微分積分学続論II

—常微分方程式の解法と理論—

新居俊作

2023 年 12 月 21 日

第I部
初等積分法とその応用

1　微分方程式とは

定義 1.
未知関数の導関数を含む方程式を一般に微分方程式と呼ぶ。

具体例 1.
炭素 14 は β 線を出して β 崩壊して窒素 14 になるが、個々の原子がいつ崩壊するかは分らず一定時間内に崩壊する確率だけがわかる[a]。時刻 t に存在する炭素 14 原子の数を $N(t)$ とすると時間間隔 Δt の間に崩壊する原子の数は、確率なので $N(t)$ と Δt に比例し

$$kN(t)\Delta t \tag{1.1}$$

となる。ただし k は崩壊定数と呼ばれる定数。従って

$$N(t+\Delta t) - N(t) = -kN(t)\Delta t \tag{1.2}$$

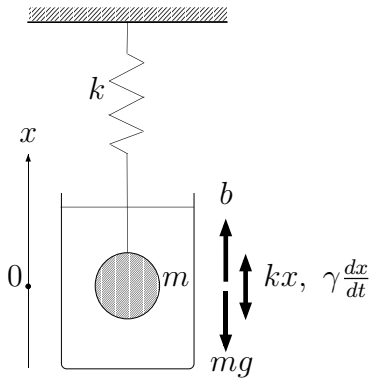
[a]研究が進んでいなくて未だ分からないのではなく、量子力学の原理として確率的なことしか分らない。

が成り立つ。ここで両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ とすると次の微分方程式が得られる[b]：

$$\frac{d}{dt}N(t) = -kN(t). \tag{1.3}$$

具体例 2.

Hooke の法則により、バネ定数 k $(k > 0)$ のバネは自然長からの長さの変化 x に対して kx の力でその変化を戻そうとする。今バネ定数 k のバネに質量 m の錘が吊り下げられていて、水中で振動することを考える。水中では (錘の体積に比例する) 浮力 b と速度に比例する (比例定数 $\gamma \geq 0$) 抵抗が働くとする。



運動方程式は次の様になる (バネは軽いとし、その質量は無視する)：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} - mg + b \tag{1.4}$$

伸びている/縮んでいる方向から戻そうとする方向にバネの力が働き、動いている方向と逆方向に抵抗が働くので右辺の第一、二項にはマイナスが付いている。また、上向を x が正としているので第三項にもマイナスがつく (g は重力定数。)

定義 2.

引数を一つ持つ未知関数についての方程式で、その未知関数の導関数を含むものを常微分方程式[c]とよぶ。

---

[b] $N(t)$ はそもそも自然数なので本来は微分不可能だが、大きな自然数は実数で近似した上で微分可能と仮定することが多い。しかし、この微分可能性はあくまで作業仮説であり、注意が必要な場合もある。

[c] 引数を二つ以上持つ未知関数の、それぞれの引数についての偏導関数を含む方程式は偏微分方程式と呼ばれる。

更に、方程式に含まれる未知変数の導関数の階数を、 その方程式の階数とよぶ。

上述の例では、$N(t)$ と $x(t)$ が未知関数で、(1.3) と (1.4) は、それらの導関数を含むので、 $N(t)$ と $x(t)$ の常微分方程式であり、(1.3) は一階の常微分方程式、(1.4) は二階の常微分方程式である。

定義 3.
常微分方程式が与えられた時、方程式を満たす一つの関数をその方程式の特殊解とよぶ。
一つの常微分方程式が二つ以上 (通常は無限個) の解を持つ時、それをまとめて一般解とよぶ。

注意 1.
単に常微分方程式の解と言う場合、特殊解を指す場合と一般解を指す場合の両方があるので、文脈からそれを峻別する必要がある。

例 1.
$N(t) = e^{-kt}$ は (1.3) の特殊解であり、全ての解は適当に定数を C を選ぶことで $N(t) = Ce^{-kt}$ と書けるので、これが (1.3) の一般解である。

例 2.
$\gamma < 2\sqrt{km}$ のときは

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}\right)t + \frac{b - mg}{k}$$

は (1.4) の特殊解であり、全ての解は、適当に定数 A, B を選ぶことで

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \left\{ A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}\right)t + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}\right)t \right\} + \frac{b - mg}{k}$$

と書けるので、これが (1.4) の一般解である。

特定の物理過程を考える時には一般解を考えるだけでは不十分であり、通常はある時刻における観測値を用いて過去や将来の値を推定することが行われる。

具体例 3.

炭素 14 の β 崩壊では、時刻 $t=0$ における炭素 14 の原子数 $N(0)$ から任意の時刻 t における原子数 $N(t)$ を推定する。この場合特殊解 $N(t)=N(0)e^{-kt}$ を考えることになる。

逆に、時刻 t_0 における原子数 $N(t_0)$ から時刻 $t=0$ で幾つ原子があったかを遡って推測する場合もある。この場合は特殊解 $N(t)=N(t_0)e^{-k(t-t_0)}$ を考える。

具体例 4.

バネに繋がれた水中で振動する錘が時刻 t_0 に位置 $x(t_0)=x_0$、初速度 $\frac{dx}{dt}(t_0)=v_0$ で振動を始めるときには、特殊解

$$x(t)=e^{-\frac{\gamma}{2m}(t-t_0)}\left\{\left(x_0+\frac{mg-b}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}\right)(t-t_0)\right.$$
$$\left.+\frac{2mv_0k+\gamma x_0k+\gamma(mg-b)}{k\sqrt{4km-\gamma^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}\right)(t-t_0)\right\}+\frac{b-mg}{k}$$

を考える。

定義 4.

与えられた常微分方程式

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{1.5}$$

の特殊解が満たすべき条件

$$y(x_0)=y_0,\ \frac{dy}{dx}(x_0)=y_1\ ,\ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0)=y_{n-1} \tag{1.6}$$

を初期条件 (または初期値) とよび、常微分方程式 (1.5) の初期条件 (1.6) を満たす特殊解を求める問題を、常微分方程式 (1.5) の初期値問題とよぶ。

定義 5.

