PHILOSOPHÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

運動の法則

運動の法則

ニュートンは、「よく知られた」運動の法則として以下の三法則を書いている：

運動の法則

ニュートンは、「よく知られた」運動の法則として以下の三法則を書いている：

[法則 I]

いかなる物体も、外部からそれに加えられる力によりその状態を変えられることがないかぎり、その静止状態もしくは直線上の一様な運動状態を保つ。

運動の法則

ニュートンは、「よく知られた」運動の法則として以下の三法則を書いている：

[法則 I]

いかなる物体も、外部からそれに加えられる力によりその状態を変えられることがないかぎり、その静止状態もしくは直線上の一様な運動状態を保つ。

[法則 II]

運動の変化は加えられる駆動力に比例し、その力が加わった直線の方向に生じる。

運動の法則

ニュートンは、「よく知られた」運動の法則として以下の三法則を書いている：

[法則 I]

いかなる物体も、外部からそれに加えられる力によりその状態を変えられることがないかぎり、その静止状態もしくは直線上の一様な運動状態を保つ。

[法則 II]

運動の変化は加えられる駆動力に比例し、その力が加わった直線の方向に生じる。

[法則 III]

反作用は常に作用と逆向きで等しい。或は、二つの物体が互いに及ぼし合う相互作用は常に等しく、反対方向に向かう。

運動の法則

[第二法則の現代的表記**]**

運動の法則

[第二法則の現代的表記]

物体の質量を m 、加速度を a 、「物体に加わる力」を F とすると、

$$F = ma$$

が成り立つ。

運動の法則

[第二法則の現代的表記]

物体の質量を m 、加速度を a 、「物体に加わる力」を F とすると、

$$F = ma$$

が成り立つ。

[注意]

第二法則 $\Longrightarrow$ 第一法則

運動の法則

[第二法則の現代的表記]

物体の質量を m 、加速度を a 、「物体に加わる力」を F とすると、

$$F = ma$$

が成り立つ。

[注意]

第二法則 $\not\Longrightarrow$ 第一法則

運動の法則

[第二法則の現代的表記]

物体の質量を m 、加速度を a 、「物体に加わる力」を F とすると、

$$F = ma$$

が成り立つ。

[注意]

第二法則 $\not\Longrightarrow$ 第一法則

現代的解釈：第一法則は慣性系の存在を主張

運動の法則

[第二法則の現代的表記]

物体の質量を m 、加速度を a 、「物体に加わる力」を F とすると、

$$F = ma$$

が成り立つ。

[注意]

第二法則 $\not\Longrightarrow$ 第一法則

現代的解釈：第一法則は慣性系の存在を主張

歴史的解釈：第一法則は、運動状態にある物体は、その運動を続けさせる「活力」を内部に持っている、と考えられていた？

PRINCIPA の内容

PRINCIPA の内容

[ニュートン力学 $\neq$ ニュートンの力学**]**

PRINCIPA の内容

[ニュートン力学 $\neq$ ニュートンの力学]

所謂ニュートン力学の基礎になる「運動方程式」はニュートンは記していない。そもそもニュートンは微分方程式の概念までは辿り着かなかった。

PRINCIPA の内容

[ニュートン力学 $\neq$ ニュートンの力学**]**

所謂ニュートン力学の基礎になる「運動方程式」はニュートンは記していない。そもそもニュートンは微分方程式の概念までは辿り着かなかった。

[ニュートンのしたこと**]**

PRINCIPA の内容

[ニュートン力学 $\neq$ ニュートンの力学**]**

所謂ニュートン力学の基礎になる「運動方程式」はニュートンは記していない。そもそもニュートンは微分方程式の概念までは辿り着かなかった。

[ニュートンのしたこと**]**

1. 一点に向かう力、即ち求心力 (中心力) に従う物体の運動は「面積速度一定の法則」を満たす。

PRINCIPA の内容

[ニュートン力学 $\neq$ ニュートンの力学**]**

所謂ニュートン力学の基礎になる「運動方程式」はニュートンは記していない。そもそもニュートンは微分方程式の概念までは辿り着かなかった。

[ニュートンのしたこと**]**

1. 一点に向かう力、即ち求心力 (中心力) に従う物体の運動は「面積速度一定の法則」を満たす。
2. 更に、この運動の軌跡が、力の中心を一つの焦点とする楕円を描くならば、物体に働く力の大きさは、力の中心からの距離の二乗に反比例する。

PRINCIPA の内容

[ニュートン力学 $\neq$ ニュートンの力学]

所謂ニュートン力学の基礎になる「運動方程式」はニュートンは記していない。そもそもニュートンは微分方程式の概念までは辿り着かなかった。

[ニュートンのしたこと]

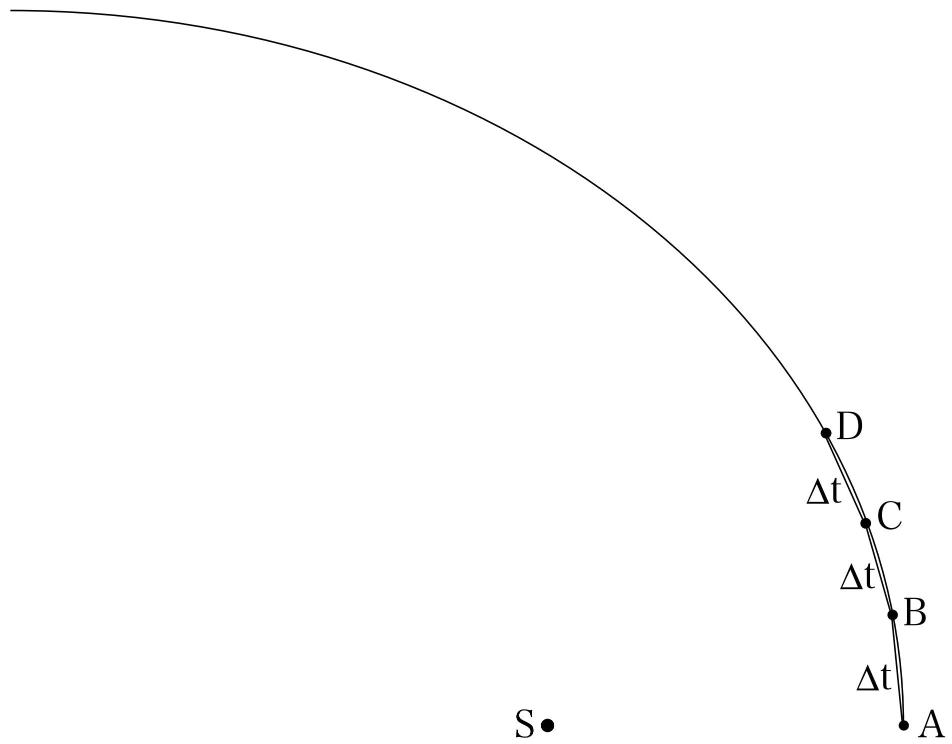
1. 一点に向かう力、即ち求心力 (中心力) に従う物体の運動は「面積速度一定の法則」を満たす。
2. 更に、この運動の軌跡が、力の中心を一つの焦点とする楕円を描くならば、物体に働く力の大きさは、力の中心からの距離の二乗に反比例する。

[注意]

ニュートンは上記 2. の逆は示していない。

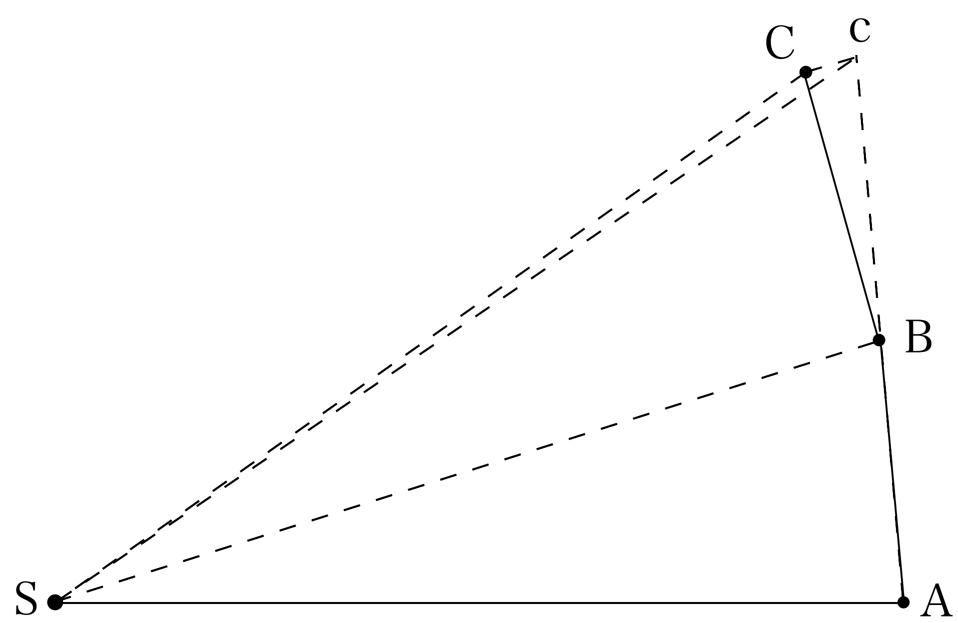
面積速度一定の法則

面積速度一定の法則

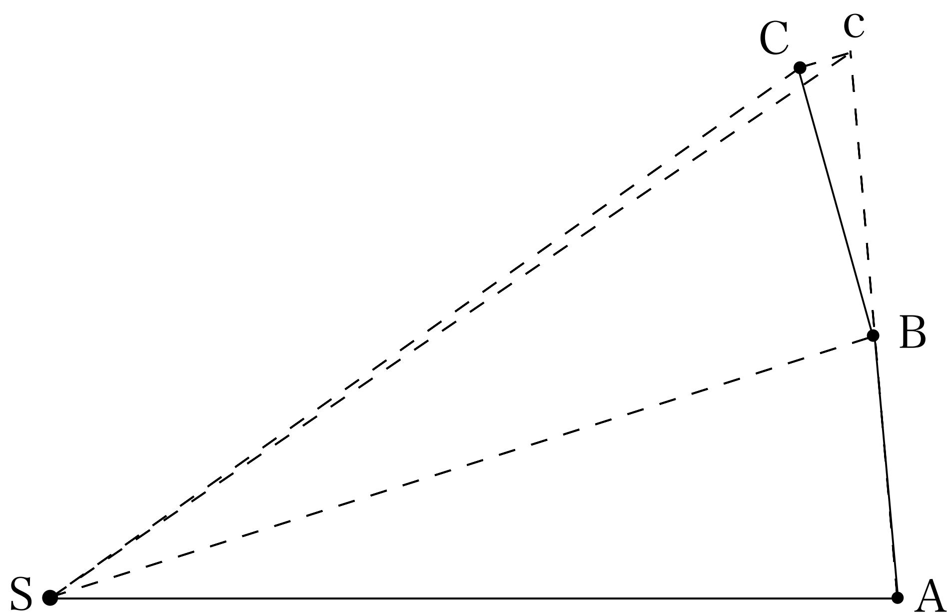


力の中心を S とする求心力による運動を、ある点 A から微小時間 Δt だけ慣性運動して B に来た後に、S 方向の衝撃力を受けて運動の向きが変わり、また Δt 後に C で S 方向の衝撃力を受ける、という折れ線で近似する。

