# ニュートンの微積分法 II

# ゼノンのパラドックス

# ゼノンのパラドックス

古代ギリシアのゼノン (Zeno, B.C.490〜430 頃) は以下の様な逆説を述べている：

# ゼノンのパラドックス

古代ギリシアのゼノン (Zeno, B.C.490〜430 頃) は以下の様な逆説を述べている：

**[**飛ぶ矢は飛ばない**]**

# ゼノンのパラドックス

古代ギリシアのゼノン (Zeno, B.C.490〜430 頃) は以下の様な逆説を述べている：

**[飛ぶ矢は飛ばない]**

ある瞬間に物体が空中のある場所に静止しているとしよう、もしその物体が動いていてその瞬間にその場所にあるとすると、その物体が動くことは不可能である。

# ゼノンのパラドックス

古代ギリシアのゼノン (Zeno, B.C.490〜430 頃) は以下の様な逆説を述べている：

**[飛ぶ矢は飛ばない]**

ある瞬間に物体が空中のある場所に静止しているとしよう、もしその物体が動いていてその瞬間にその場所にあるとすると、その物体が動くことは不可能である。

即ち、物体が「ある瞬間にある場所にある」ということだけからは、その物体が静止しているか運動しているかを区別することは不可能である。

# ゼノンのパラドックス

古代ギリシアのゼノン (Zeno, B.C.490〜430 頃) は以下の様な逆説を述べている：

**[飛ぶ矢は飛ばない]**

ある瞬間に物体が空中のある場所に静止しているとしよう、もしその物体が動いていてその瞬間にその場所にあるとすると、その物体が動くことは不可能である。

即ち、物体が「ある瞬間にある場所にある」ということだけからは、その物体が静止しているか運動しているかを区別することは不可能である。

$\Longrightarrow$ 「ある瞬間にある場所にある」ということだけでは運動の状態は決定出来ない！

# 運動の記述

# 運動の記述

**[**ニュートンによる運動の記述の枠組み**]**

# 運動の記述

**[ニュートンによる運動の記述の枠組み]**

- 任意時刻の粒子の位置が与えられたとき、任意時刻における速度を求める。

# 運動の記述

**[ニュートンによる運動の記述の枠組み]**

- 任意時刻の粒子の位置が与えられたとき、任意時刻における速度を求める。
- 任意時刻のおける粒子の速度が与えられたとき、任意時刻における位置を求める。

# 運動の記述

**[ニュートンによる運動の記述の枠組み]**

- 任意時刻の粒子の位置が与えられたとき、任意時刻における速度を求める。
- 任意時刻のおける粒子の速度が与えられたとき、任意時刻における位置を求める。

即ち、「位置」と「速度」に依って運動を記述する。

# 運動の記述

例えば直線上を運動する粒子について、時刻 $t$ での位置を $p(t)$ で表し位置関数と呼ぶことにする。特に $p(0)$ を初期位置とよぶ。

# 運動の記述

例えば直線上を運動する粒子について、時刻 $t$ での位置を $p(t)$ で表し位置関数と呼ぶことにする。特に $p(0)$ を初期位置とよぶ。

時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの間に粒子が移動する (符号付きの) 距離は $p(t+\Delta t)-p(t)$ で与えられる。

# 運動の記述

例えば直線上を運動する粒子について、時刻 $t$ での位置を $p(t)$ で表し位置関数と呼ぶことにする。特に $p(0)$ を初期位置とよぶ。

時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの間に粒子が移動する (符号付きの) 距離は $p(t+\Delta t)-p(t)$ で与えられる。

従って、その間の単位時間あたりの平均移動距離は $\dfrac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}$ となる。

# 運動の記述

例えば直線上を運動する粒子について、時刻 $t$ での位置を $p(t)$ で表し位置関数と呼ぶことにする。特に $p(0)$ を初期位置とよぶ。

時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの間に粒子が移動する (符号付きの) 距離は $p(t+\Delta t)-p(t)$ で与えられる。

従って、その間の単位時間あたりの平均移動距離は $\dfrac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}$ となる。　時刻 $t$ における瞬間の単位時間あたりの平均移動距離

$$v(t)=p'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}$$

を速度と呼ぶ。特に $v(0)$ を初速度という。

# 運動の記述

例えば直線上を運動する粒子について、時刻 $t$ での位置を $p(t)$ で表し位置関数と呼ぶことにする。特に $p(0)$ を初期位置とよぶ。

時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの間に粒子が移動する (符号付きの) 距離は $p(t+\Delta t)-p(t)$ で与えられる。

