微分積分学

—歴史に沿って—

新居 俊作

ギリシャ時代

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\iff$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\iff$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る　 $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

(　ピタゴラスの定理

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

(×ピタゴラスの定理

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

($\times$ピタゴラスの定理 バビロニアに遡る)

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

($\times$ピタゴラスの定理 バビロニアに遡る)

正の有理数を測る

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

($\times$ピタゴラスの定理 バビロニアに遡る)

正の有理数を測る $\Longleftrightarrow$ 直角が作図出来れば作図可

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

($\times$ピタゴラスの定理 バビロニアに遡る)

正の有理数を測る $\Longleftrightarrow$ 直角が作図出来れば作図可

$\Longleftrightarrow$ $\sqrt{2}$ は作図可能

ギリシャ時代

単位長さの整数倍を測る $\Longleftrightarrow$ ロープ等に印をつけて測る

直角を測る $\Longleftrightarrow$ 三平方の定理

ロープ等を使って、直角三角形が作図可能

($\times$ピタゴラスの定理 バビロニアに遡る)

正の有理数を測る $\Longleftrightarrow$ 直角が作図出来れば作図可

$\sqrt{2}$ は分数表記出来ない！ $\Longleftrightarrow$ $\sqrt{2}$ は作図可能

背理法(帰謬法)の原理

背理法 (帰謬法) の原理

「示したいこと」の否定を仮定

背理法(帰謬法)の原理

「示したいこと」の否定を仮定

$\Longrightarrow$ 矛盾した結論

背理法(帰謬法)の原理

「示したいこと」の否定を仮定

$\Longrightarrow$ 矛盾した結論

- 数学の一般的な原理に矛盾 or

背理法(帰謬法)の原理

「示したいこと」の否定を仮定

$\Longrightarrow$ 矛盾した結論

- 数学の一般的な原理に矛盾 or
- 最初の仮定に矛盾

背理法(帰謬法)の原理

「示したいこと」の否定を仮定

$\Longrightarrow$ 矛盾した結論

- 数学の一般的な原理に矛盾 or
- 最初の仮定に矛盾

$\Longrightarrow$ 「「示したいこと」の否定」が成り立たない。

背理法(帰謬法)の原理

「示したいこと」の否定を仮定

$\Longrightarrow$ 矛盾した結論

- 数学の一般的な原理に矛盾 or
- 最初の仮定に矛盾

$\Longrightarrow$ 「「示したいこと」の否定」が成り立たない。

$\Longrightarrow$ 「示したいこと」が成り立つ。

背理法(帰謬法)の原理

例

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。

背理法 (帰謬法) の原理

<u>例</u>

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$

背理法(帰謬法) の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $(n, m$ は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。
$\therefore\ m$ は 2 の倍数で $2n^2 = (2m')^2$ (m' は自然数)。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。
$\therefore\ m$ は 2 の倍数で $2n^2 = (2m')^2$ (m' は自然数)。
両辺を 2 で割って：$n^2 = 2m'^2$。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。
$\therefore\ m$ は 2 の倍数で $2n^2 = (2m')^2$ (m' は自然数)。
両辺を 2 で割って：$n^2 = 2m'^2$。
上と同じ議論により n は 2 の倍数となるが、

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。
$\therefore\ m$ は 2 の倍数で $2n^2 = (2m')^2$ (m' は自然数)。
両辺を 2 で割って：$n^2 = 2m'^2$。
上と同じ議論により n は 2 の倍数となるが、
これは「$\frac{m}{n}$ が既約分数である」という仮定に反する。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (n, m は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。
$\therefore\ m$ は 2 の倍数で $2n^2 = (2m')^2$ (m' は自然数)。
両辺を 2 で割って：$n^2 = 2m'^2$。
上と同じ議論により n は 2 の倍数となるが、
これは「$\frac{m}{n}$ が既約分数である」という仮定に反する。
従って「$\sqrt{2}$ が分数表示出来る」という仮定は誤りである。

背理法(帰謬法)の原理

例

「$\sqrt{2}$ が分数表示出来ない」ことを示したい。

$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $(n, m$ は自然数) と既約分数で表されると仮定。
両辺を 2 乗して：$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \therefore\ 2n^2 = m^2$。
左辺が 2 の倍数なので、右辺も 2 の倍数である。
$\therefore\ m$ は 2 の倍数で $2n^2 = (2m')^2$ $(m'$ は自然数)。
両辺を 2 で割って：$n^2 = 2m'^2$。
上と同じ議論により n は 2 の倍数となるが、
これは「$\frac{m}{n}$ が既約分数である」という仮定に反する。
従って「$\sqrt{2}$ が分数表示出来る」という仮定は誤りである。

