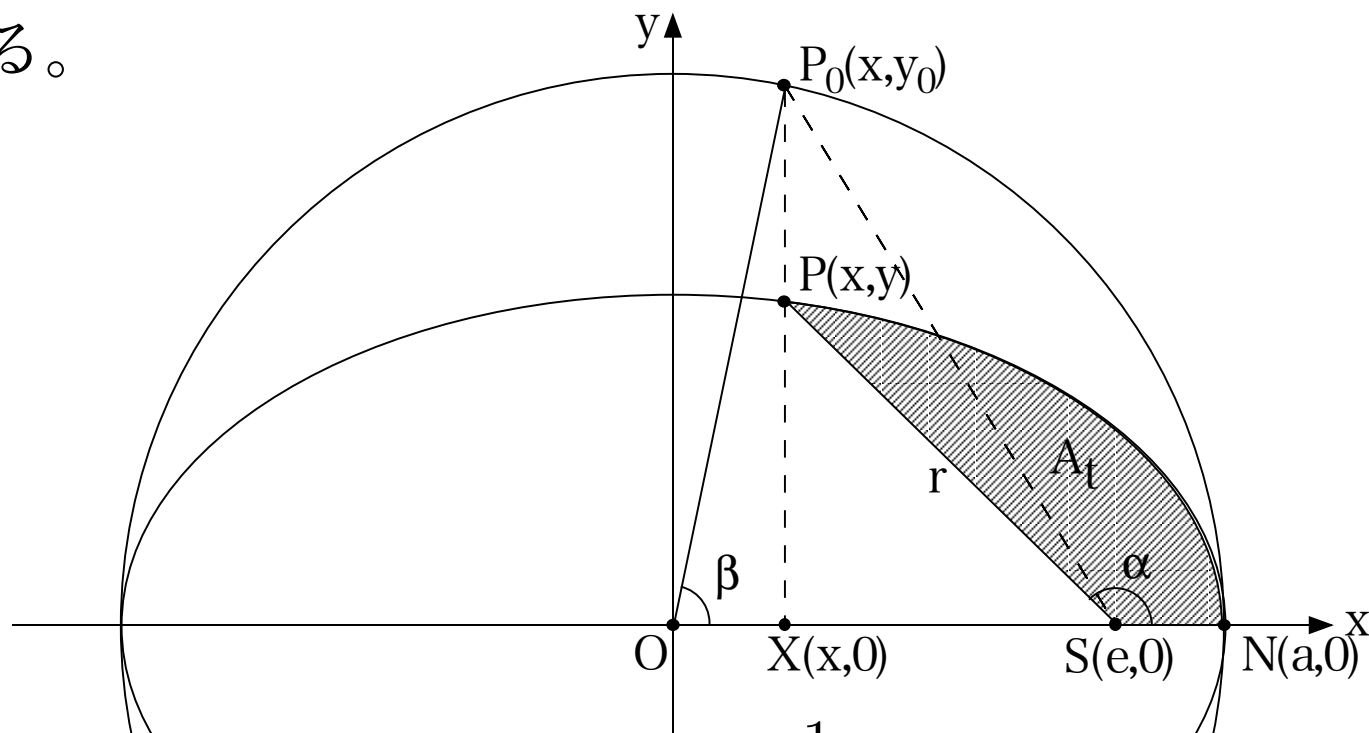
次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



$$A_t = PXN - \triangle PXS$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