面積速度一定の法則

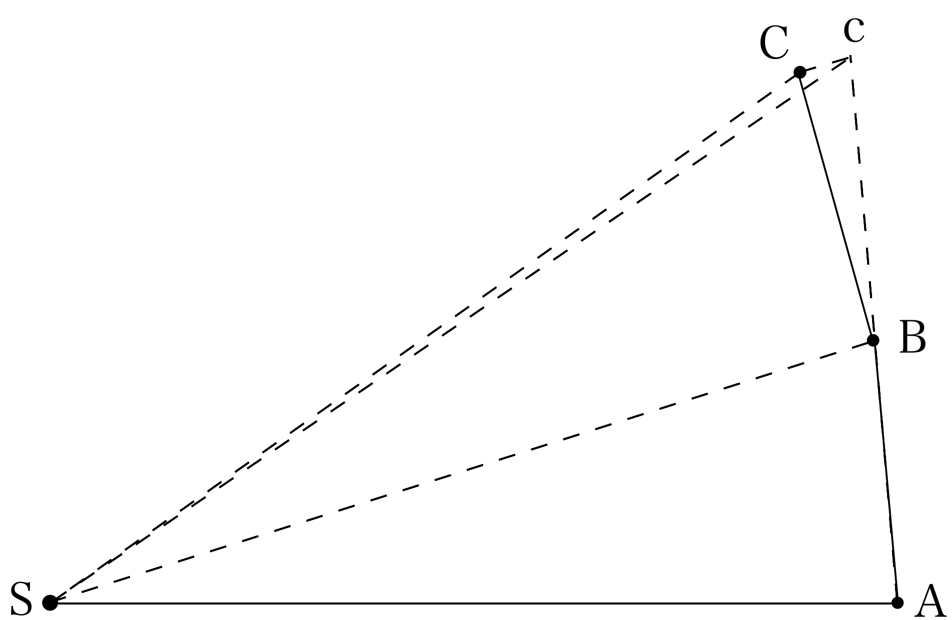


面積速度一定の法則



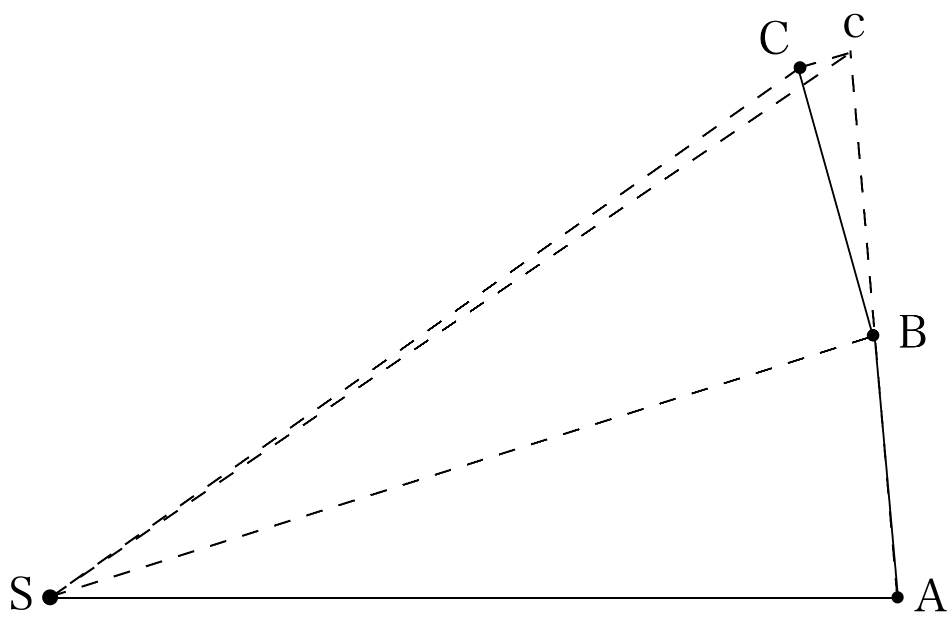
微小時間 Δt の間に、慣性に従って物体が A から B へ動くとする。もし何も力が働かなければ、次の Δt の間に物体は、AB と等しい線分 Bc だけ動く。

面積速度一定の法則

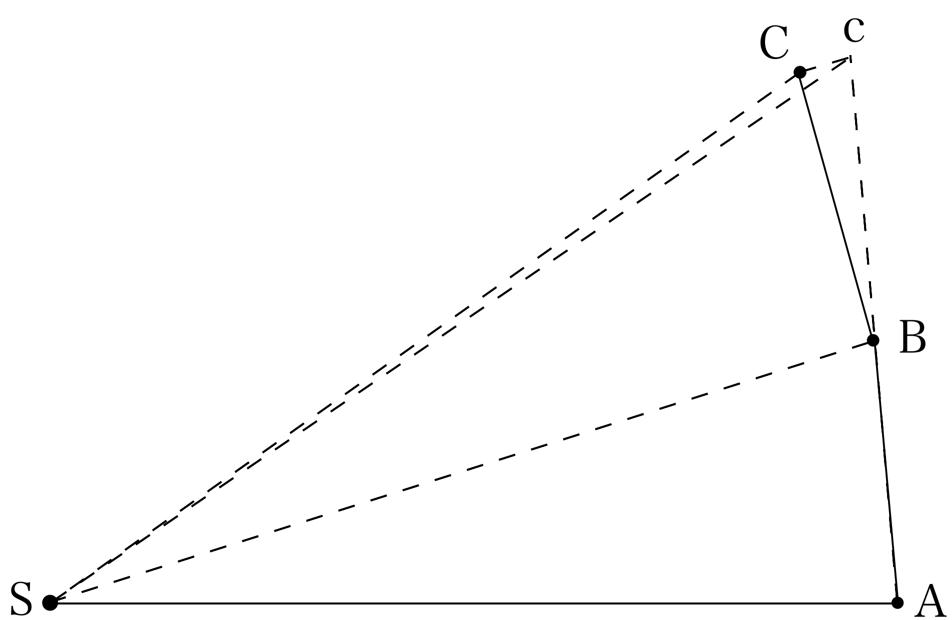


微小時間 Δt の間に、慣性に従って物体が A から B へ動くとする。もし何も力が働かなければ、次の Δt の間に物体は、AB と等しい線分 Bc だけ動く。
しかし、物体が B にいる時に求心力が衝撃力として働くと、運動は SB 方向へ曲げられ、物体は線分 BC を動く。

面積速度一定の法則

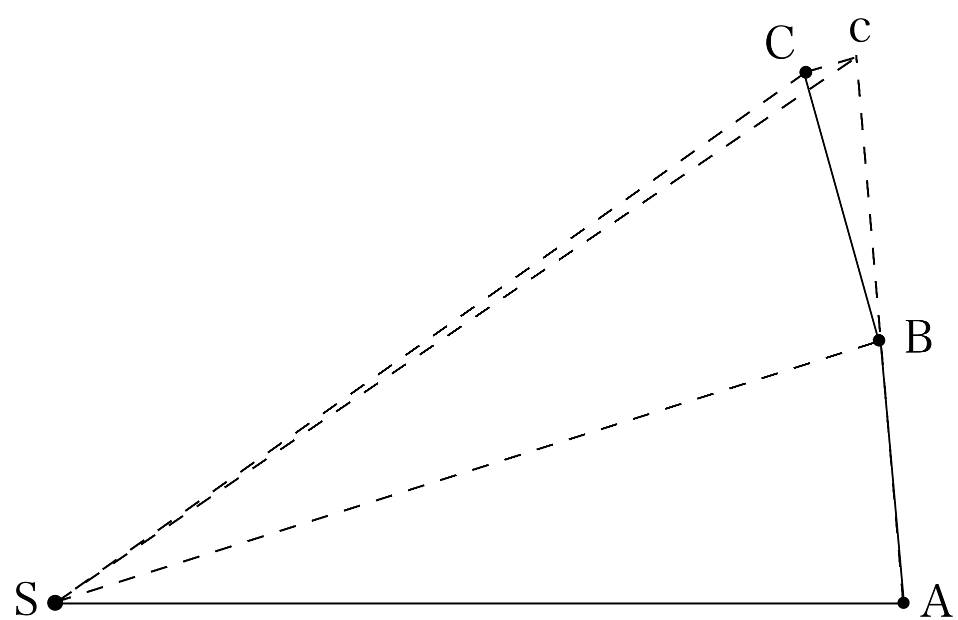


面積速度一定の法則



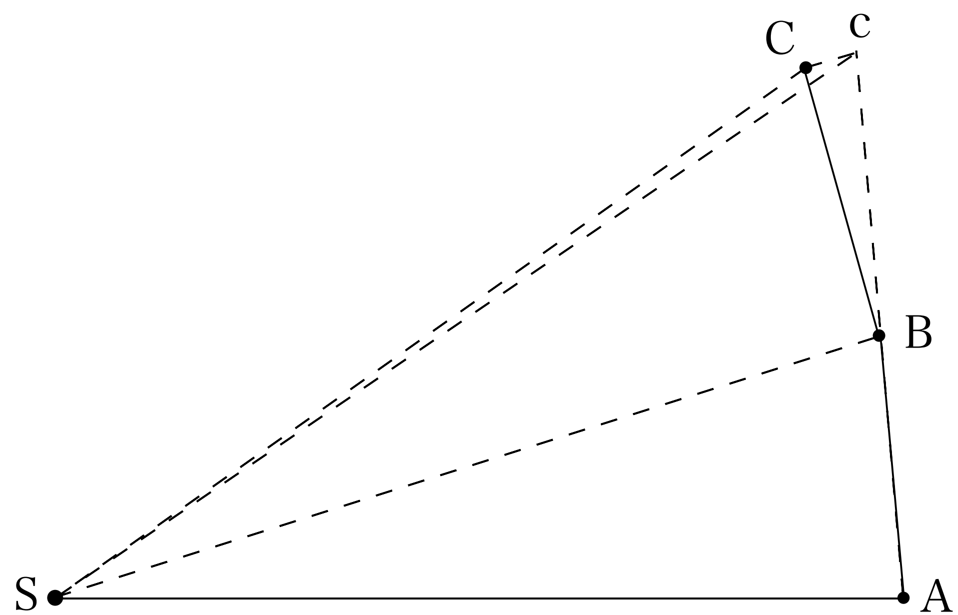
このとき、$AB = Bc$ なので $\triangle SAB$ の面積は $\triangle SBc$ の面積に等しい (底辺の長さと高さが等しい)。

面積速度一定の法則



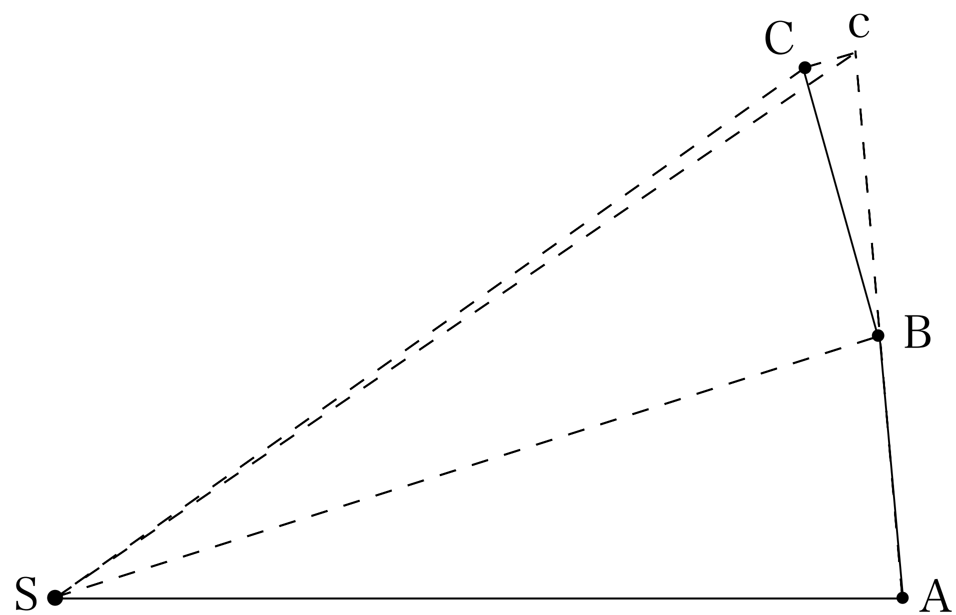
このとき、$AB = Bc$ なので $\triangle SAB$ の面積は $\triangle SBc$ の面積に等しい (底辺の長さと高さが等しい)。
更に B で働く力が SB 方向なので cC は SB と平行である。