よって $\sqrt{2}$ は分数表示出来ない。

実数

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ と無限小数で表すとは、

$$\sqrt{2} = 1 + 4\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{1}{100} + 4\cdot\frac{1}{1000} + 2\cdot\frac{1}{10000} + 1\cdot\frac{1}{100000} + \cdots$$

と無限級数表示していることになる。

実数

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ と無限小数で表すとは、

$$\sqrt{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10000} + 1 \cdot \frac{1}{100000} + \cdots$$

と無限級数表示していることになる。

このように表示出来る為には、そもそも $\sqrt{2}$ という数が先に存在しなければならない。

実数

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ と無限小数で表すとは、

$$\sqrt{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10000} + 1 \cdot \frac{1}{100000} + \cdots$$

と無限級数表示していることになる。

このように表示出来る為には、そもそも $\sqrt{2}$ という数が先に存在しなければならない。

<u>実数とは何か？</u>

参考書：瀬山 士郎「数をつくる旅５日間」遊星社
(数の構成方法が書いてある)

三角比

三角比

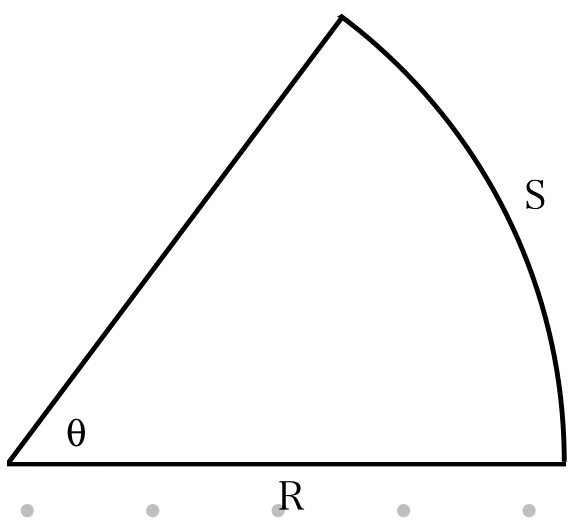
- <u>度数法</u>
  一周を 360° として角度を測る (バビロニアの 60 進法から)

三角比

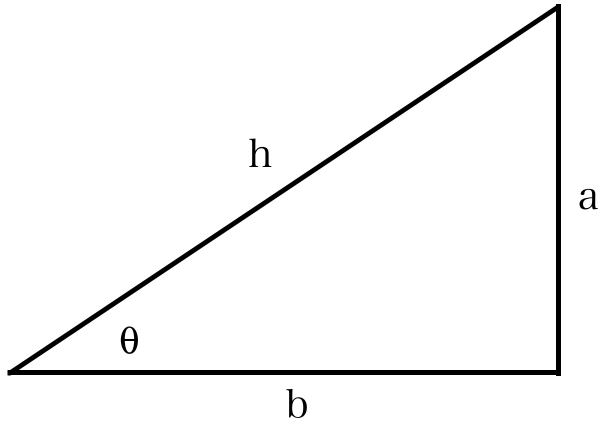
- 度数法
  一周を 360°として角度を測る (バビロニアの 60 進法から)
- 弧度法
  半径 R の扇型の中心角 θ を対応する弧の長さ S を用いて

$$\theta = \frac{S}{R} \quad \text{[rad(ラジアン)]}$$

と表す。
特に半周の大きさを π で表す。

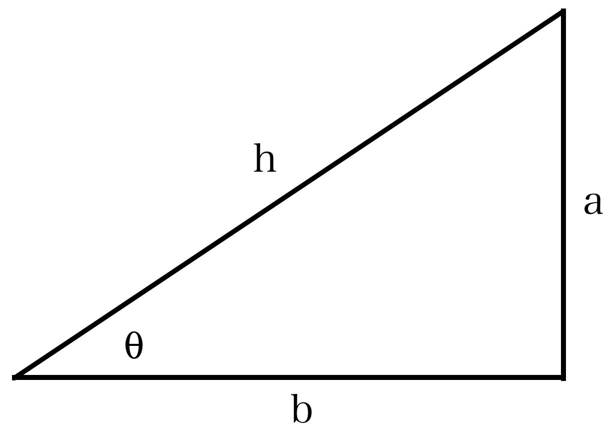


三角比



上図で $\sin\theta := \dfrac{a}{h},\ \cos\theta := \dfrac{b}{h},\ \tan\theta := \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と定める。