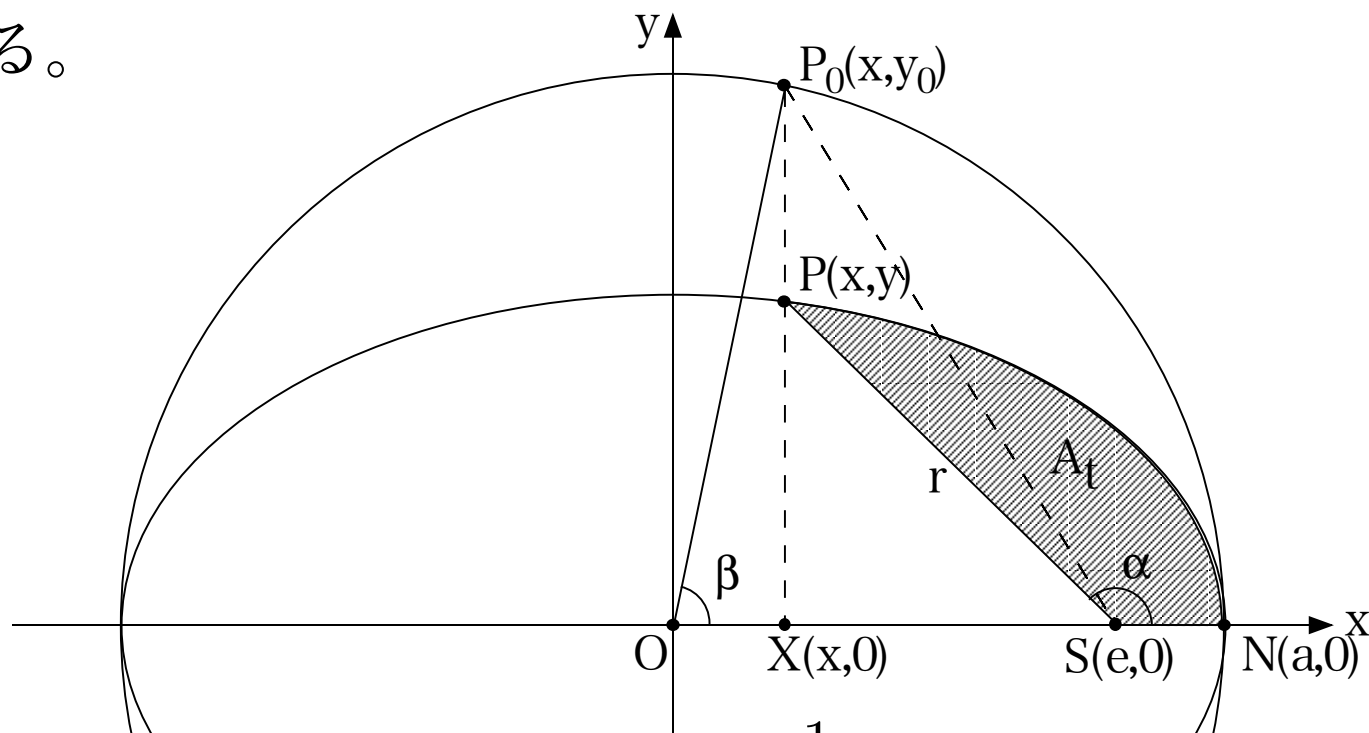
次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



$$A_t = PXN - \triangle PXS = PXN - \frac{1}{2}(e - x)y$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



$$\begin{aligned}
 A_t &= PXN - \triangle PXS = PXN - \frac{1}{2}(e - x)y \\
 &= PXN - \frac{1}{2}(e - x)b \sin \beta
 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$P_0 X N = P_0 O N - \triangle P_0 X O$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0XN$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0XN &= P_0ON - \triangle P_0XO \\ &= \frac{1}{2}\beta a^2 - \frac{1}{2}xa \sin \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$A_t = \left(\frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} e b \sin \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} e b \sin \beta = \frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} \varepsilon a b \sin \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{1}{2} \beta ab - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \beta ab - \frac{1}{2} e b \sin \beta = \frac{1}{2} \beta ab - \frac{1}{2} \varepsilon ab \sin \beta \\ &= \frac{ab}{2} (\beta - \varepsilon \sin \beta) \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

ケプラーの法則より面積速度は一定なので、惑星の周期 T に対して $\frac{A_t}{t} = \frac{\pi ab}{T}$ が成り立つ。

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

ケプラーの法則より面積速度は一定なので、惑星の周期 T に対して $\frac{A_t}{t} = \frac{\pi ab}{T}$ が成り立つ。

従って

$$A_t = \frac{ab}{2} (\beta - \varepsilon \sin \beta) = \frac{\pi ab t}{T}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

ケプラーの法則より面積速度は一定なので、惑星の周期 T に対して $\frac{A_t}{t} = \frac{\pi ab}{T}$ が成り立つ。

従って

$$A_t = \frac{ab}{2} (\beta - \varepsilon \sin \beta) = \frac{\pi ab t}{T}$$

これより

$$\beta - \varepsilon \sin \beta = \frac{2\pi t}{T} \quad (\text{ケプラー方程式})$$

が得られる。

逐次近似法

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_0| = |f(x_2) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_0|$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_0| = |f(x_2) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_0|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|,$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_0| = |f(x_2) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_0|$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|,$$

$$\dots, |x_n - x_0| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|, \dots \text{より } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

$$\beta_2 = \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{2\pi t_{ve}}{T} = 1.33512,$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

$$\beta_2 = \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{2\pi t_{ve}}{T} = 1.33512, \quad \beta_3 = 1.33513, \beta_4 = 1.33513, \dots$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

$$\beta_2 = \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{2\pi t_{ve}}{T} = 1.33512, \quad \beta_3 = 1.33513, \beta_4 = 1.33513, \dots$$

これより $\beta = 1.33513$ とすると $r = 0.9964_{[\text{AU}]}$, $\alpha = 1.3648_{[\text{rad}]}$
($1_{[\text{AU}]} = 1.495 \times 10^{11}_{[\text{m}]}$ (1 天文単位) は地球の公転軌道の長半径)