面積速度一定の法則



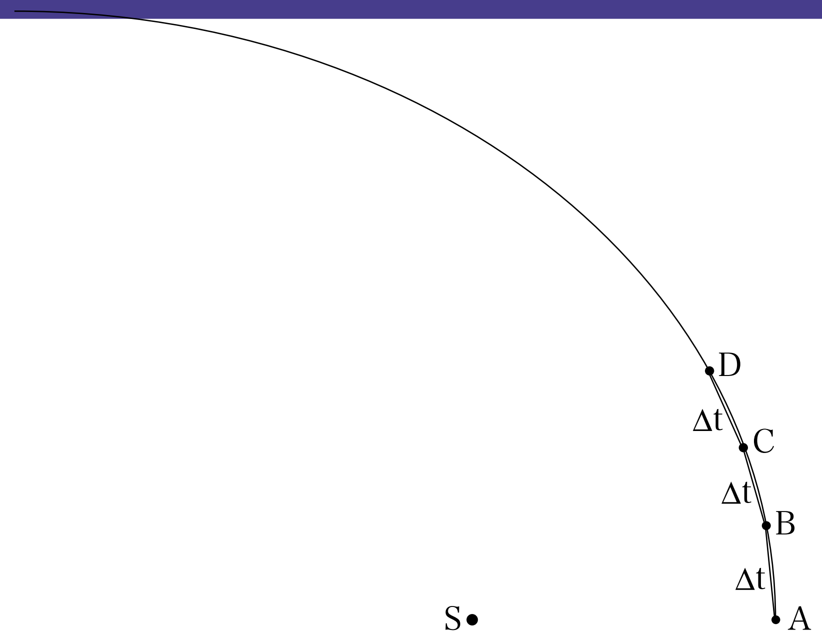
このとき、$AB = Bc$ なので $\triangle SAB$ の面積は $\triangle SBc$ の面積に等しい (底辺の長さと高さが等しい)。
更に B で働く力が SB 方向なので cC は SB と平行である。
よって、$\triangle SBc$ の面積は $\triangle SBC$ の面積に等しい (底辺が共通で高さが等しい)。

面積速度一定の法則

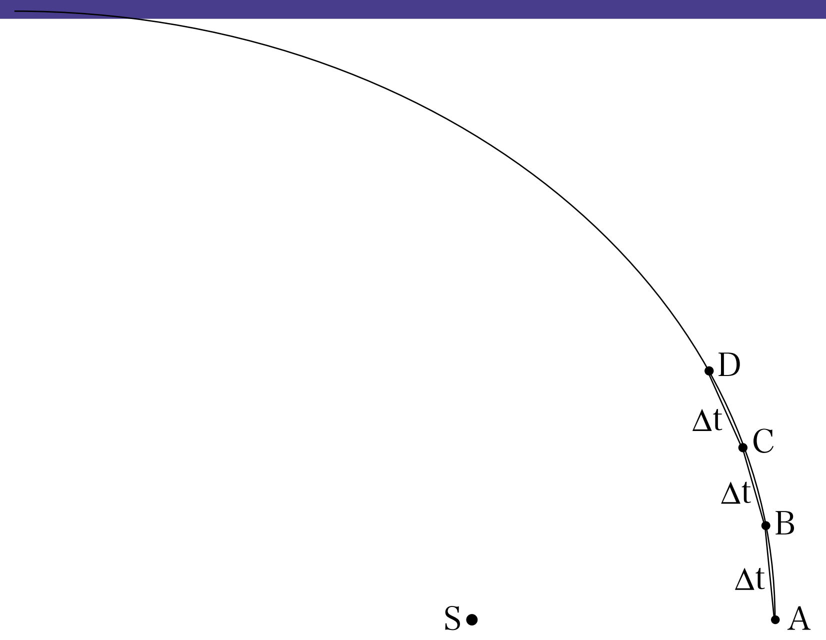


このとき、$AB = Bc$ なので $\triangle SAB$ の面積は $\triangle SBc$ の面積に等しい (底辺の長さと高さが等しい)。
更に B で働く力が SB 方向なので cC は SB と平行である。
よって、$\triangle SBc$ の面積は $\triangle SBC$ の面積に等しい (底辺が共通で高さが等しい)。 $\therefore \triangle SAB$ の面積 $=\triangle SBC$ の面積

面積速度一定の法則

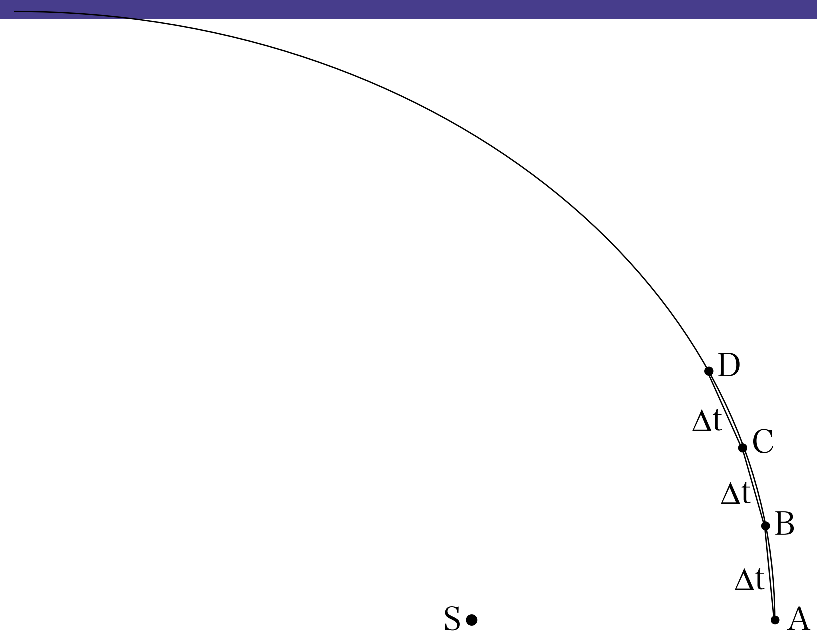


面積速度一定の法則



同様にして $\triangle SBC$ の面積 $=$ $\triangle SCD$ の面積等々もいえる。

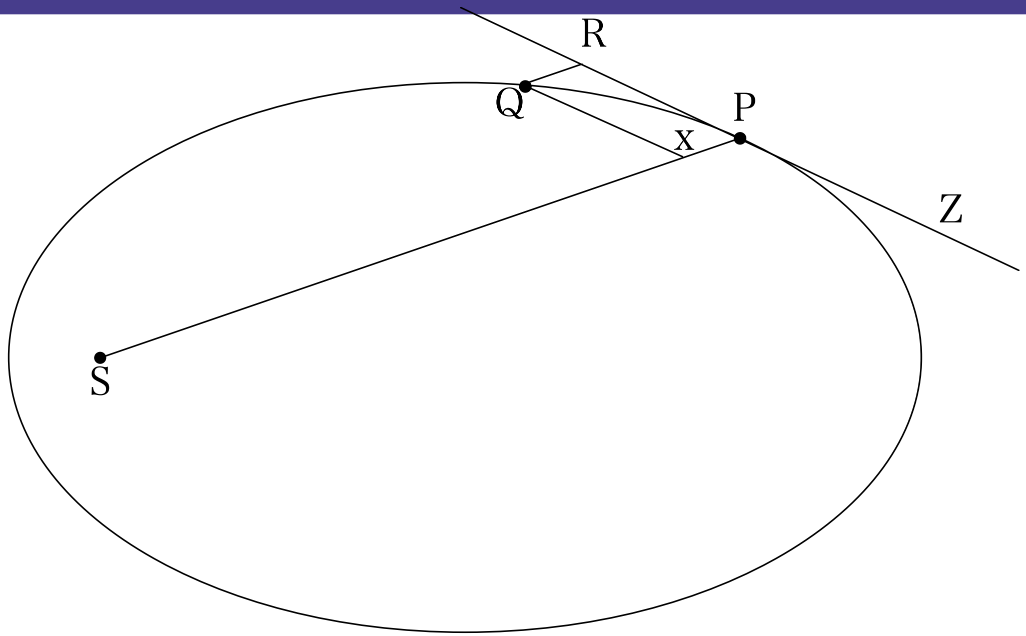
面積速度一定の法則



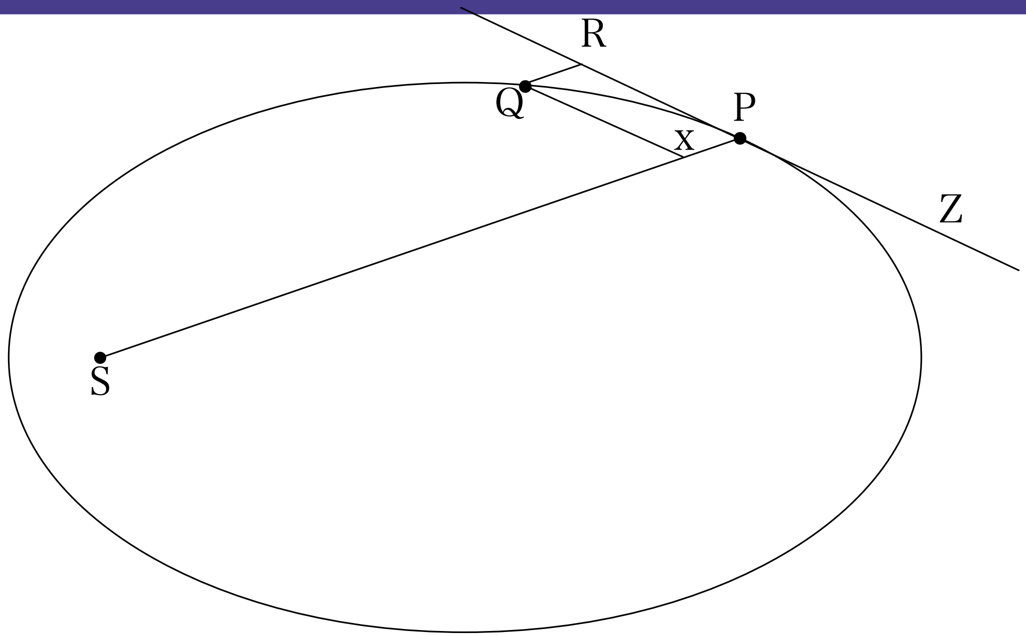
同様にして $\triangle SBC$ の面積 $=$ $\triangle SCD$ の面積等々もいえる。
よって、微小時間 Δt を無限に小さくすると多角形 $ABCD\cdots$ は運動の軌跡に近づき、無限小時間 dt に線分 SP (P は物体の位置) が描く扇型の面積 dA は一定になり、面積速度一定 $\left(\dfrac{dA}{dt} = \text{一定}\right)$ の法則が成り立つ。