常微分方程式が未知関数の最高階の導関数をそれより低い階数の導関数や未知関数の引数で表した形、すなわち次の形をしている時、正規形の常微分方程式であるという：

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1.7}$$

例 3.
方程式 (1.3) と (1.4) は正規形の常微分方程式である。

以下で具体的な常微分方程式の解き方を紹介していくが、先ず注意すべきなのは、例えば (1.3) は両辺を積分しても

$$N(t) = -k \int N(t)dt \tag{1.8}$$

と右辺の積分の中に再び未知関数 $N(t)$ が入ってしまい解は求まらないことである。そこで、微分方程式を解くために様々な工夫をするが、特に代数演算と微分積分による解法を初等積分法または求積法とよぶ。
次の解法は初等積分法の中でも基本的なものである。

定義 6.
次の形の常微分方程式を変数分離形の常微分方程式とよぶ：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \tag{1.9}$$

但し $f(y)$ は y のみの関数で $g(x)$ は x のみの関数とする。

定理 1.
(1.9) の形の微分方程式は次の様に「変数を分離して」積分することにより解が求まる：

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \tag{1.10}$$

証明. 先ず、 (1.10) の両辺を x で微分すると (1.9) が得られる。
次に、$F(y) = \displaystyle\int f(y)dy$ と置き、$y = y(x)$ を (1.9) の解とする。この時

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f\left(y(x)\right)\frac{d}{dx}y(x) = g(x) \tag{1.11}$$

の両辺を x で積分して

$$F\left(y(x)\right) = \int g(x)dx \tag{1.12}$$

つまり (1.10) が得られる。 □

例 4.

(1.3) は、$N(t) \neq 0$ の時には上の定理で $x=t, g(x)=-k, y=N, f(y)=\frac{1}{N}$ とみると変数分離形である。従って解は

$$\int \frac{1}{N} dN = \int -k dt \tag{1.13}$$

により与えられる。この積分を実行すると、c を積分定数として

$$\log N = -kt + c, \quad i.e.\ N = e^c e^{-kt} \tag{1.14}$$

e^c を新たに $C(\neq 0)$ と置いて

$$N(t) = Ce^{-kt} \tag{1.15}$$

$N(t) = 0$ の場合は $C = 0$ とすると $N \equiv 0$ が得られて、これも含めて (1.3) の一般解は、C を任意定数として

$$N(t) = Ce^{-kt} \tag{1.16}$$

である。

注意 2.

例 4 の議論は当然のことながらそのままでは不十分である。なぜなら、全ての t で $N(t) \neq 0$ の場合と、全ての t で $N(t) = 0$ である場合しか検討されておらず、$N(t) \neq 0$ となる t と $N(t) = 0$ となる t の両方が存在する場合が考慮されていないからである。この問題は次の定理の後半の一意性に訴えることで解消される。

すなわち、ある t_0 で $N(t_0) = 0$ であったとすると、$\bar{N}(t) \equiv 0$ は $\bar{N}(t_0) = 0$ を満たす解なので、(1.3) の右辺は Lipschitz 連続であることから解の一意性より $N(t) = \bar{N}(t) \equiv 0$ となる。

しかし、定理の仮定を満たさないときなどは、上記の様な議論では一部の解を取りこぼすことになる。この件はこの定理を証明する際に再び議論する。

定理 2 (常微分方程式の解の存在と一意性)**.**

正の実数 a, b と実数 c について、二変数関数 $f(x, y)$ は長方形領域 $\{|x| \leq a\ |y-c| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ で連続で、ある正の実数 M について $|f(x, y)| \leq M$ を満たし、更に y について一様に Lipschitz 連続であるとする。この時 x の未知関数 $y(x)$ に関する常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.17}$$

は初期条件

$$y(0) = c \tag{1.18}$$

を満たす解を $x = 0$ の近傍でただ一つもつ。

証明は第二部第 1 章で与える。

多くの初等積分法が、式変形によって与えられた微分方程式を変数分離形に持ち込むことによっている。

宿題 1.

- ファン・メーヘレンのプリントを読んでくる。
- 寺田文行・坂田そう 共著「新版演習微分方程式」P.1〜11 (小テスト範囲)

2 初等積分法とその応用 1

変数分離形常微分方程式の応用

具体例 5.

ある地域にいる特定の生物の個体数の変化を考える。

その生物の時刻 t における個体数を $N(t)$ で表す。単位時間あたりの増加率を k とすると時間間隔 Δt 間での個体数変化は、時間間隔とその時の個体数に比例すると考えるのが自然なので

$$N(t + \Delta t) - N(t) = kN(t)\Delta t \tag{2.1}$$

と表される。この両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ の極限を考えると

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{2.2}$$

となる[d]。

[d] 当然 (2.1) は k が定数だとしても正確には成り立たたず

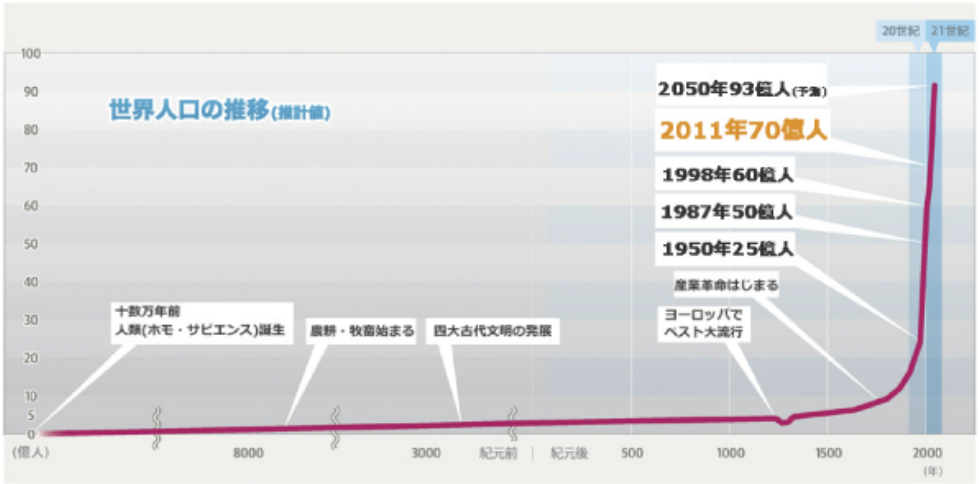
$$k\left(\min_{t \le \tau \le t+\Delta t} N(\tau)\right)\Delta t \le N(t + \Delta t) - N(t) \le k\left(\max_{t \le \tau \le t+\Delta t} N(\tau)\right)\Delta t$$

と考えるべきかもしれない。しかし、この式の極限をとってもやはり (2.2) が得られるので、通常は (2.1) 様な書き方をする。

(2.2) の解は $N(t) = N(0)e^{kt}$ だが、$k > 0$ の時は個体数が爆発的に無制限に増大し、$k < 0$ の時はいくらでも減少して直ぐに絶滅してしまう。

これを人口増加に当てはめて人口爆発を最初に論じたのが Malthus の「人口論」(1798 年) である。その要点は以下の様にまとめられている：

> 人口は制限されなければ幾何級数的 (等比級数的) に増加するが生活資源は算術級数的 (等差級数的) にしか増加しないので、生活資源は必ず不足する



総務省 Webpage：
https://www.soumu.go.jp/johotsusintokei/whitepaper/ja/h25/html/nc123110.html