三角比



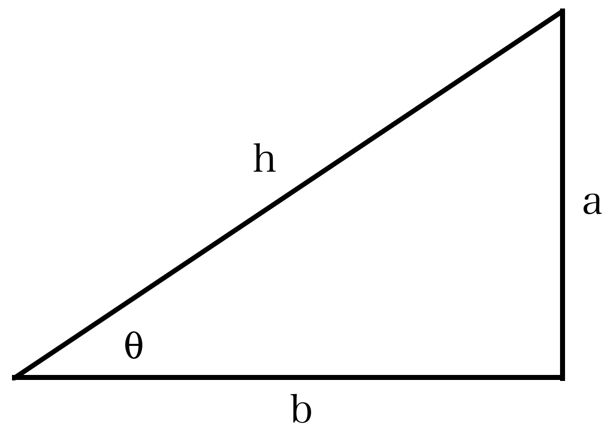
上図で $\sin\theta := \dfrac{a}{h}, \ \cos\theta := \dfrac{b}{h}, \ \tan\theta := \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と定める。

$\theta = 0$ でははは直角三角形は作図出来ないが、便宜上

$$\sin 0 = 0, \ \cos 0 = 1, \ \tan 0 = 0$$

と定める。

三角比



上図で $\sin\theta := \dfrac{a}{h},\ \cos\theta := \dfrac{b}{h},\ \tan\theta := \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と定める。

$\theta = 0$ でははは直角三角形は作図出来ないが、便宜上

$$\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ \tan 0 = 0$$

と定める。　同様に $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ でも便宜上以下の様に定める。

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

π の近似値

π の近似値

π があるものとして、その近似値を求めてみる。
(半径 1 の半円の弧長として幾何学的に表現可能。)

π の近似値

π があるものとして、その近似値を求めてみる。
(半径 1 の半円の弧長として幾何学的に表現可能。)

参考

クロネッカー：

π の近似値

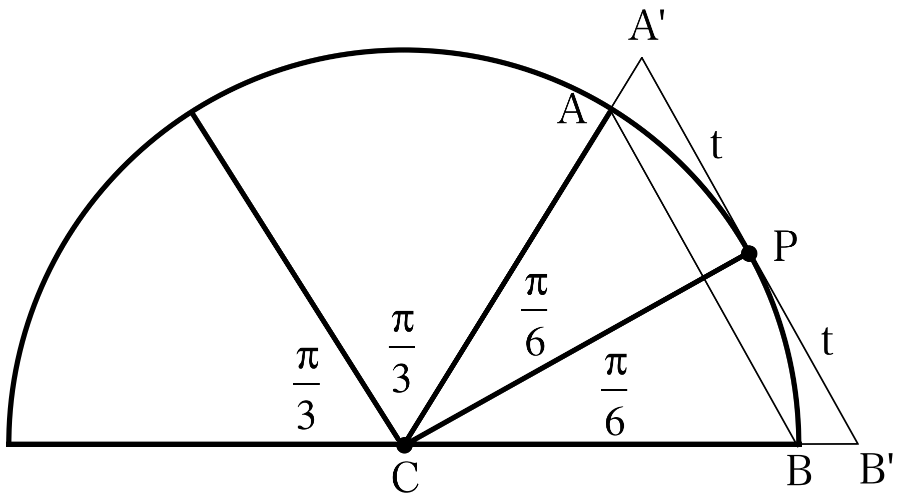
π があるものとして、その近似値を求めてみる。
(半径 1 の半円の弧長として幾何学的に表現可能。)

参考
クロネッカー：
π は整数係数の代数方程式の解にはならないこと示したリンデマンに対し、
「君の美しい理論に何の意味があるのだね？
π などという数はもともと存在しないのだから。」