逆二乗の法則

逆二乗の法則

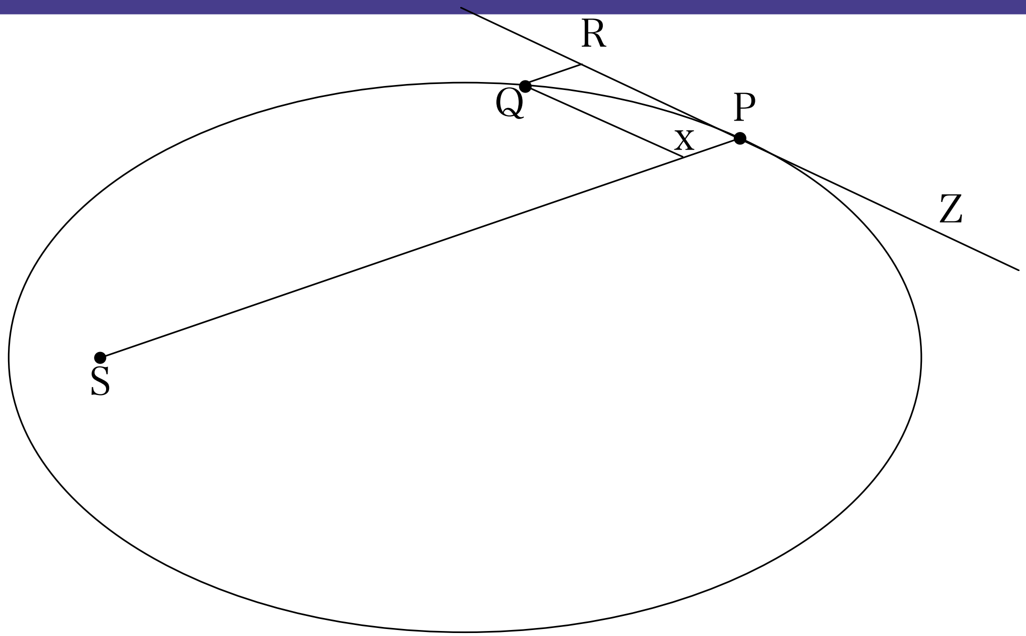


逆二乗の法則



微小時間 Δt の間に物体が S を中心とする求心力を受けながら P から Q へ動いたとする。

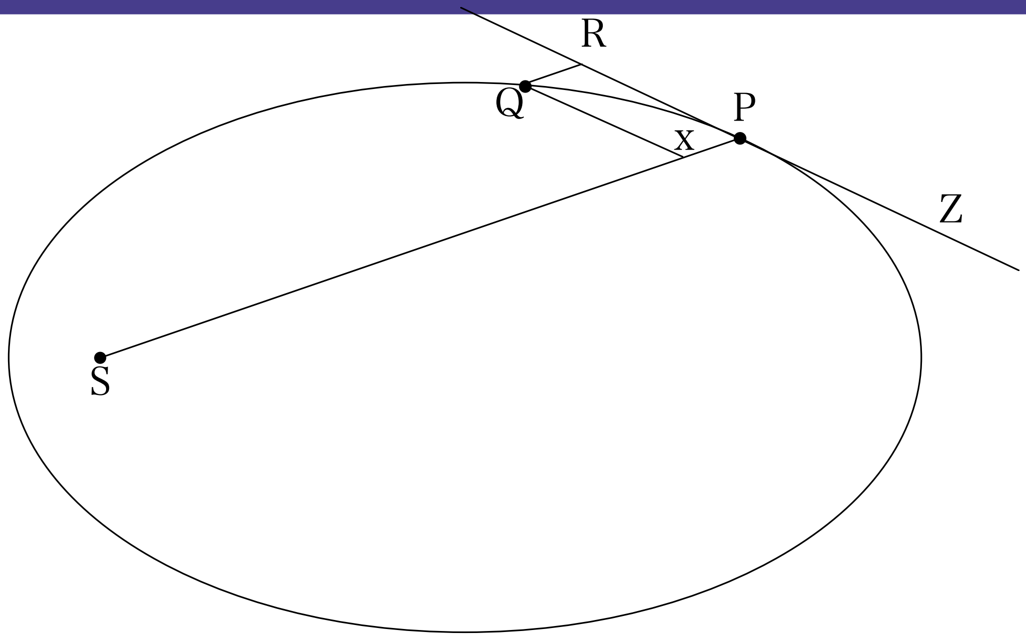
逆二乗の法則



微小時間 Δt の間に物体が S を中心とする求心力を受けながら P から Q へ動いたとする。

この運動を、慣性による運動 PR と P における求心力 F_P による運動 RQ に分解すると、RQ の運動は初速度 0 で加速度 $a = \dfrac{F_P}{m}$ なので

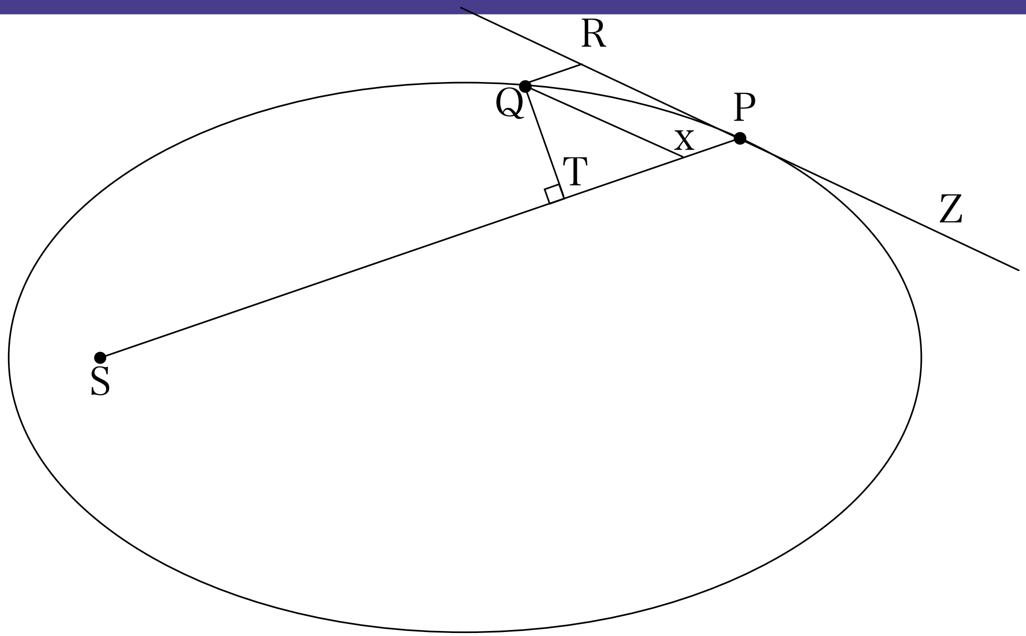
逆二乗の法則



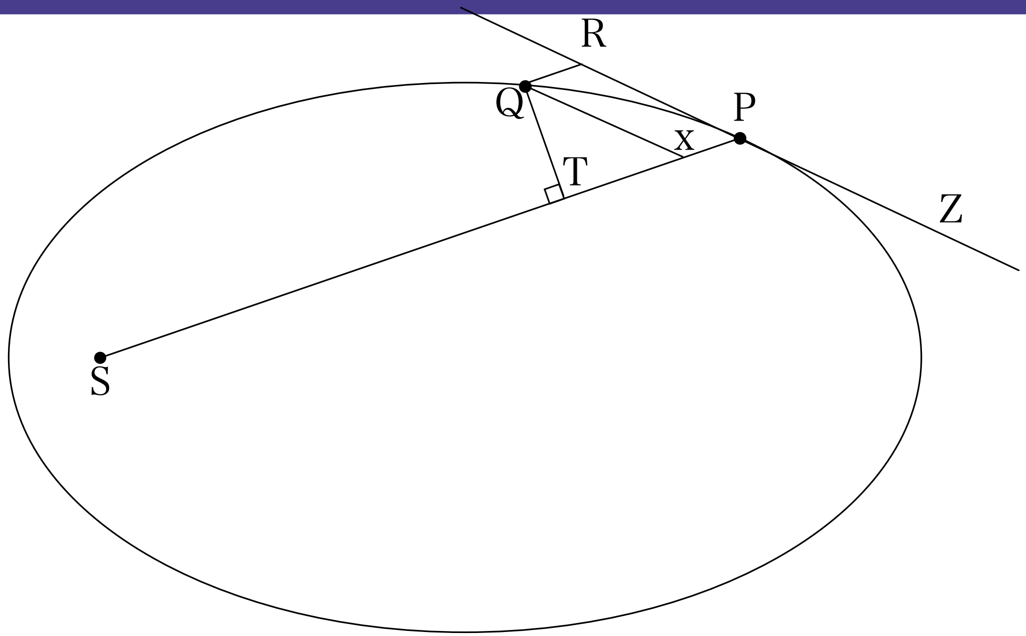
微小時間 Δt の間に物体が S を中心とする求心力を受けながら P から Q へ動いたとする。

この運動を、慣性による運動 PR と P における求心力 F_P による運動 RQ に分解すると、RQ の運動は初速度 0 で加速度 $a = \dfrac{F_P}{m}$ なので $QR = \dfrac{F_P}{2m}(\Delta t)^2$ つまり $F_P = \dfrac{2mQR}{(\Delta t)^2}$

逆二乗の法則

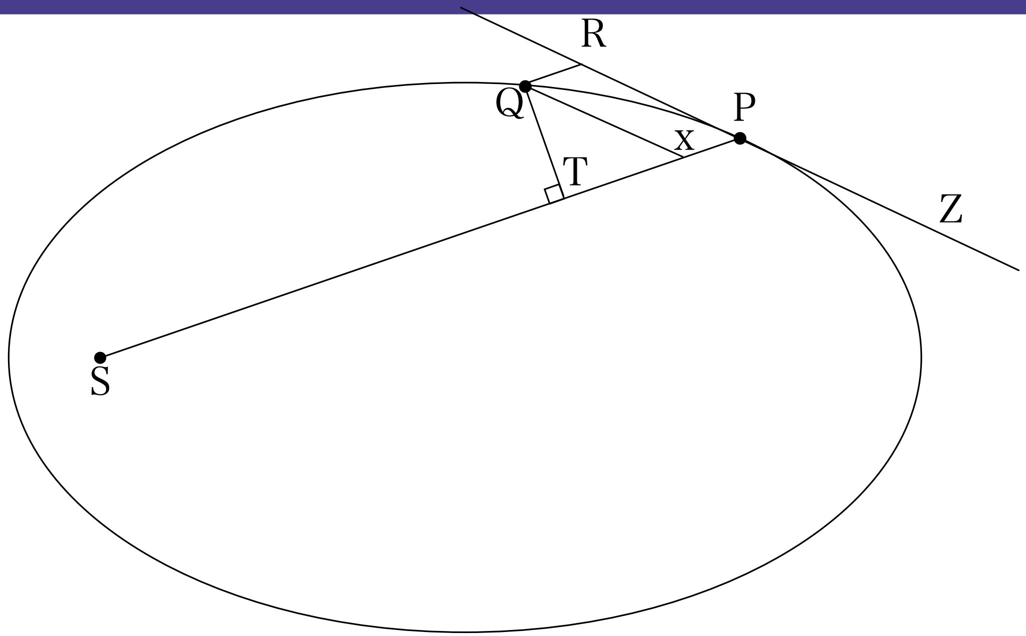


逆二乗の法則



Q から SP に垂線 QT を下すと、Δt が小さいときは扇型 SPQ の面積 $\approx \triangle SPQ$ の面積なので、

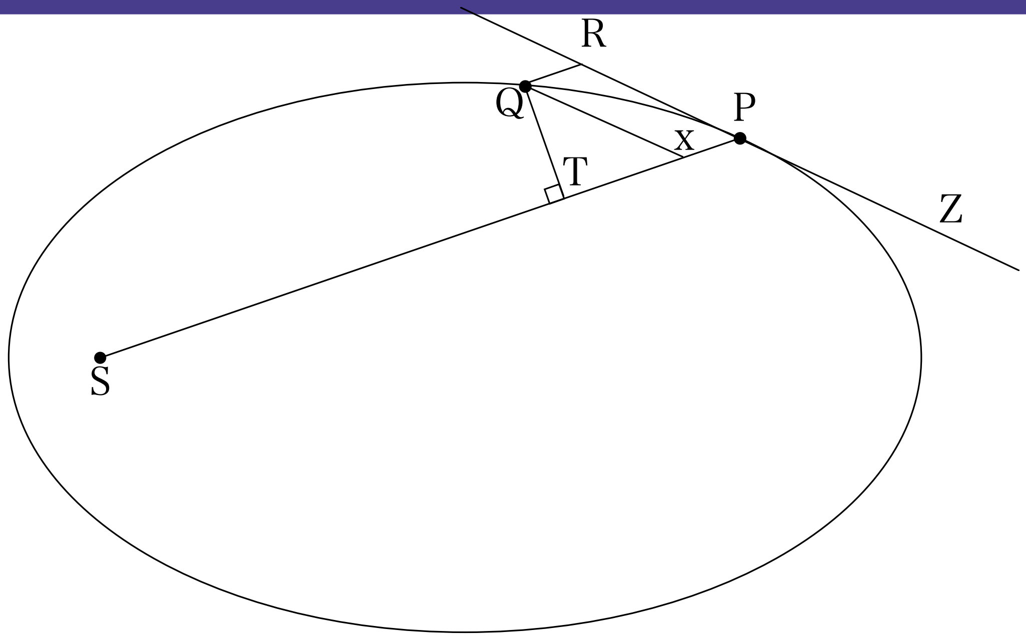
逆二乗の法則



Q から SP に垂線 QT を下すと、Δt が小さいときは扇型 SPQ の面積 $\approx \triangle SPQ$ の面積なので、 面積速度を κ として