Malthus も指摘している様に、個体数が無限に増え続けると考えるのは実際の生物としては不合理である。そこで方程式を以下の様に修正する。

増加率 k が現在の個体数に依存すると考える。個体数が非常に少ない時は内的自然増加率 $k_0 > 0$ で増加し、個体数が増えてくると同一生物内で資源 (生息場所、餌等) の奪い合いが生じて増加率は低下する。さらに個体数が増加すると、その地域で生息できる個体数の限界である環境収容力 K に達し、それを超えると過当競争により減少する。この様なメカニズムを実現する最も簡単な場合を考え、$k = k_0\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ として次の logistic 方程式を得る：

$$\frac{dN}{dt} = k_0\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \tag{2.3}$$

これを解くと、初期値 $N(0) > 0$(生物の個体数なので当然正である) の大きさに応じて、単調に増加或いは減少して環境収容力に漸近する一般

解が得られる：

$$N(t) = \frac{KN(0)}{(K - N(0))e^{-k_0 t} + N(0)} \tag{2.4}$$

具体例 6.

人間が感覚刺激の強度の差異を区別できる閾値は、その時の刺激の強度に反比例すると言われている。すなわち、刺激の強さが S である時に、感知できる最小の差異 ΔS について

$$\frac{\Delta S}{S} = \text{定数} \tag{2.5}$$

であるという法則が Weber によって提唱された。これを Weber 比とよぶ。

さらに Fechner は、人間の感覚の強度を R とすると、その差異 ΔR は

$$\Delta R = k\frac{\Delta S}{S} \tag{2.6}$$

を満たす (k は比例定数) と考え、刺激が ΔS 変化した時の感覚強度の変化 ΔR

$$\frac{\Delta R}{\Delta S} = \frac{k}{S} \tag{2.7}$$

において、$\Delta S, \Delta R$ は非常に小さいので $\Delta S \to 0$ での極限の方程式

$$\frac{dR}{dS} = \frac{k}{S} \tag{2.8}$$

を考え、これを解いて次の関係を提唱した：

$$R = k \log \frac{S}{S_0} \tag{2.9}$$

但し、S_0 は知覚できる刺激の下限であり、この時に知覚する強度は 0 となる。これを (Weber-)Fechner の法則とよぶ。

例えば、音を人間が感じる大きさを表す単位デシベル (dB) は、鳴っている音の圧力レベル P_e(単位パスカル (Pa)) と聞こえる大きさの下限 $P_{e0} = 2 \times 10^{-5}$[Pa] を用いて

$$20 \log \frac{P_e}{P_{e0}} \quad [\mathrm{dB}] \tag{2.10}$$

と定められている。

その後 Stevens は、(2.8) を以下の様に修正し

$$\frac{dR}{dS} = n\frac{R}{S} \tag{2.11}$$

(n は比例定数)、これを解いて次の Stevens のべき法則を提唱した：

$$R = KS^n \tag{2.12}$$

(K は単位の取り方で決まる比例定数。)

一階線型常微分方程式

定義 7.
次の形の常微分方程式を一階線型常微分方程式とよぶ：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.13}$$

但し、$P(x)$ と $Q(x)$ は x のみの関数。

この形の方程式は、次の定数変化法で解ける。

(1). 方程式 (2.13) の右辺をゼロとした同次方程式 (または斉次方程式) を考える：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2.14}$$

これは変数分離形なのでその一般解は

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{2.15}$$

(C は任意定数。)

(2). (2.15) の任意定数 C を x の関数 $C(x)$ と見立てて

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{2.16}$$

をもとの方程式 (2.13) に代入すると

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \tag{2.17}$$

すなわち

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.18}$$

となるので、

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{2.19}$$

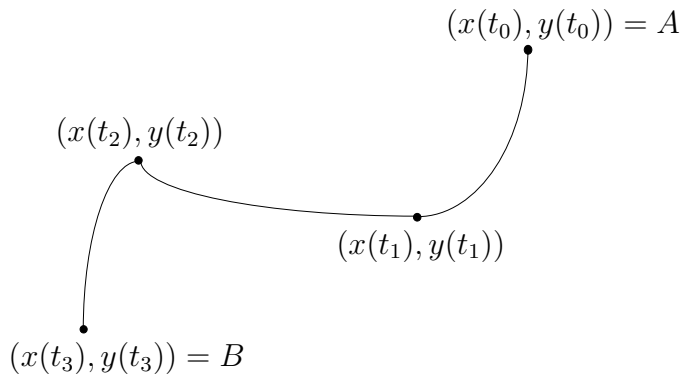
が得られ、これを (2.16) に代入して (2.13) の解を得る。

完全微分型微分方程式と積分因子

線積分を思い出そう。

平面上に C^1 級ベクトル場 $(f(x,y), g(x,y))$ が与えられているときに、平面上の点 A から B に至る区分的に C^1 級である曲線

$$C = \left\{ (x(t), y(t)) \;\middle|\; \begin{array}{c} t_A \leq t \leq t_B,\ (x(t_A), y(t_A)) = A, (x(t_B), y(t_B)) = B, \\ t_A = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = t_B \text{を除いて} C^1 \text{級} \end{array} \right\}$$



に沿った線積分を考える (一年生の微分積分学 I・II、二年生前期の微分積分学続論 I の教科書 [齋藤正彦]243 ページ参照)：

$$\int_C f dx + g dy = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ f\left(x(t), y(t)\right) \frac{dx}{dt}(t) + g\left(x(t), y(t)\right) \frac{dy}{dt}(t) \right\} dt \tag{2.20}$$

この積分の値は一般には C の端点 A, B のみでは決まらず C 全体に依存するが、もしある C^2 級の二変数関数 $\varphi(x,y)$ について

$$(f, g) = \mathrm{grad}\ \varphi \text{ すなわち } f = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ g = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{2.21}$$

となっているならば

$$\begin{aligned} \int_C f dx + g dy &= \int_{t_A}^{t_B} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right\} dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left\{ \varphi\left(x(t), y(t)\right) \right\} dt \\ &= \varphi\left(x(t_B), y(t_B)\right) - \varphi\left(x(t_A), y(t_A)\right) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) \end{aligned} \tag{2.22}$$

となり、端点だけで決まる。

(2.21) が成り立っている場合の特徴として

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.23}$$

が成り立つ。実は、この逆が成り立つ。

定理 3.