実数とは何か？

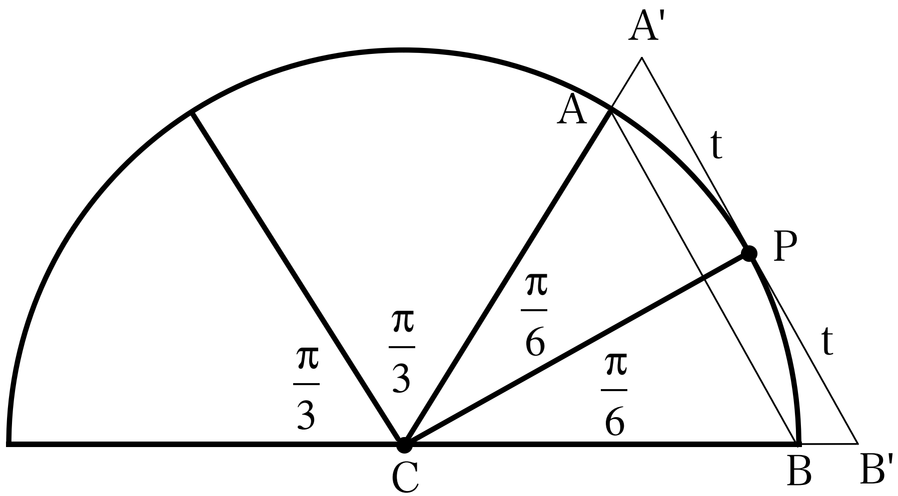
π の近似値

下図で $A'P = B'P = t$ とする：



π の近似値

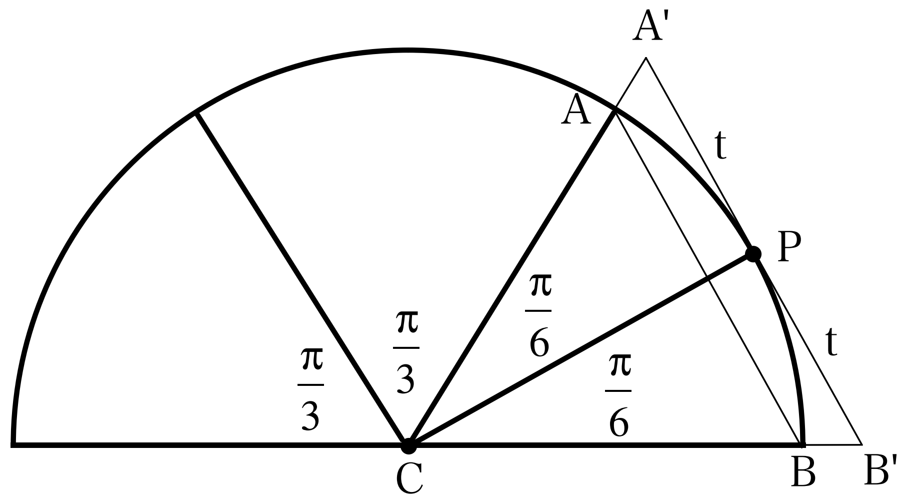
下図で $A'P = B'P = t$ とする：



$\triangle CA'B'$ は正三角形なので $CA' = 2t$。

π の近似値

下図で $A'P = B'P = t$ とする：

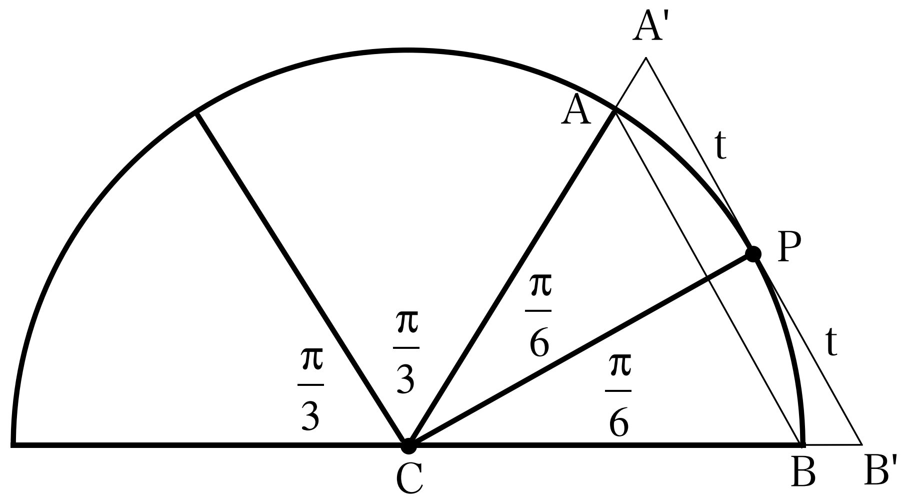


$\triangle CA'B'$ は正三角形なので $CA' = 2t$。

$\triangle CA'P$ に三平方の定理を用いると $1^2 + t^2 = (2t)^2$。

π の近似値

下図で $A'P = B'P = t$ とする：



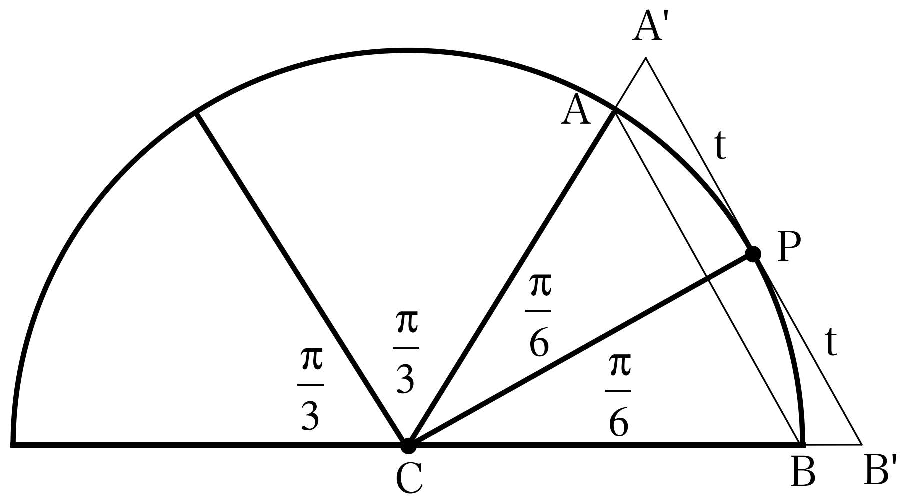
$\triangle CA'B'$ は正三角形なので $CA' = 2t$。

$\triangle CA'P$ に三平方の定理を用いると $1^2 + t^2 = (2t)^2$。

$\therefore A'B' = 2t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

π の近似値

下図で $A'P = B'P = t$ とする：