$$\kappa = \frac{SPQ \text{ の面積}}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2} SP \cdot QT}{\Delta t}$$

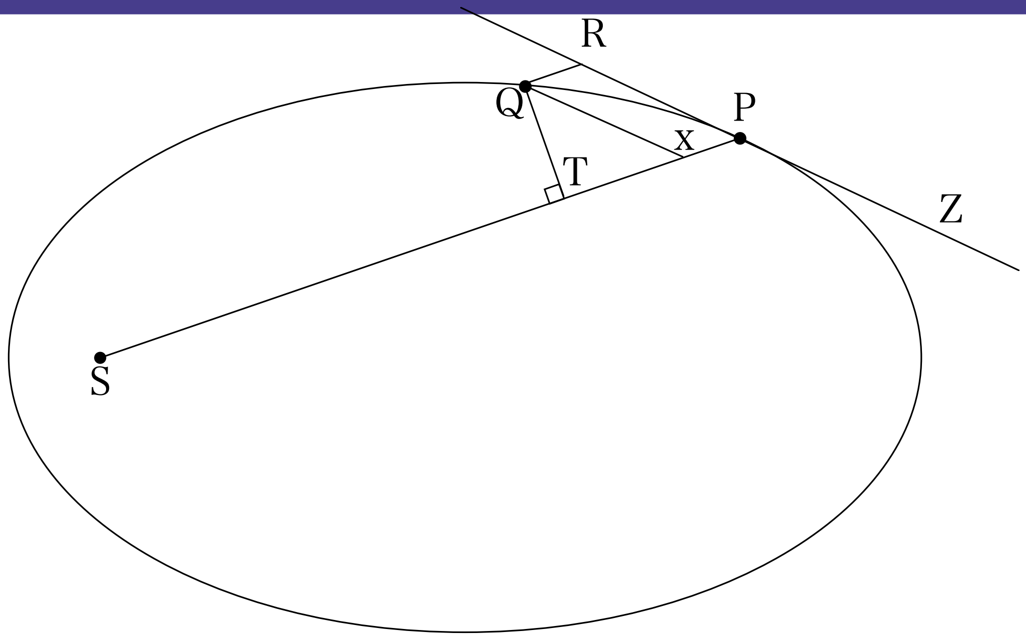
逆二乗の法則



Q から SP に垂線 QT を下すと、Δt が小さいときは扇型 SPQ の面積 $\approx \triangle SPQ$ の面積なので、 面積速度を κ として

$$\kappa = \frac{SPQ \text{ の面積}}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}SP \cdot QT}{\Delta t} \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{(\Delta t)^2} \approx \frac{4\kappa^2}{SP^2 \cdot QT^2}$$

逆二乗の法則

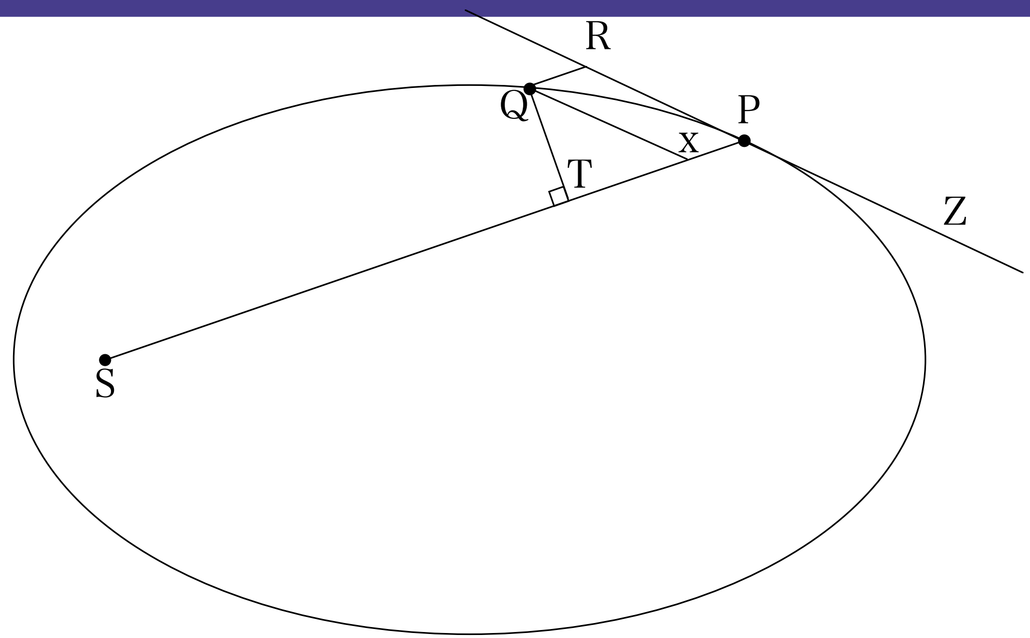


Q から SP に垂線 QT を下すと、Δt が小さいときは扇型 SPQ の面積 $\approx \triangle SPQ$ の面積なので、 面積速度を κ として

$$\kappa = \frac{SPQ\text{ の面積}}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}SP \cdot QT}{\Delta t} \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{(\Delta t)^2} \approx \frac{4\kappa^2}{SP^2 \cdot QT^2}$$

従って $F_P \approx \dfrac{8\kappa^2 m}{SP^2} \dfrac{QR}{QT^2}$、

逆二乗の法則

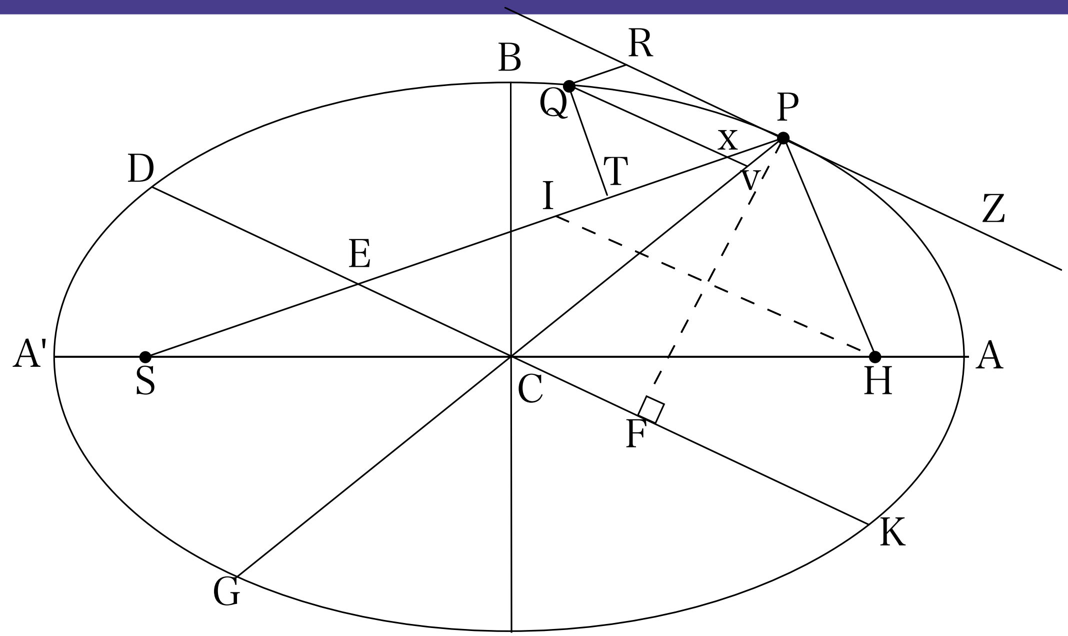


Q から SP に垂線 QT を下すと、Δt が小さいときは扇型 SPQ の面積 $\approx \triangle SPQ$ の面積なので、 面積速度を κ として

$$\kappa = \frac{SPQ\text{ の面積}}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}SP \cdot QT}{\Delta t} \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{(\Delta t)^2} \approx \frac{4\kappa^2}{SP^2 \cdot QT^2}$$

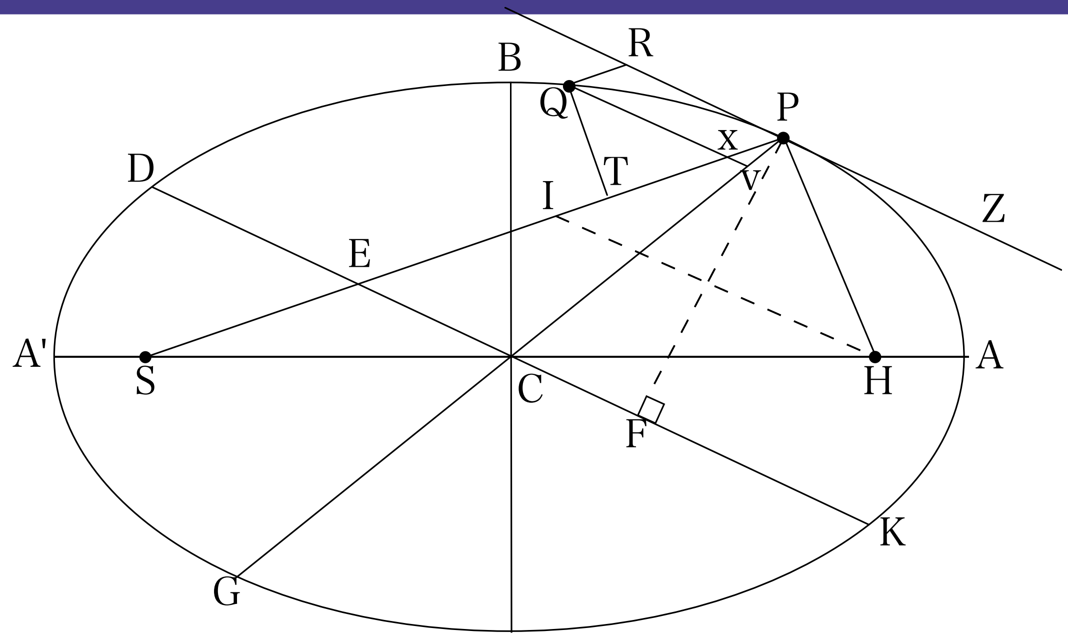
従って $F_P \approx \dfrac{8\kappa^2 m}{SP^2}\dfrac{QR}{QT^2}$、 $\Delta t \to 0$ で $F_P = \dfrac{8\kappa^2 m}{SP^2} \lim\limits_{Q\to P} \dfrac{QR}{QT^2}$