平面上の C^1 級ベクトル場 $(f(x,y), g(x,y))$ について

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.24}$$

が成り立つならば、ある C^2 級関数 $\varphi(x,y)$ について

$$(f,g) = \mathrm{grad}\ \varphi \tag{2.25}$$

が成り立つ。

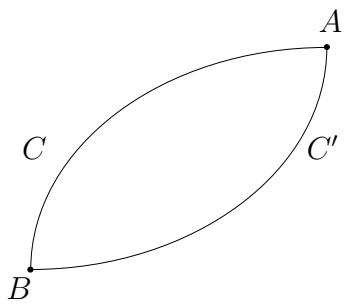
証明.

先ず、(2.24) が成り立つならば、$\displaystyle\int_C f dx + g dy$ は C の始点と終点だけで定まり、途中の経路によらないことを示す。

平面上の点 A から B への二つの曲線 C, C' について、A から C に沿って B に至りそこから C' に沿って A に戻る閉曲線を $C - C'$ で表すと

$$\int_C f dx + g dy - \int_{C'} f dx + g dy = \int_{C-C'} f dx + g dy \tag{2.26}$$

が成り立つ。



ここで、次の Green の定理を用いる：

定理 4 (Green の定理)**.**

D を平面の有界領域とし、∂D をその境界とし、$f_1(x,y)$ と $f_2(x,y)$ を D と ∂D を含む開集合上で定義された C^1 級の関数とする。このとき

$$\int_{\partial D} f_1 dx + f_2 dy = \iint_D \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dxdy \tag{2.27}$$

が成り立つ。

証明は一年生の微分積分学 I・II、2 年生前期微分積分続論 I の教科書 [齋藤正彦]247 ページ参照。

$C - C'$ 囲まれた領域を D とすると Green の定理より

$$\int_{C-C'} f dx + g dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy \tag{2.28}$$

が成り立つ。従って、(2.24) が成り立つ場合はこの右辺はゼロなので

$$\int_C f dx + g dy = \int_{C'} f dx + g dy \tag{2.29}$$

が成り立つことになる。

そこで、事前に一点 A を固定し、点 (x,y) に対し A から (x,y) までの区分的に C^1 級の任意の曲線 C を取り

$$\boldsymbol{\varphi(x,y) := \int_C f dx + g dy} \tag{2.30}$$

と定める。上記から $\varphi(x,y)$ の値は C の取り方によらない。

(x,y) から $(x+\Delta x, y)$ に至る直線を $\Delta_1 = \{(x+t,y) | 0 \le t \le \Delta x\}$ とおいて、C の後に Δ_1 を繋いだ曲線を $C+\Delta_1$ と書くと、Δ_1 上では $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 0$ なので

$$\begin{aligned} \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y) &= \int_{C+\Delta_1} f dx + g dy - \int_C f dx + g dy \\ &= \int_{\Delta_1} f dx + g dy \\ &= \int_0^{\Delta x} \{f(x+t,y)\} dt \end{aligned} \tag{2.31}$$

となり

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f \tag{2.32}$$

が成り立つ。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = g \tag{2.33}$$

も同様に示される。 □

以下では同様のことを微分方程式について行う。

平面上で定義された C^1 級関数 $P(x,y), Q(x,y)$ について、平面上の曲線 $(x(t), y(t))$ が常に次の関係を満たすとする：

$$P(x,y)\frac{dx}{dt} + Q(x,y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.34}$$

このとき、パラメタ t の取り方を変えても (2.34) は成り立ち、この関係はパラメタの取り方によらない。すなわち $t = t(s)$ と別のパラメタ s を取って $(x(s), y(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$ とすると $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}$ より

$$P(x,y)\frac{dx}{ds} + Q(x,y)\frac{dy}{ds} = \left\{P(x,y)\frac{dx}{dt} + Q(x,y)\frac{dy}{dt}\right\}\frac{dt}{ds} = 0 \tag{2.35}$$

このことより、(2.34) は、よくパラメタ t を省略して次の様に書かれる

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.36}$$

このとき、図形としての曲線 $C = \{(x(t), y(t))\}$ はどう表現されるかを考える。

先ず、ある C^2 関数 $\varphi(x,y)$ について

$$\mathrm{grad}\ \varphi = (P, Q) \tag{2.37}$$

となっている時には、(2.36) は次の様に書かれる場合もある：

$$d\varphi = 0 \tag{2.38}$$

この時は、これを満たす (x,y) は

$$\varphi(x,y) = c \tag{2.39}$$

(但し c は任意定数) となる。(2.36) を (2.34) の意味で理解すると

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(x(t), y(t)\right) = 0 \tag{2.40}$$

なので、

$$\varphi\left(x(t), y(t)\right) = c \tag{2.41}$$

が解となり、やはりそれが定める曲線 C は (2.39) となる。

(2.37) を満たす φ が存在する条件は、先ほどと全く同じ議論により

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.42}$$

であり、その時の φ の構成方法も全く同じである。

定義 8.

(2.36) の形の微分方程式で (2.42) を満たすもの、すなわち (2.38) の形の微分方程式を完全微分形の微分方程式とよぶ。

微分方程式がベクトル解析と異なるのは、(2.36) が (2.42) を満たさなくても解が (2.39) の形で書かれる場合があるということである。

(2.36) の解は、全体に C^1 級関数 $\mu(x, y)$ をかけた方程式

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \tag{2.43}$$

を満たすが、(2.42) が成り立っていても、一般には

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \neq \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{2.44}$$

である。逆に、(2.42) が成り立っていなくても

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{2.45}$$

が成り立っていれば、(2.43) の解は (2.39) の形で書かれ、それは (2.36) も満たしている。そこで、(2.36) を解くには (2.45) を満たす μ を探すことになる。

定義 9.

微分方程式 (2.36) は (2.42) を満たさないが、(2.45) を満たす $\mu(x, y)$ が存在するとき、この μ を (2.36) の積分因子とよぶ。

積分因子を求める一般的な方法は存在せず、方程式ごとに試行錯誤をするしかないが、以下でいくつかの手法を紹介する。

積分因子の求めかた

μ が x のみの関数の場合

$\mu = \mu(x)$ と x のみの関数の場合、(2.45) に代入して整理すると

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{2.46}$$

となるので、

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{2.47}$$

が x のみの関数である場合は x の関数 $\mu(x)$ についての微分方程式 (2.46) を積分して

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\right\} \tag{2.48}$$

が積分因子である。

μ が y のみの関数の場合

上の場合と同様にして

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{2.49}$$

が y のみの関数である場合は

$$\mu(x) = \exp\left\{-\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dy\right\} \tag{2.50}$$

が積分因子である。

P, Q が x, y の多項式または有理関数である場合

P, Q が x, y の多項式または有理関数である場合は $\mu(x, y) = x^m y^n$ とおいて $m, n \in \mathbb{Z}$ を求める。

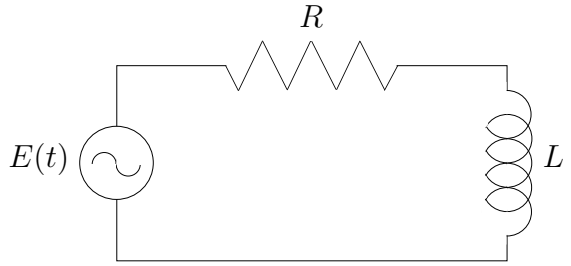
宿題 2.
寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.12〜18 (小テスト範囲)

3　初等積分法とその応用２

一階線型常微分方程式の応用

具体例 7.