$\triangle CA'B'$ は正三角形なので $CA' = 2t$。

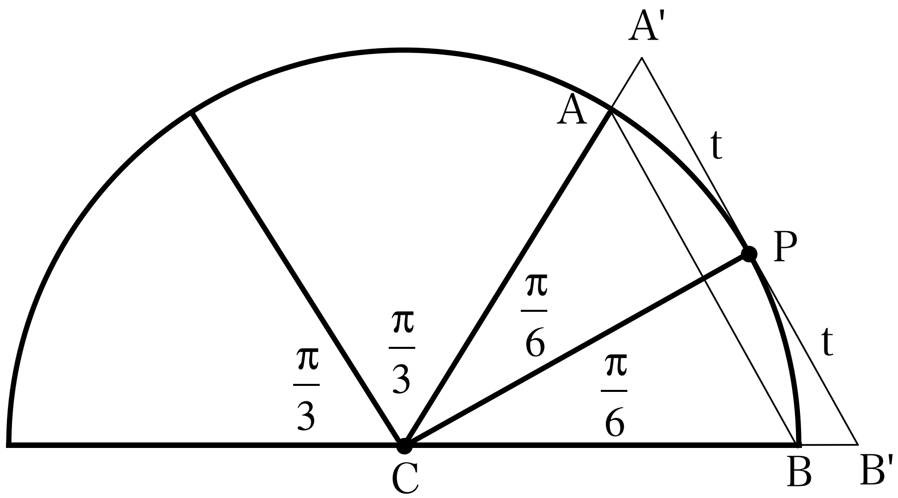
$\triangle CA'P$ に三平方の定理を用いると $1^2 + t^2 = (2t)^2$。

$\therefore A'B' = 2t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

従って $1 = AB <$ 弧 $AB = \frac{\pi}{3} < A'B' = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

π の近似値

下図で $A'P = B'P = t$ とする：



$\triangle CA'B'$ は正三角形なので $CA' = 2t$。

$\triangle CA'P$ に三平方の定理を用いると $1^2 + t^2 = (2t)^2$。

$\therefore A'B' = 2t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

従って $1 = AB <$ 弧 $AB = \frac{\pi}{3} < A'B' = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

つまり $3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3.4641016\cdots$