逆二乗の法則



但し、$DK \parallel RPZ$、$PF \perp DK$、$HI \parallel DK$ とする。

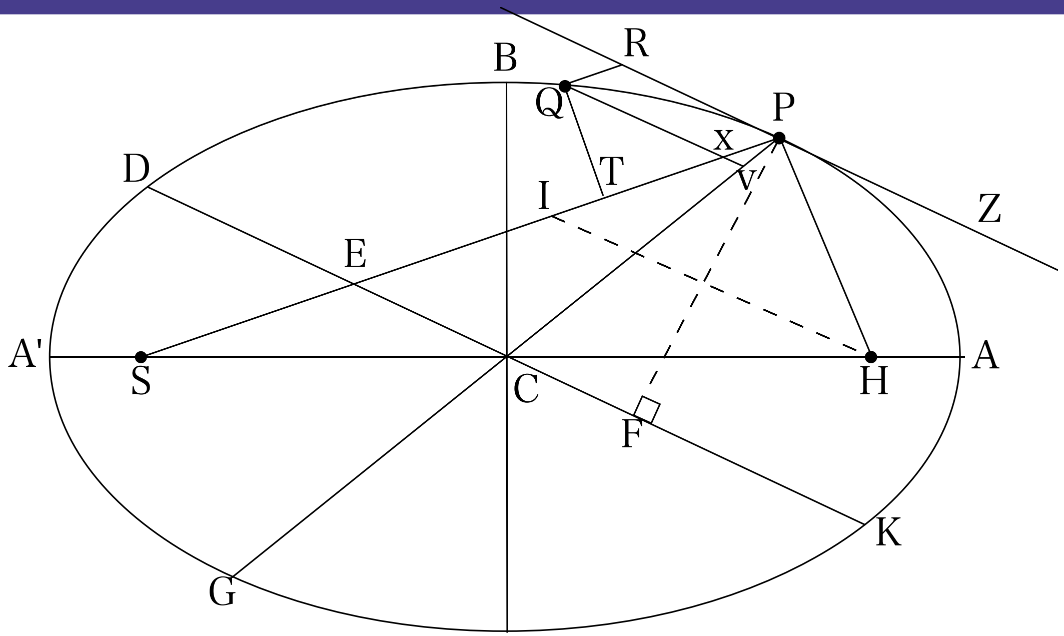
逆二乗の法則



但し、$DK \parallel RPZ$、$PF \perp DK$、$HI \parallel DK$ とする。

$CS = CH$ かつ $\triangle SIH \sim \triangle SEC$ より $ES = EI$

逆二乗の法則



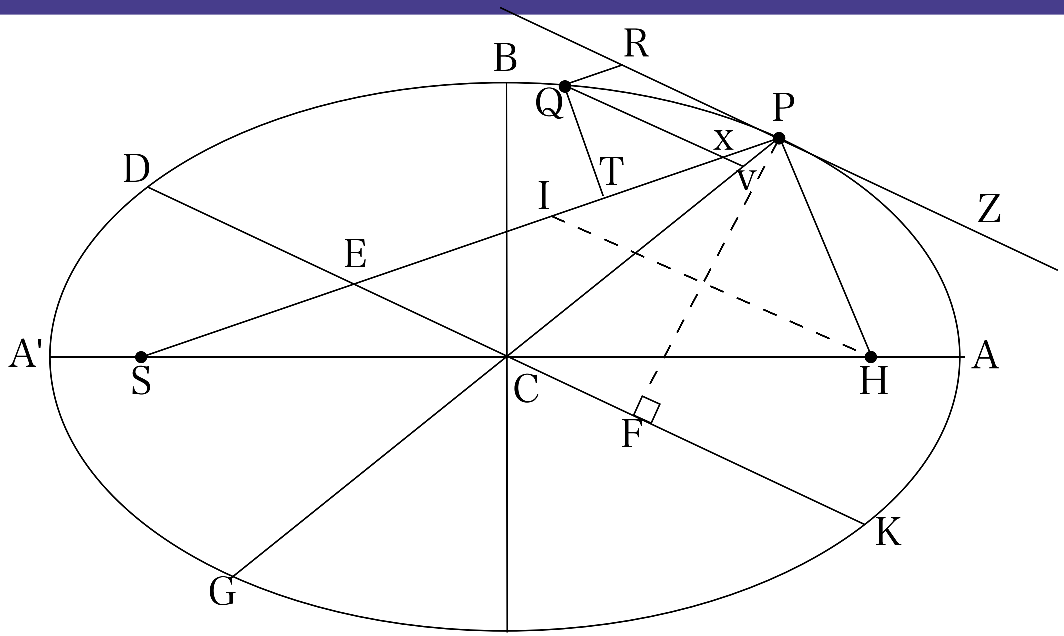
但し、$DK \parallel RPZ$、$PF \perp DK$、$HI \parallel DK$ とする。

$CS = CH$ かつ $\triangle SIH \sim \triangle SEC$ より $ES = EI$

$EP = PI + EI$ より $PS = PI + 2EI$ なので

$PS + PI = 2(PI + EI) = 2EP$ i.e. $EP = \frac{1}{2}(PS + PI)$

逆二乗の法則



但し、$DK \parallel RPZ$、$PF \perp DK$、$HI \parallel DK$ とする。

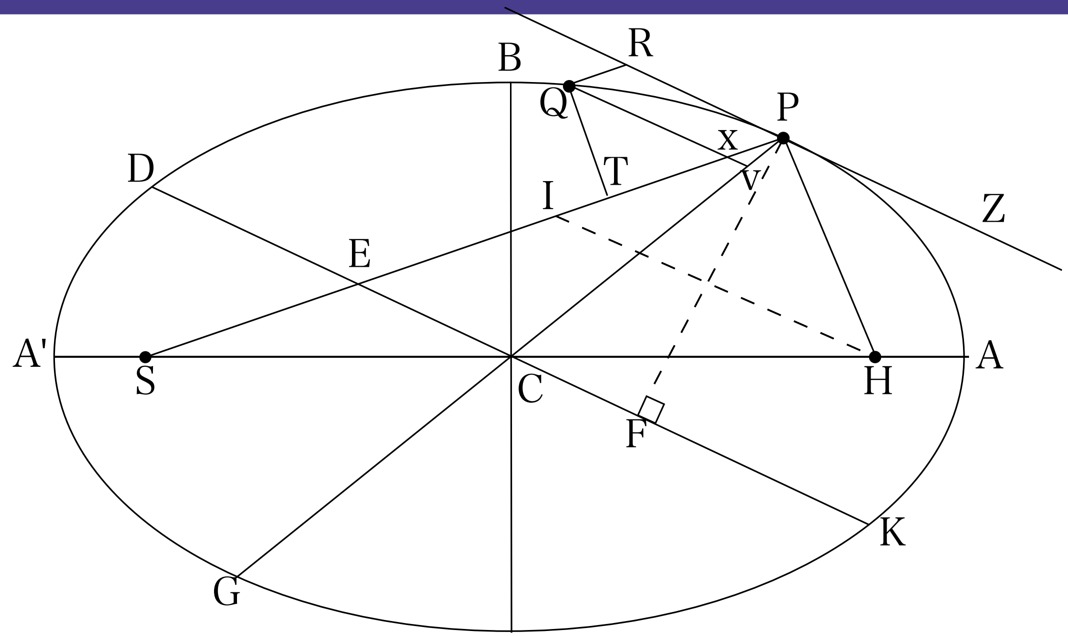
$CS = CH$ かつ $\triangle SIH \sim \triangle SEC$ より $ES = EI$

$EP = PI + EI$ より $PS = PI + 2EI$ なので

$PS + PI = 2(PI + EI) = 2EP$ i.e. $EP = \frac{1}{2}(PS + PI)$

$\triangle HPI$ は二等辺三角形より $PI = PH$ で $EP = \frac{1}{2}(PS + PH)$

逆二乗の法則



但し、$DK \parallel RPZ$、$PF \perp DK$、$HI \parallel DK$ とする。

$CS = CH$ かつ $\triangle SIH \sim \triangle SEC$ より $ES = EI$

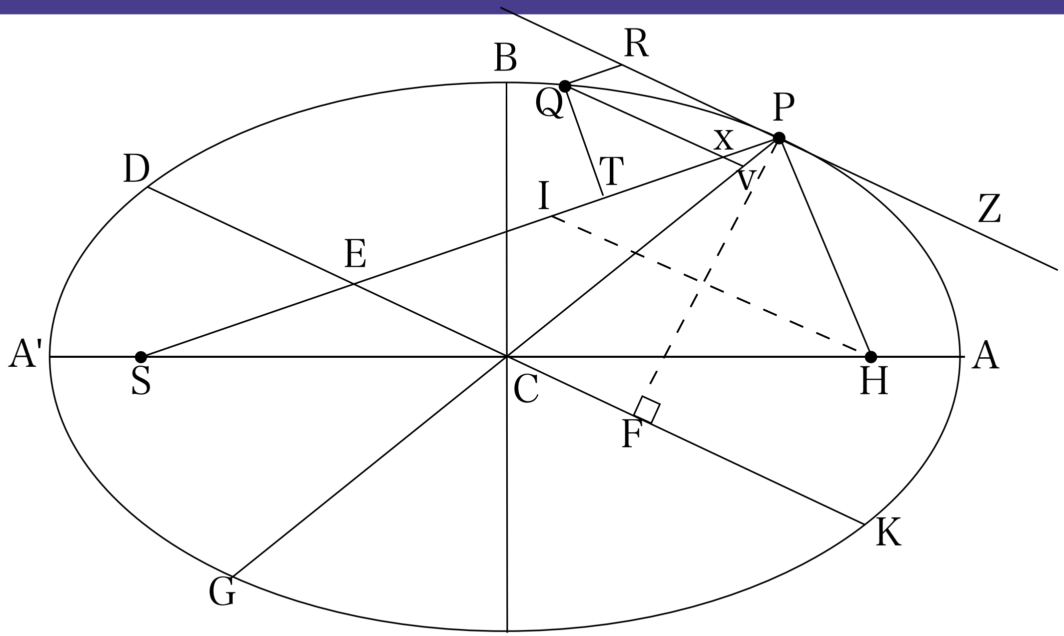
$EP = PI + EI$ より $PS = PI + 2EI$ なので

$PS + PI = 2(PI + EI) = 2EP$ i.e. $EP = \frac{1}{2}(PS + PI)$

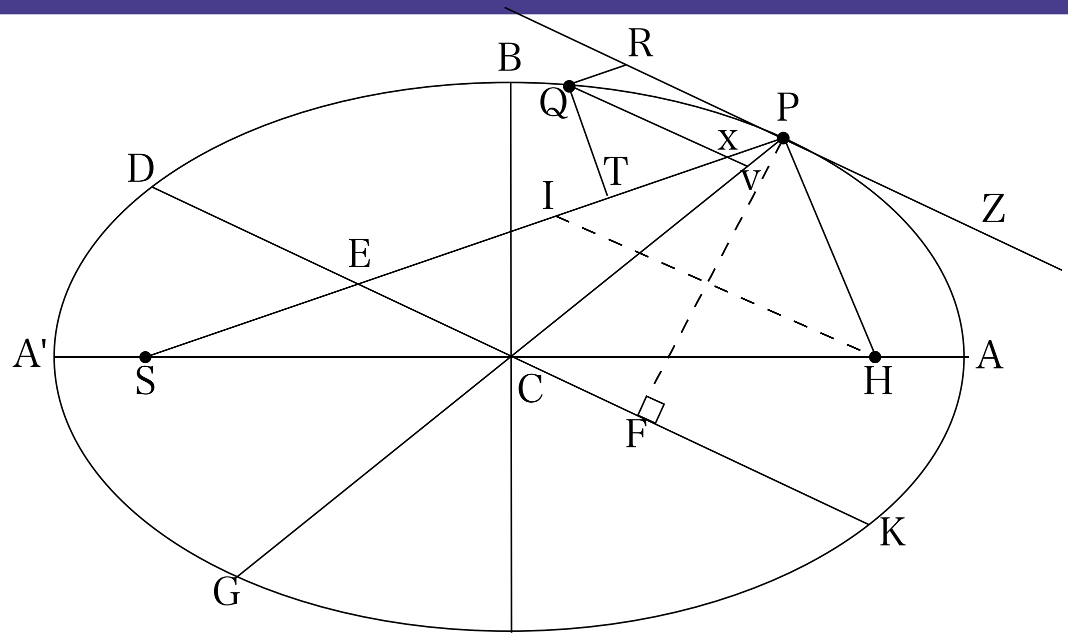
$\triangle HPI$ は二等辺三角形より $PI = PH$ で $EP = \frac{1}{2}(PS + PH)$