インダクタンス $L[Nm/A^2]$ のコイルと抵抗値 $R[\Omega]$ の抵抗素子と時刻 t での起電力が $E(t)[V]$ の電源が直列に繋がれた回路を考える。



このとき時刻 t に回路を流れている電流を $i(t)[A]$ とすると、コイルでの電圧降下は $L\frac{di}{dt}$、抵抗での電圧降下は Ri なので、Kirchhoff の法則より次の関係式が成り立つ。

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \tag{3.1}$$

これを解いて

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{1}{L}\int_0^t E(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau + i(0)\right\} \tag{3.2}$$

特に、電源の電圧が一定 $E(t) \equiv E_0$ の時は

$$i(t) = \left(i(0) - \frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R} \tag{3.3}$$

となる。よって電流は時間と共に $\frac{E_0}{R}$ に近づく。

また、$E = E_0 \sin\omega t$ の時は

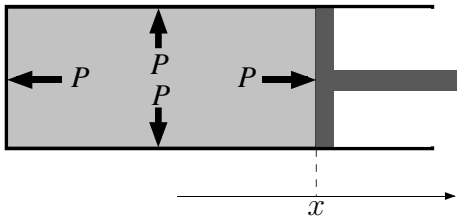
$$\begin{aligned} i(t) &= \left(\frac{E_0 L\omega}{R^2+L^2\omega^2} + i(0)\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t) \\ &= \left(\frac{E_0 L\omega}{R^2+L^2\omega^2} + i(0)\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \delta) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となり (ただし $\tan\delta = \frac{L\omega}{R}$)、時間と共に周期 ω 振幅 $\frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$ の振動に近づく。

完全微分型微分方程式の応用

具体例 8.

熱力学の第一法則



図の熱力学系で、内部の圧力が P でピストンの位置が x の時の内部エネルギーを $U(P,x)$ とし、P,x の無限小の変化 dP,dx によるその変化量を dU とする。その際に系が外部にする仕事は、$W = Pdx$ であり、系が外部から吸収する熱量を δQ とすると

$$\begin{aligned}\delta Q &= dU + Pdx \\ &= \frac{\partial U}{\partial P}dP + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + P\right)dx\end{aligned} \tag{3.5}$$

が成り立つ。

熱力学の第二法則

外部の熱源から吸収した熱を、その一部をより低温の物体に放出することなく全てを仕事に変換して元に戻る過程 (第２種永久機関) は存在しない。

δQ は完全微分形ではなく、基準点 (P_0, x_0) を決めて状態 (P,x) とを結ぶ曲線 C によって

$$\begin{aligned}Q(P,x;C) &= \int_C dU(P,x) + Pdx \\ &= \int_C \frac{\partial U}{\partial P}dP + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + P\right)dx\end{aligned} \tag{3.6}$$

と定めても、この Q は経路 C によって変わり、状態 (P,x) のみでは定まらないという意味でこれは状態量ではない。しかし次が成り立つ：

定理 5.

(3.5) の熱量 δQ は積分因子を持つ。すなわち、

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dx = dS \tag{3.7}$$

となる関数 T と S が存在する。

この T を絶対温度、S をエントロピーとよぶ。

証明は、熱力学の第二法則が成り立つならば

$$dU + Pdx = 0 \tag{3.8}$$

を満たす曲線では互いに結ぶことのが出来ない二つの状態が、互いにいくらでも近いところにあることを示し、それを用いて積分因子を構成する。詳しくは [大森] 参照。

従って、この S は状態 (P, x) のみによって決まる状態量である。

常微分方程式を解く様々な工夫

$p = \frac{dy}{dx}$ をパラメタと見て解ける場合

一階常微分方程式

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{3.9}$$

が x または y について解ける場合は $\frac{dy}{dx} = p$ をパラメタと見てこの方程式の解を求めることができる。

$F(x, \frac{dy}{dx}) = 0$ の形の方程式が x について解ける場合

微分方程式

$$F(x, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{3.10}$$

が x について解けて

$$x = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.11}$$

の形になる時は、$p = \frac{dy}{dx}$ とおいて p をパラメタとする曲線

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \displaystyle\int p\frac{d\varphi}{dp}dp + c \end{cases} \tag{3.12}$$

が解である。

実際、第一式と第二式を p で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{p\frac{d\varphi}{dp}}{\frac{d\varphi}{dp}} = p \tag{3.13}$$

これを第一式に代入すると (3.11) が成り立つ。

$F(y, \frac{dy}{dx}) = 0$ の形の方程式が y について解ける場合

微分方程式

$$F(y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{3.14}$$

が y について解けて

$$y = \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.15}$$

の形になる時は、$p = \frac{dy}{dx}$ とおいて p をパラメタとする曲線

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{1}{p}\frac{d\psi}{dp}dp + c \\ y = \psi(p) \end{cases} \tag{3.16}$$

が解である。

実際、第一式と第二式を p で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{\frac{d\psi}{dp}}{\frac{1}{p}\frac{d\psi}{dp}} = p \tag{3.17}$$

これを第二式に代入すると (3.15) が成り立つ。

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ が x について解ける場合

微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3.18}$$

が x について解けて

$$x = \varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{3.19}$$

の形になる時は、$p = \frac{dy}{dx}$ とおいて

$$x = \varphi(y, p) \tag{3.20}$$

と書き直し、両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.21}$$

右辺に x は含まれないので、これは y と p に関する微分方程式である。これの解を $\Phi(y, p, C) = 0$ (C は任意定数) として、これと (3.20) から得られる p をパラメタとする曲線が解である。

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ が y について解ける場合

微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3.22}$$

が y について解けて

$$y = \psi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{3.23}$$

の形になる時は、$p = \frac{dy}{dx}$ とおいて

$$y = \psi(x, p) \tag{3.24}$$

と書き直し、両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.25}$$

右辺に y は含まれないので、これは x と p に関する微分方程式である。これの解を $\Psi(x, p, C) = 0$ (C は任意定数) として、これと (3.24) から得られる p をパラメタとする曲線が解である。

例 5.