従って、その間の単位時間あたりの平均移動距離は $\dfrac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}$ となる。　時刻 $t$ における瞬間の単位時間あたりの平均移動距離

$$v(t)=p'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}$$

を速度と呼ぶ。特に $v(0)$ を初速度という。

**[注意]** 一般に $|v(t)|$ を「速さ」とよび速度とは区別する。

# 運動の記述

- $v(t) = p'(t)$ であることから、位置関数 $p(t)$ が与えられれば任意時刻での速度が得られる。

# 運動の記述

- $v(t) = p'(t)$ であることから、位置関数 $p(t)$ が与えられれば任意時刻での速度が得られる。
- 時刻 $t$ で速度 $v(t)$ ならば、無限小時間 $dt$ の間に進む距離は $v(t)dt$ であり、

# 運動の記述

- $v(t) = p'(t)$ であることから、位置関数 $p(t)$ が与えられれば任意時刻での速度が得られる。
- 時刻 $t$ で速度 $v(t)$ ならば、無限小時間 $dt$ の間に進む距離は $v(t)dt$ であり、 初期位置 $p(0)$ と任意時刻での粒子の速度 $v(t)$ が与えられれば、任意時刻での位置 $p(t_1)$ は以下で与えられる：

$$p(t_1) = \int_0^{t_1} v(t)dt + p(0)$$

# 運動の記述

時刻 $t$ から $t + \Delta t$ までの間に粒子の速度の (符号付きの) 変化量は $v(t + \Delta t) - v(t)$ で与えられる。

# 運動の記述

時刻 $t$ から $t + \Delta t$ までの間に粒子の速度の (符号付きの) 変化量は $v(t + \Delta t) - v(t)$ で与えられる。

従って、その間の平均変化量は $\dfrac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ となる。

# 運動の記述

時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの間に粒子の速度の (符号付きの) 変化量は $v(t+\Delta t)-v(t)$ で与えられる。

従って、その間の平均変化量は $\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ となる。

時刻 $t$ における瞬間の速度の平均変化量

$$a(t)=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

を加速度と呼ぶ。

# 運動の記述

時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの間に粒子の速度の (符号付きの) 変化量は $v(t+\Delta t)-v(t)$ で与えられる。

従って、その間の平均変化量は $\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ となる。

時刻 $t$ における瞬間の速度の平均変化量

$$a(t)=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

を加速度と呼ぶ。

**[注意]**

定義より $a(t)=v'(t)=p''(t)$ である。

# 自由落下

# 自由落下

ガリレオは、斜面を転がる玉の平均化速度

$$\frac{v(T)-v(T')}{T-T'}$$

は $T, T'$ によらずに一定 (斜面の傾きで決まる) であることを実験で確かめた。

# 自由落下

ガリレオは、斜面を転がる玉の平均化速度

$$\frac{v(T)-v(T')}{T-T'}$$

は $T, T'$ によらずに一定 (斜面の傾きで決まる) であることを実験で確かめた。
特に真下に落下する自由落下では、$a(t)=g$ で表し、定数 $g=9.8_{[m/s^2]}$ を重力加速度とよぶ。