これより $EP = AC$ が成り立つ。

逆二乗の法則

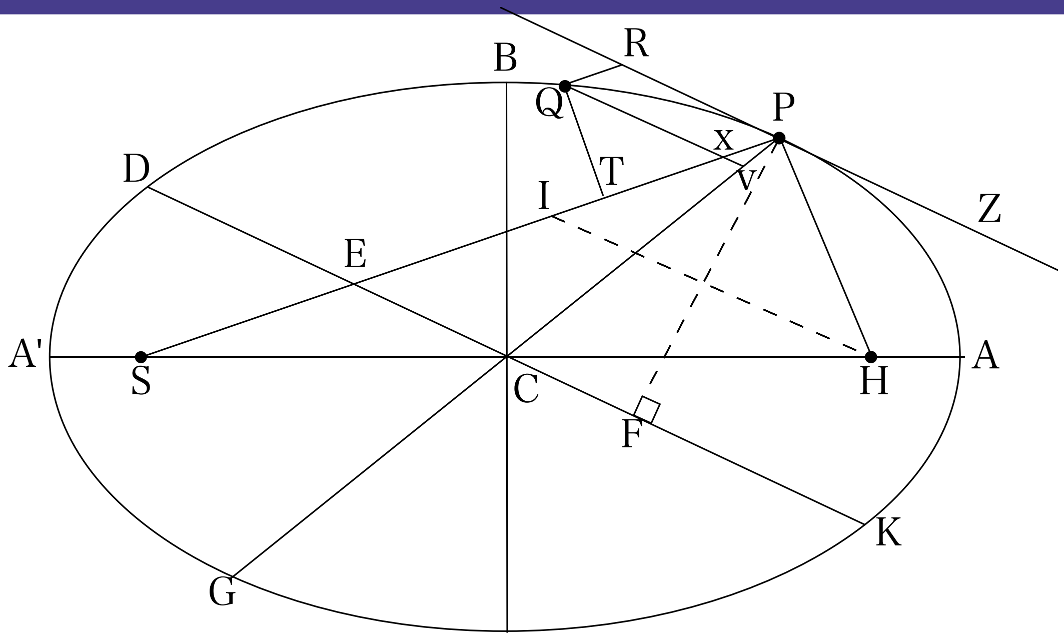


逆二乗の法則



$$\triangle PCE \sim \triangle Pvx \text{ より } \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC}、$$

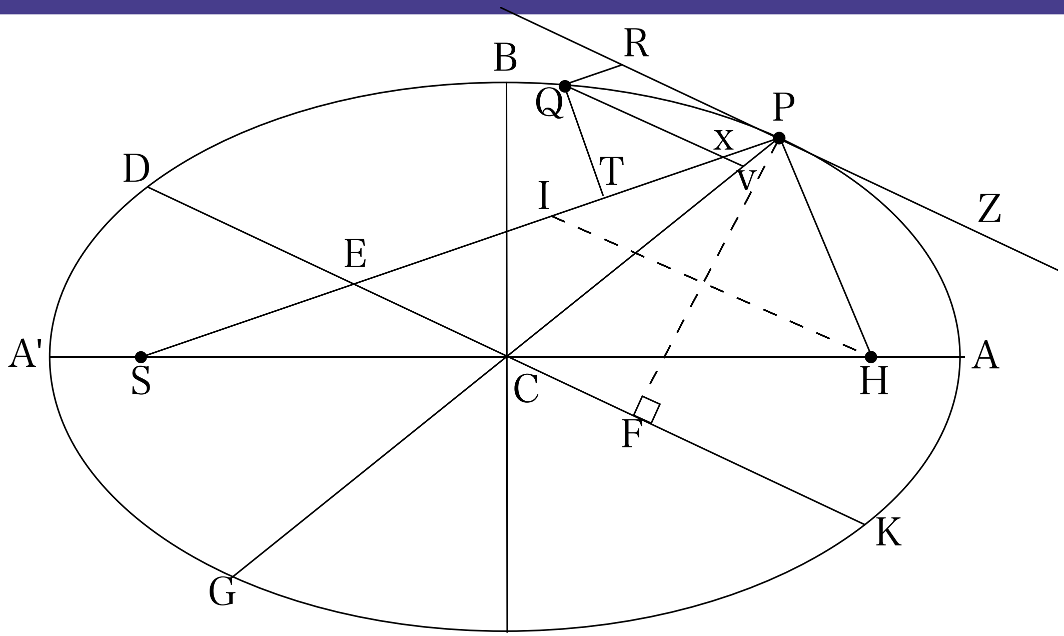
逆二乗の法則



$\triangle PCE \sim \triangle Pvx$ より $\dfrac{Px}{Pv} = \dfrac{PE}{PC}$、

また $QR = Px$ より $\dfrac{QR}{Pv} = \dfrac{PE}{PC}$

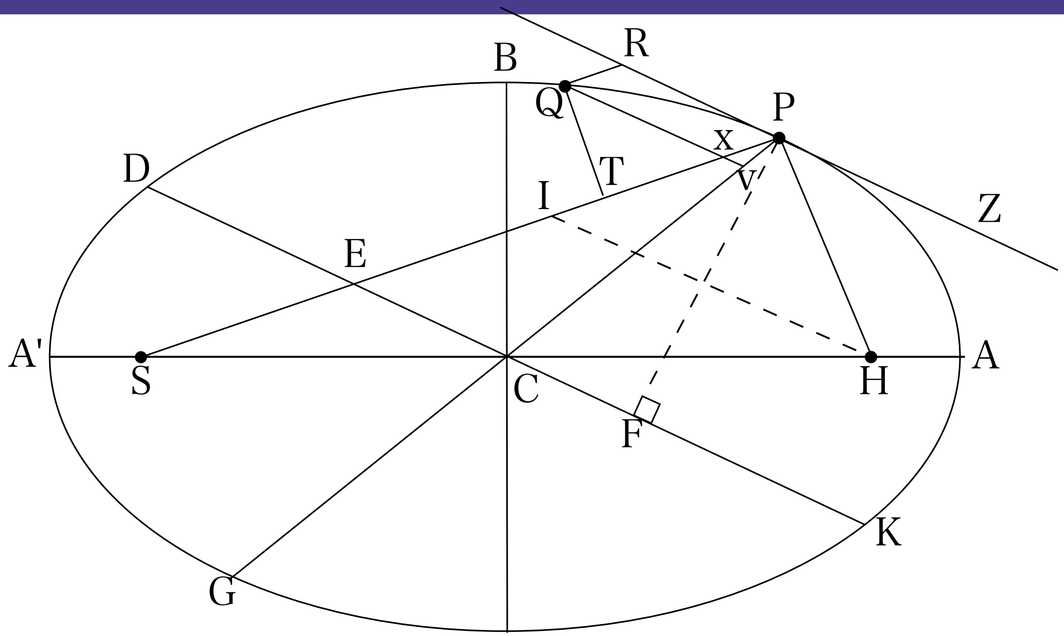
逆二乗の法則



$\triangle PCE \sim \triangle Pvx$ より $\dfrac{Px}{Pv} = \dfrac{PE}{PC}$、

また $QR = Px$ より $\dfrac{QR}{Pv} = \dfrac{PE}{PC}$　これより $\dfrac{QR}{Pv} = \dfrac{AC}{PC}$

逆二乗の法則

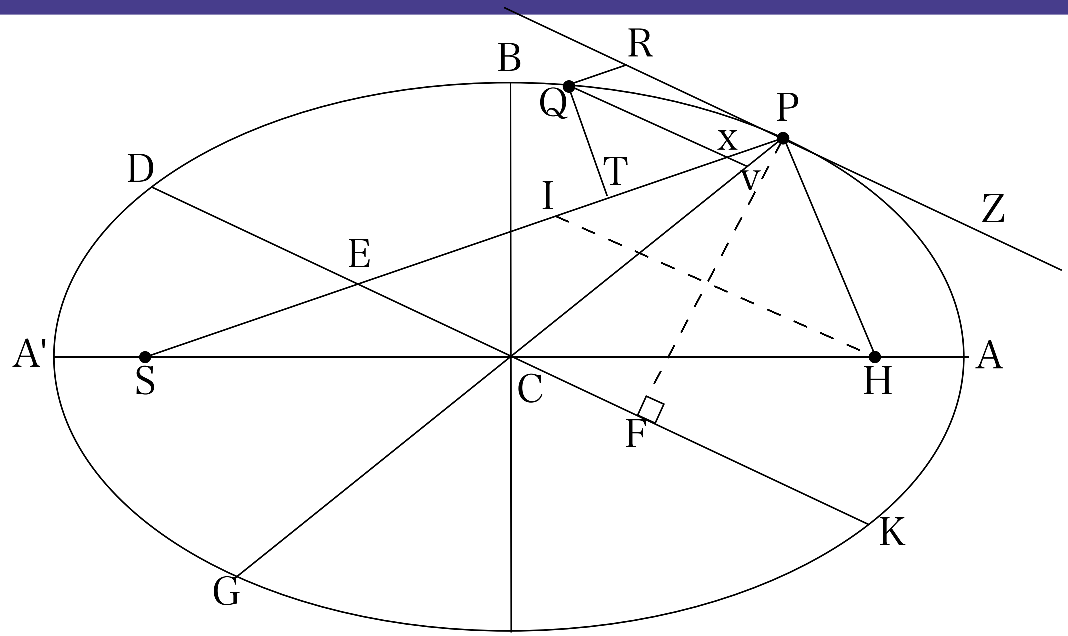


$\triangle PCE \sim \triangle Pvx$ より $\dfrac{Px}{Pv} = \dfrac{PE}{PC}$、

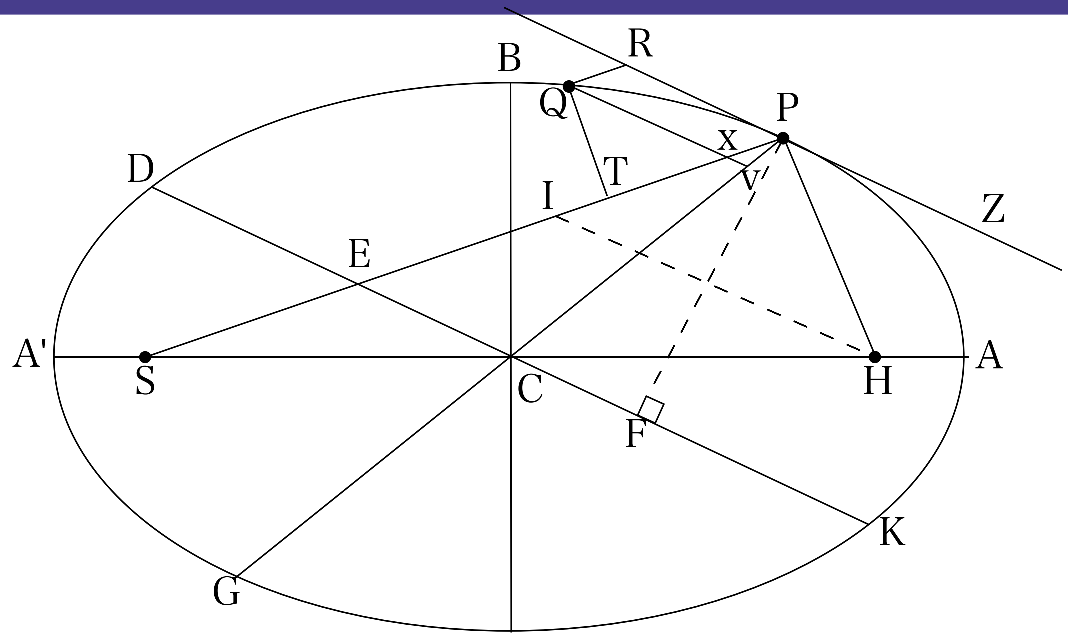
また $QR = Px$ より $\dfrac{QR}{Pv} = \dfrac{PE}{PC}$　これより $\dfrac{QR}{Pv} = \dfrac{AC}{PC}$