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.26}$$

の形の微分方程式を Clairaut の微分方程式とよび、

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.27}$$

の形の微分方程式を Lagrange の微分方程式または d'Alembert の微分方程式とよぶ。

Riccati の微分方程式

次の形の微分微分方程式を Riccati の微分方程式と呼ぶ：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \tag{3.28}$$

この形の方程式は特殊解 y_1 が一つ見つかればそれを用いて一般解を求めることができる。

一般解を $y = y_1 + u$ とおいて (3.29) に代入すると：

$$\frac{du}{dx} + (2P(x)y_1 + Q(x))\,u = -P(x)u^2 \tag{3.29}$$

これは宿題になっていた [寺田-坂田]12 ページの Bernoulli の微分方程式なので、$v = \frac{1}{u}$ とおくと一階線型常微分方程式になる：

$$\frac{dv}{dx} - (2P(x)y_1 + Q(x))\,v = P(x) \tag{3.30}$$

これを解くと v、従って u が求まり (3.28) の一般解が求まる。

宿題 3.
寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.19〜25 (小テスト範囲)

4　初等積分法とその応用３

Riccati の微分方程式の応用

具体例 9.
　工学における線型最適制御 (LQR) 問題は一般的には以下の様に定式化される。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \tag{4.1}$$

($\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ かつ A は $n \times n$ 行列) に従って変化する系に対し、外力 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ を次の形で加えて制御し：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{4.2}$$

(B は $n \times m$ 行列) 次の評価関数を最小化する：

$$J = \int_0^{+\infty} \left({}^t\boldsymbol{x}Q\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{u}R\boldsymbol{u}\right) dt \tag{4.3}$$

(Q は $n \times n$ 行列で R は $m \times m$ 行列)。

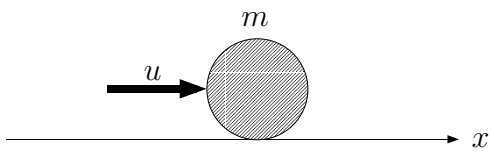
すなわち、制御のためにかける外力と系の大きさの合計を可能な限り小さく抑えることを考える。

特にフィードバック制御の時は

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} \tag{4.4}$$

(K は $m \times n$ 行列) の形で (4.3) の J が最小になる K を求める。

例えば、質量 m の質点を外力 F によって制御して停止させることを考える：



床との摩擦力が無視できるくらい小さいとすると、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = u \tag{4.5}$$

だが、 (4.2) の形に書くと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

となる。

フィードバック制御では

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

の形の制御を考えることになる。

以下では計算を簡単にするために $x, u \in \mathbb{R}$ で $A = a, B = b, K = k, Q = q, R = r \in \mathbb{R}$ の場合を考える、すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + bu \\ u = -kx \end{cases} \tag{4.8}$$

のもとで

$$J = \int_0^{+\infty} \left(qx^2 + ru^2\right) dt \tag{4.9}$$

を最小化する k を求める。

(4.8) の第二式を第一式に代入し、更に慣習に従って $k = \frac{b}{r}p$ とおいてパラメタを k から p に取り替えると、(4.8) の第一式は

$$\frac{dx}{dt} = \left(a - \frac{b^2}{r}p\right)x \tag{4.10}$$

となる。この解は

$$x(t) = x_0 e^{\left(a - \frac{b^2}{r}p\right)t} \tag{4.11}$$

であり、これを (4.9) に代入して整理すると

$$J = \int_0^{+\infty} x_0^2 \left(q + \frac{b^2p^2}{r}\right) e^{2\left(a - \frac{b^2}{r}p\right)t} dt \tag{4.12}$$

となる。

J が最小となる条件として

$$\frac{dJ}{dp} = \int_0^{+\infty} x_0^2 \left\{-\frac{2b^2}{r}\left(q + \frac{b^2}{r^2}p^2\right)t + \frac{2b^2}{r}p\right\} e^{2\left(a - \frac{b^2}{r}p\right)t} dt = 0 \tag{4.13}$$

を考える。$a < \frac{b^2}{r}p$ のときこの積分は収束し、積分を計算すると

$$x_0^2 \frac{2b^2}{r}\left\{-2ap + \frac{b^2}{r}p^2 - q\right\} = 0 \tag{4.14}$$

すなわち

$$2ap - \frac{b^2}{r}p^2 + q = 0 \tag{4.15}$$

これを満たす p を求めるのは簡単だが、一般 ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$) の場合は計算が大変になる。そこで、この解を求めるために、次の Riccati の微分方程式を考えることにする：

$$\frac{dp}{dt} = 2ap - \frac{b^2}{r}p + q \tag{4.16}$$

(4.15) の解を p_0 とすると $p(t) \equiv p_0$ は (4.16) の解になり、これを用いて一般解は

$$p(t) = -\frac{\frac{b^2}{\gamma}}{2\left(\frac{b^2}{r}p_0 - a\right) + Ce^{2\left(\frac{b^2}{r}p_0 - a\right)t}} + p_0 \tag{4.17}$$

(C は任意定数) と表される。$a < \frac{b^2}{r}p_0$ であれば、これは $t \to +\infty$ で p_0 に収束する。

一般の場合には

$$K = -R^{-1}\ {}^tBP \tag{4.18}$$

として、(4.15) に対応して

$$PA + {}^tAP - PBR^{-1}\ {}^tBP + Q = O \tag{4.19}$$

を満たす $n \times n$ 行列 P を求めるために (4.16) に対応する行列値関数の Riccati の微分方程式：

$$\frac{d}{dt}P = PA + {}^tAP - PBR^{-1}\ {}^tBP + Q \tag{4.20}$$

を (通常は計算機を用いて近似的に) 解くことになる。

(4.6) の例では、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

であり、

$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},\ R = 1,\ m = 1 \tag{4.22}$$

の場合は、

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

として

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ &\qquad - \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad + \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.24}$$

の解を求めることになる。

Clairaut の微分方程式についのて注意

Clairaut の微分方程式

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.26}$$

を前回の処方箋に沿って解く。$p = \frac{dy}{dx}$ とおくと：

$$y = xp + f(p) \tag{4.25}$$

両辺を x で微分すると：

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \tag{4.26}$$

整理して

$$(x + f'(p))\,\frac{dp}{dx} = 0 \tag{4.27}$$

従って

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{4.28}$$

または

$$x + f'(p) = 0 \tag{4.29}$$

(1). $\frac{dp}{dx} = 0$ ならば $p = C$ (任意定数) で、これを (3.26) に代入して、一般解は

$$y = Cx + f(C) \tag{4.30}$$

(2). $x + f'(p) = 0$ ならば、これと (4.25) から p を消去して (1) とは別の解を求める。この解を特異解とよぶ。

ここで、(4.29) は (4.25) を p で偏微分した形をしていることに注意すると、特異解の求め方 (2) は次の包絡線の求め方と同じであることが分かる。すなわち、以下の説明で $F(x, y, p) = 0$ を (4.25) とすると $F_p(x, y, p) = 0$ は (4.29) となる。

定義 10.