# 自由落下

ガリレオは、斜面を転がる玉の平均化速度

$$\frac{v(T)-v(T')}{T-T'}$$

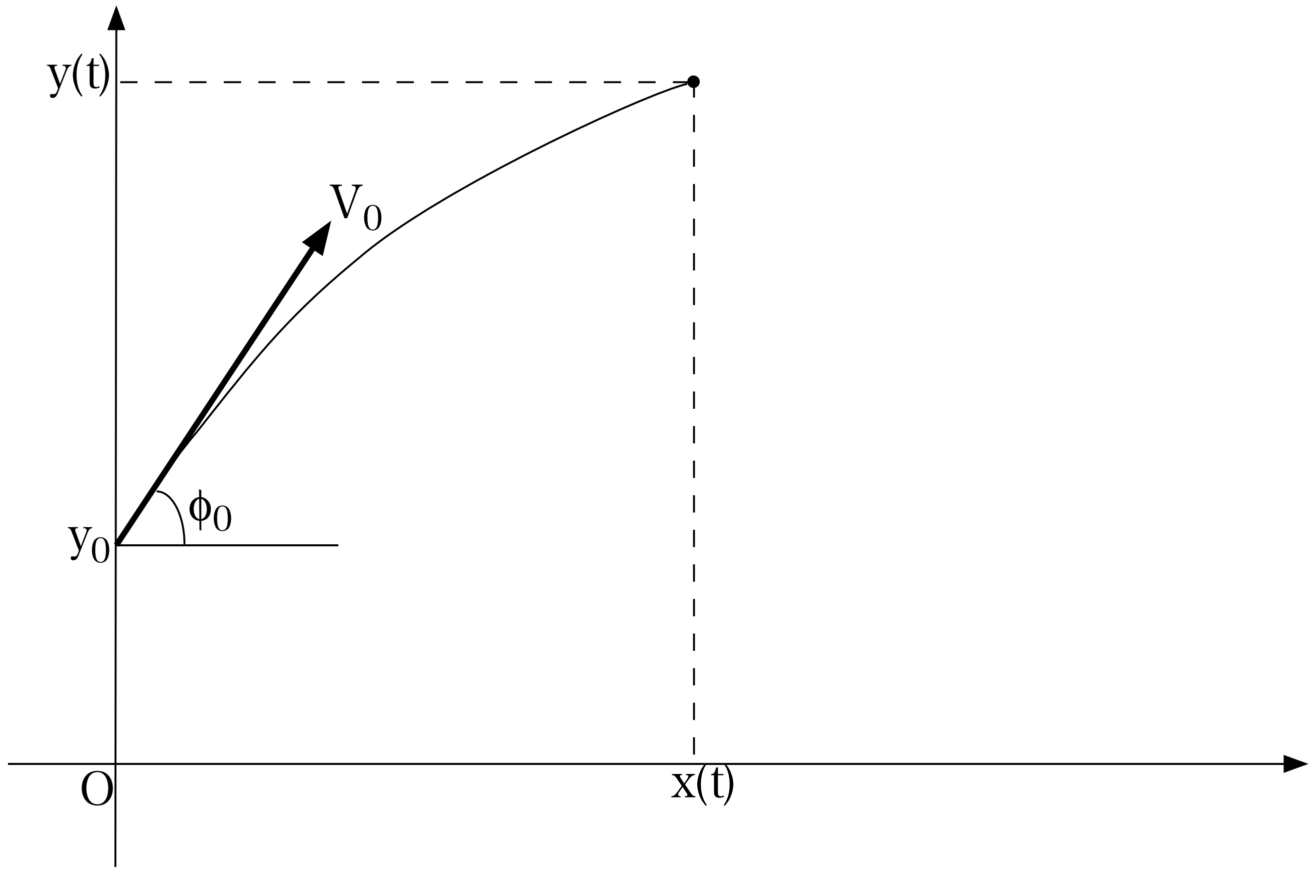
は $T, T'$ によらずに一定 (斜面の傾きで決まる) であることを実験で確かめた。
特に真下に落下する自由落下では、$a(t)=g$ で表し、定数 $g=9.8_{[m/s^2]}$ を重力加速度とよぶ。
鉛直下向きに座標軸を取ると、自由落下する物体の時刻 $t$ における速度と位置は、

$$v(t)=\int_0^t g d\tau+v(0)=gt+v(0), \quad p(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau+p(0)=\frac{1}{2}gt^2+v(0)t+y(0)$$

# 発射体の軌道

# 発射体の軌道

発射体の飛行方向の水平方向を $x$ 軸、鉛直上向きを $y$ 軸とし、高さ $y_0$ から仰角 $\phi_0$ 初速度 $v_0$ で発射された物体の運動を考える。



# 発射体の軌道

水平方向には力が働かないので、$x$ 方向の速度は一定

$$x' = v_0 \cos \phi_0$$

# 発射体の軌道

水平方向には力が働かないので、$x$ 方向の速度は一定

$$x' = v_0 \cos \phi_0$$

鉛直下向きに重力が働くので $y$ 方向の加速度は $-g$

$$y'' = -g, \quad y'(0) = v_0 \sin \phi_0$$

# 発射体の軌道

水平方向には力が働かないので、$x$ 方向の速度は一定

$$x' = v_0 \cos \phi_0$$

鉛直下向きに重力が働くので $y$ 方向の加速度は $-g$

$$y'' = -g, \quad y'(0) = v_0 \sin \phi_0$$

これより、時刻 $t$ における位置は次のように求まる：

$$x(t) = (v_0 \cos \phi_0)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \phi_0)t + y_0$$