楕円の性質より $\dfrac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \dfrac{PC^2}{CD^2}$ なので $\dfrac{1}{Qv^2} = \dfrac{PC^2}{CD^2}\dfrac{1}{Gv \cdot Pv}$

逆二乗の法則

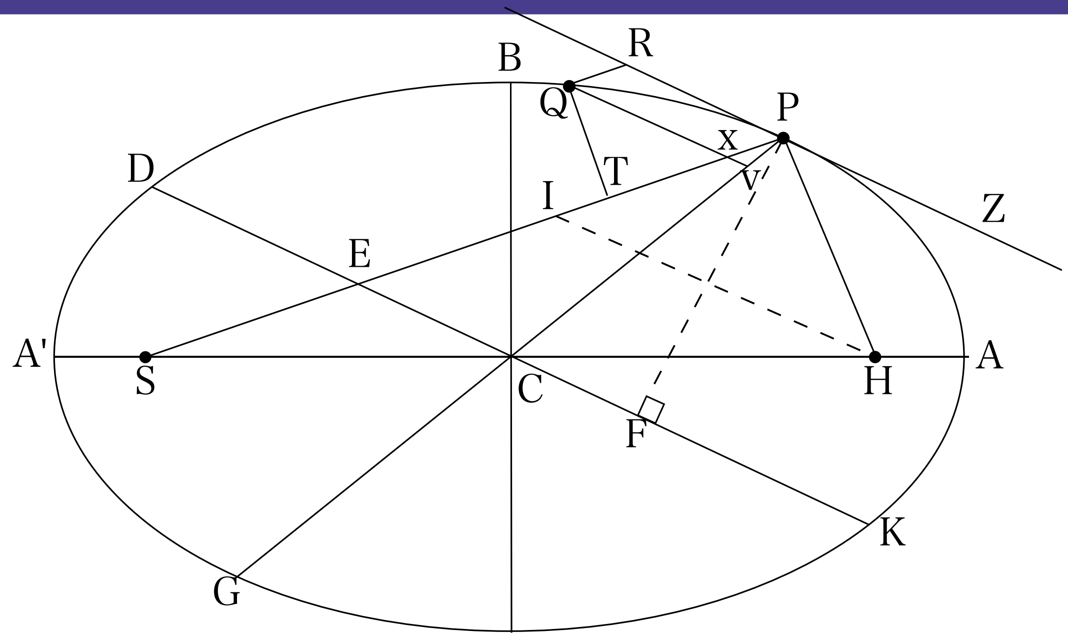


逆二乗の法則



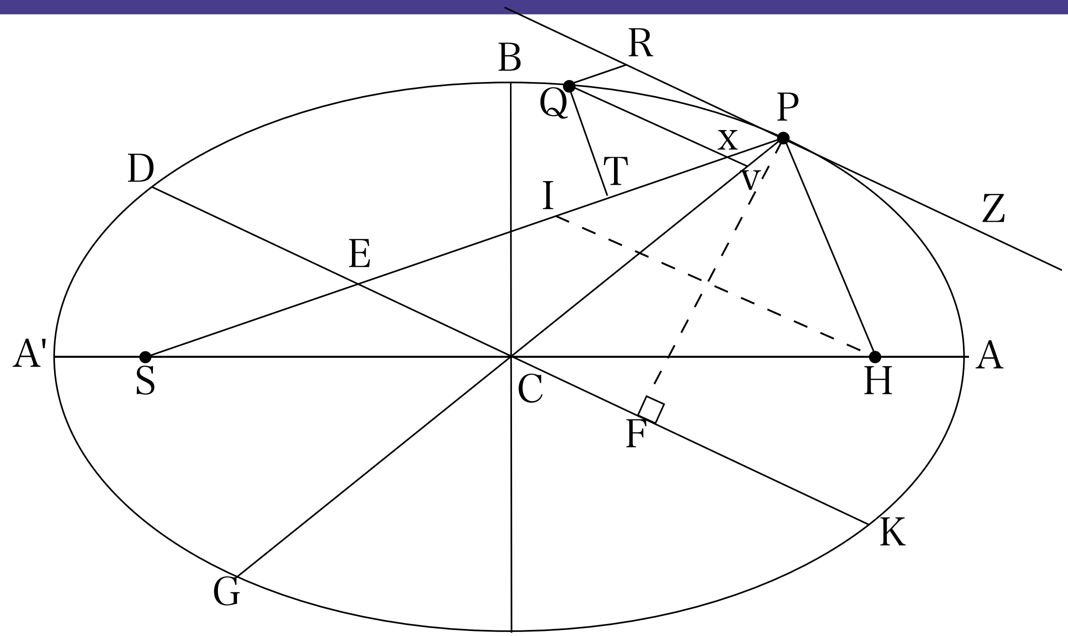
$\triangle QTx \sim \triangle PFE$ より $\dfrac{Qx}{QT} = \dfrac{PE}{PF}$ なので

逆二乗の法則



$$\triangle QTx \sim \triangle PFE \text{ より } \frac{Qx}{QT} = \frac{PE}{PF} \text{ なので } \frac{Qv^2}{QT^2} \approx \frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$$

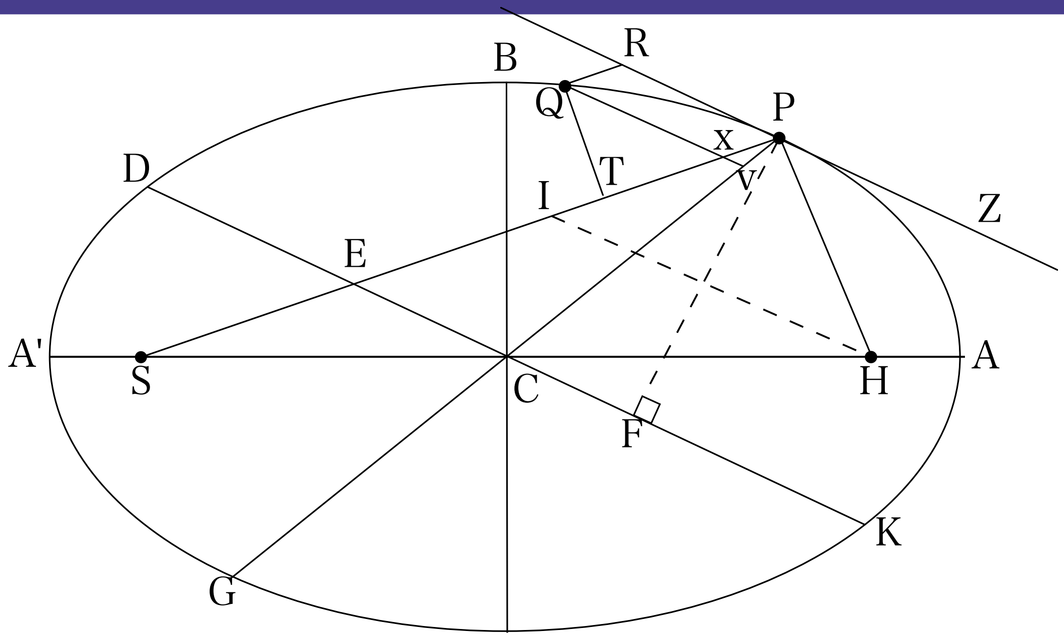
逆二乗の法則



$\triangle QTx \sim \triangle PFE$ より $\dfrac{Qx}{QT} = \dfrac{PE}{PF}$ なので $\dfrac{Qv^2}{QT^2} \approx \dfrac{Qx^2}{QT^2} = \dfrac{AC^2}{PF^2}$

再び楕円の性質から $2CD \cdot PF = 2AC \cdot CB$ *i.e.* $\dfrac{AC^2}{PF^2} = \dfrac{CD^2}{CB^2}$

逆二乗の法則



$\triangle QTx \sim \triangle PFE$ より $\dfrac{Qx}{QT} = \dfrac{PE}{PF}$ なので $\dfrac{Qv^2}{QT^2} \approx \dfrac{Qx^2}{QT^2} = \dfrac{AC^2}{PF^2}$

再び楕円の性質から $2CD \cdot PF = 2AC \cdot CB$ *i.e.* $\dfrac{AC^2}{PF^2} = \dfrac{CD^2}{CB^2}$

これらより $\dfrac{QR}{QT^2} = \dfrac{2PC}{Gv} \cdot \dfrac{1}{L}$ $\left(但し \quad L = \dfrac{2CB^2}{AC} ：通径 \right)$

逆二乗の法則

$Q \to P$ のとき $Gv \to 2PC$ つまり $\displaystyle\lim_{Q \to P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L}$

逆二乗の法則

$Q \to P$ のとき $Gv \to 2PC$ つまり $\displaystyle\lim_{Q \to P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L}$

従って、$F_P = \dfrac{8\kappa^2 m}{L} \cdot \dfrac{1}{SP^2}$ が得られる。

逆二乗の法則

$Q \to P$ のとき $Gv \to 2PC$ つまり $\displaystyle\lim_{Q\to P}\frac{QR}{QT^2}=\frac{1}{L}$

従って、$F_P = \dfrac{8\kappa^2 m}{L}\cdot\dfrac{1}{SP^2}$ が得られる。

即ち、力の大きさは力の中心からの距離 SP の二乗に反比例するという「逆二乗の法則」が得られた。

逆二乗の法則

$Q \to P$ のとき $Gv \to 2PC$ つまり $\displaystyle\lim_{Q \to P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L}$

従って、$F_P = \dfrac{8\kappa^2 m}{L} \cdot \dfrac{1}{SP^2}$ が得られる。

即ち、力の大きさは力の中心からの距離 SP の二乗に反比例するという「逆二乗の法則」が得られた。

特に、物体が S の周りを一周する時間を T、楕円軌道の長半径を a、短半径を b とするとき、力の中心 S と位置 P の距離を r_P とすると

$$F_P = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2} \cdot \frac{1}{{r_P}^2}$$

となる。

逆二乗の法則

[注意]

ニュートンは、逆二乗の法則のもとでの物体の軌道が円錐曲線になることを示してはいない。

教科書に書いてある議論は、「微分方程式の解の一意性」という原理を用いているが、ニュートンは微分方程式も「発明」していないし、この原理も証明していない。