実数 p をパラメタとする平面上の曲線 C_p の属 $\{C_p\}$ が、ある曲線 C に接し、C 上の全ての点は C といずれかの C_p との接点になっているとき C は $\{C_p\}$ の包絡線であるという。

C_p を与える式を

$$F(x, y, p) = 0 \tag{4.31}$$

とする。(4.31) とそれを p で偏微分した方程式を連立したものを考える：

$$\begin{cases} F(x, y, p) &= 0 \\ F_p(x, y, p) &= 0 \end{cases} \tag{4.32}$$

このとき Jacobi 行列につて

$$\det \frac{D(F, F_p)}{D(x, y)} = \det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ F_{px} & F_{py} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.33}$$

であれば、陰関数定理 (一年生の微分積分学 I・II、二年生前期の微分積分学続論 I の教科書 [齋藤正彦]187 ページ参照) より、この連立方程式は

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases} \tag{4.34}$$

と解ける。p をパラメタとする曲線 (4.34) を C とする。

C 上の点 $(x(p), y(p))$ における接線の方向ベクトルを求めるには (4.32) の両式を p で微分して

$$\begin{cases} F_x(x, y, p)x' + F_y(x, y, p)y' + F_p(x, y, p) & = 0 \\ F_{px}(x, y, p)x' + F_{py}(x, y, p)y' + F_{pp}(x, y, p) & = 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

すなわち

$$\frac{\partial(F, F_p)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ F_{px} & F_{py} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_p \\ F_{pp} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

$$i.e.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \left(\frac{\partial(F, F_p)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} F_p \\ F_{pp} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ F_{px} & F_{py} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_p \\ F_{pp} \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

ここで C は (4.32) で定義され、その第二式から $F_p = 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \frac{F_{pp}}{F_x F_{py} - F_y F_{px}} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

となるが、これは C_p に対する法線ベクトル

$$\text{grad } F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

に直交するので C_p に対する $(x(p), y(p))$ での接線の方向ベクトルである。つまり C は C_p と $(x(p), y(p))$ で接する。すなわち C は C_p の包絡線である。

例 6.
宿題４の課題 [寺田-坂田] ２５ページ例題１２（１）の解説参照。

この場合、解の一意性は崩れている。すなわち、(4.27) を満たすのは、(4.28) または (4.29) が成り立つ時だが、それは各 x で成り立っていれば良いのであって、全ての x で一方が常に成り立っている必要はない。その結果、一般解から特異解に乗り換えて、また、一般解に戻る曲線も解である。

定数係数線型常微分方程式

定義 11.
次の形の微分方程式を定数係数同次線型常微分方程式とよぶ：

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \quad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}) \tag{4.40}$$

この形の微分方程式は次の変形で解ける

補題 1.

$$\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \left(y e^{-\lambda x} \right), \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{4.41}$$

(ただし $z \in \mathbb{C}$ に対する e^z の定義は二年生後期数学概論 IV・演習の教科書 [神保]22 ページ参照。)
変数 $z \in \mathbb{C}$ について $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ より $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\frac{d}{dz} e^{\lambda z} = \lambda e^{\lambda z}$ なので、変数を $x \in \mathbb{R}$ に制限しても $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ である。
(4.40) を解くには、先ず次の代数方程式を考える

定義 12.

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{4.42}$$

を (4.40) に対する特性方程式とよび、その根 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を特性根とよぶ。

$\frac{dy}{dx} - \lambda y$ を $\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) y$ と書くことにすると、特性根を用いて (4.40) は次のように書ける：

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right) y = 0 \tag{4.43}$$

$n = 1$ のとき

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)y=e^{\lambda x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0 \tag{4.44}$$

より

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda x}\right)=0 \tag{4.45}$$

$$ye^{-\lambda x}=C \tag{4.46}$$

$$y=Ce^{\lambda x} \tag{4.47}$$

ただし C は任意定数。

$n=2$ のとき

$\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)y&=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)e^{\lambda_2 x}\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda_2 x}\right)\\&=e^{\lambda_1 x}\frac{d}{dx}\left[e^{\lambda_2 x}\left\{\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda_2 x}\right)\right\}e^{-\lambda_1 x}\right]\\&=e^{\lambda_1 x}\frac{d}{dx}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\left\{\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda_2 x}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.48}$$

より

$$\frac{d}{dx}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\left\{\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda_2 x}\right)\right\}\right]=0 \tag{4.49}$$

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\left\{\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda_2 x}\right)\right\}=C_1 \tag{4.50}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-\lambda_2 x}\right)=C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \tag{4.51}$$

$$ye^{-\lambda_2 x}=\frac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}+C_2 \tag{4.52}$$

$$y=\frac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x} \tag{4.53}$$

ただし C_1, C_2 は任意定数。

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ならばこのまま解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{4.54}$$

(C_1, C_2 は実数の任意定数) である。

$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ の場合は、特性方程式 (4.42) の係数は実数なので $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$ であり

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} &= e^{\mathrm{Re}\lambda_1 x} \left\{ \cos\left(\mathrm{Im}\lambda_1 x\right) + i \sin\left(\mathrm{Im}\lambda_1 x\right) \right\} \\ e^{\lambda_2 x} &= e^{\mathrm{Re}\lambda_2 x} \left\{ \cos\left(\mathrm{Im}\lambda_2 x\right) + i \sin\left(\mathrm{Im}\lambda_2 x\right) \right\} \\ &= e^{\mathrm{Re}\lambda_1 x} \left\{ \cos\left(\mathrm{Im}\lambda_1 x\right) - i \sin\left(\mathrm{Im}\lambda_1 x\right) \right\} \end{aligned} \tag{4.55}$$

となり、(4.54) が実数値関数なら複素数の任意定数 C_1, C_2 は $\overline{C_1} = C_2$ を満たし、

$$\begin{cases} D_1 = C_1 + C_2 = 2\mathrm{Re}C_1 \\ D_2 = i\left(C_1 - C_2\right) = -2\mathrm{Im}C_1 \end{cases} \tag{4.56}$$

として解は

$$y = e^{\mathrm{Re}\lambda_1 x} \left\{ D_1 \cos\left(\mathrm{Im}\lambda_1 x\right) + D_2 \sin\left(\mathrm{Im}\lambda_1 x\right) \right\} \tag{4.57}$$