# 発射体の軌道

水平方向には力が働かないので、$x$ 方向の速度は一定

$$x' = v_0 \cos \phi_0$$

鉛直下向きに重力が働くので $y$ 方向の加速度は $-g$

$$y'' = -g, \quad y'(0) = v_0 \sin \phi_0$$

これより、時刻 $t$ における位置は次のように求まる：

$$x(t) = (v_0 \cos \phi_0)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \phi_0)t + y_0$$

これより $t$ を消すと、軌道の方程式が得られる：

$$y = \left( \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \phi_0} \right) x^2 + (\tan \phi_0)x + y_0$$

# 発射体の軌道

水平方向には力が働かないので、$x$ 方向の速度は一定

$$x' = v_0 \cos \phi_0$$

鉛直下向きに重力が働くので $y$ 方向の加速度は $-g$

$$y'' = -g, \quad y'(0) = v_0 \sin \phi_0$$

これより、時刻 $t$ における位置は次のように求まる：

$$x(t) = (v_0 \cos \phi_0)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \phi_0)t + y_0$$

これより $t$ を消すと、軌道の方程式が得られる：

$$y = \left( \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \phi_0} \right) x^2 + (\tan \phi_0)x + y_0$$

これより、最高到達点の高さ、射程距離等が容易に求まる。

# 発射体の軌道

高さが最大になるのは $y$ 方向の速度が $0$ となる時なので、

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin\phi_0 = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0}{g}$$

# 発射体の軌道

高さが最大になるのは $y$ 方向の速度が 0 となる時なので、

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin\phi_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0}{g}$$

この時の高さは、

$$\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\phi_0 + y_0$$

# 発射体の軌道

高さが最大になるのは $y$ 方向の速度が 0 となる時なので、

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin\phi_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0}{g}$$

この時の高さは、

$$\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\phi_0 + y_0$$

着地するのは $y = 0$ となる時なので、

$$-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + y_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2\phi_0^2 + 2gy_0}}{g}$$

# 発射体の軌道

高さが最大になるのは $y$ 方向の速度が 0 となる時なので、

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin\phi_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0}{g}$$

この時の高さは、

$$\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\phi_0 + y_0$$

着地するのは $y = 0$ となる時なので、

$$-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + y_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2\phi_0^2 + 2gy_0}}{g}$$

従って、着地地点は

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin\phi_0 \cos\phi_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\phi_0 \cos^2\phi_0 + 2gy_0 \cos^2\phi_0}$$

# 発射体の軌道

高さが最大になるのは $y$ 方向の速度が 0 となる時なので、

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin\phi_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0}{g}$$

この時の高さは、

$$\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\phi_0 + y_0$$

着地するのは $y = 0$ となる時なので、

$$-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + y_0 = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0 \sin\phi_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2\phi_0^2 + 2gy_0}}{g}$$

従って、着地地点は

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin\phi_0 \cos\phi_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\phi_0 \cos^2\phi_0 + 2gy_0 \cos^2\phi_0}$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\phi_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{v_0^2}{4} \sin^2 2\phi_0 + 2gy_0 \cos^2\phi_0}$$

# 発射体の軌道

特に発射地点の高さ $y_0 = 0$ の場合は

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\phi_0 + \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{v_0^2}{4} \sin^2 2\phi_0}$$

# 発射体の軌道

特に発射地点の高さ $y_0 = 0$ の場合は

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\phi_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{v_0^2}{4}\sin^2 2\phi_0}$$

となるので $\sin 2\phi_0 = 1$ すなわち $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ の時に最大の飛距離になる：

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

# 発射体の軌道

特に発射地点の高さ $y_0 = 0$ の場合は

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\phi_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{v_0^2}{4}\sin^2 2\phi_0}$$

となるので $\sin 2\phi_0 = 1$ すなわち $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ の時に最大の飛距離になる：

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

任意時刻での発射体の速さは：

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0\sin\phi_0 t}$$