(D_1, D_2 は実数の任意定数) と書かれる。

$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2}$ のとき

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) y &= \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) e^{\lambda_1 x} \frac{d}{dx}\left(y e^{-\lambda_1 x}\right) \\ &= e^{\lambda_1 x} \frac{d}{dx}\left[e^{\lambda_1 x} \left\{ \frac{d}{dx}\left(y e^{-\lambda_1 x}\right) \right\} e^{-\lambda_1 x} \right] \\ &= e^{\lambda_1 x} \frac{d}{dx}\left\{ \frac{d}{dx}\left(y e^{-\lambda_1 x}\right) \right\} \\ &= e^{\lambda_1 x} \frac{d^2}{dx^2}\left(y e^{-\lambda_1 x}\right) \end{aligned} \tag{4.58}$$

より

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(y e^{-\lambda_1 x}\right) = 0 \tag{4.59}$$

$$y e^{-\lambda_1 x} = C_1 x + C_2 \tag{4.60}$$

$$y = C_1 x e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x} \tag{4.61}$$

ただし C_1, C_2 は任意定数。

$n \geq 3$ のとき

実の特性根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$、複素の特性根を $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_k, \overline{\mu_k}$ とし、λ_i の重複度を m_i、μ_i の重複度を n_i とすると、上記と同様の議論により (4.40) の解は

$$\begin{aligned} y = &\left(C_1 x^{m_1-1} + C_2 x^{m_1-2} + \cdots + C_{m_1-1} x + C_{m_1}\right) e^{\lambda_1 x} + \cdots \\ &+ e^{\mathrm{Re}\mu_1 x} \Big\{ \left(D_1 x^{n_1-1} + D_2 x^{n_1-2} + \cdots + D_{n_1-1} x + D_{n_1}\right) \cos\left(\mathrm{Im}\mu_1 x\right) \\ &\qquad + \left(E_1 x^{n_1-1} + E_2 x^{n_1-2} + \cdots + E_{n_1-1} x + E_{n_1}\right) \sin\left(\mathrm{Im}\mu_1 x\right) \Big\} \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{4.62}$$

$(C_*, D_*, E_*$ は任意定数) となる。

次に、非同次の定数係数線型常微分方程式を考える：

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \tag{4.63}$$

これも、対応する同次方程式 (4.40) の特性方程式 (4.42) の特性根を用いて

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right) y = f(x) \tag{4.64}$$

と書けば、同次方程式と同様に指数関数をかけて部分積分を繰り返すことで解けるが、それは手間がかかる。しかし、特殊解が一つ求まれば、その特殊解と (4.62) の右辺の和の形で解を書くこともできる。

定理 6.

$y = y_1(x)$ を (4.63) の一つの特殊解とし、$y = \tilde{y}(x; C_*, D_*, E_*)$ を (4.40) の一般解、すなわち (4.62) の右辺とすると、(4.63) の一般解は

$$y = y_1(x) + \tilde{y}(x) \tag{4.65}$$

と表される。

証明.

先ず、(4.65) は (4.63) を満たす。

逆に、一般解を $y = y_1(x) + u(x)$ とおいて (4.63) に代入すると、 $y_1(x)$ が特殊解であることより、$u(x)$ が満たすべき方程式は (4.40) である。 □

特殊解の求めかた

$f(x)$ が k 次多項式の場合

0 が特性根ではない場合

$$y_1(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k \tag{4.66}$$

とおいて方程式 (4.63) に代入して $A_0, \ldots, A_k$ を求める。

0 が m 重の特性根の場合

$$y_1(x) = x^m \left(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k\right) \tag{4.67}$$

とおいて方程式 (4.63) に代入して $A_0, \ldots, A_k$ を求める。

例 7.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 \tag{4.68}$$

の特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = 0$ で特性根は $\lambda = 0, -1$ なので、0 は一重の特性根。よって

$$y_1(x) = x\left(A_0x^2 + A_1x + A_2\right) \tag{4.69}$$

とおいて方程式 (4.68) に代入すると $A_0 = \frac{1}{3}, A_1 = -1, A_2 = 2$ となる。よって一般解は

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1e^{-x} + C_2 \tag{4.70}$$

問題 1. 次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 12x + 8 \tag{4.71}$$

$f(x) = re^{px}$ の場合 (r, p は定数)

p が特性根ではない場合

$$y_1(x) = Ae^{px} \tag{4.72}$$

とおいて方程式 (4.63) に代入して A を求める。

p が m 重の特性根の場合

$$y_1(x) = Ax^me^{px} \tag{4.73}$$

とおいて方程式 (4.63) に代入して A を求める。

例 8.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \tag{4.74}$$

の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ で特性根は $\lambda = 1$ の二重根。よって

$$y_1(x) = Ax^2e^x \tag{4.75}$$

とおいて方程式 (4.74) に代入すると $A = \frac{1}{2}$ となる。よって一般解は

$$y = \frac{1}{2}x^2e^x + C_1xe^x + C_2e^x \tag{4.76}$$

問題 2. 次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{2x} \tag{4.77}$$

$f(x) = re^{\alpha x}\cos\beta x$ または $re^{\alpha x}\sin\beta x$ の場合 (r, α, β は定数)

$\alpha + i\beta$ が特性根ではない場合

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \tag{4.78}$$

とおいて方程式 (4.63) に代入して A, B を求める。

$\alpha + i\beta$ が m 重の特性根の場合

$$y_1(x) = x^m e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \tag{4.79}$$

とおいて方程式 (4.63) に代入して A, B を求める。

例 9.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\cos 2x \tag{4.80}$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 4 = 0$ で特性根は $\lambda = \pm 2i$ なので、$2i$ は一重の特性根。よって

$$y_1(x) = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) \tag{4.81}$$

とおいて方程式 (4.80) に代入すると $A = 0, B = 1$ となる。よって一般解は

$$y = x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x \tag{4.82}$$

問題 3. 次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x \tag{4.83}$$

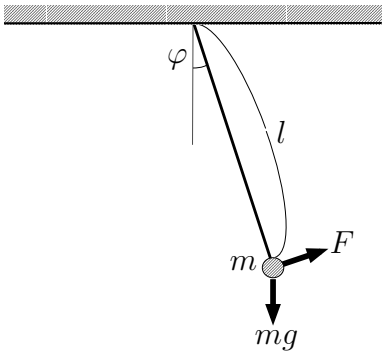
宿題 4.

- 問題 1〜3
- 寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.44〜50 (小テスト範囲)

5　初等積分法とその応用４

定数係数線型常微分方程式の応用

具体例 10.
質量 m の質点が長さ l のアームで天井に吊るされ外力 F がかかった振り子を考える：



アームの振れ角を φ として運動方程式を立てると

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi + F \tag{5.1}$$

特に φ が小さいときに $\sin\varphi \approx \varphi$ の近似を用いると[e]、これは次の方程式で近似される：

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\varphi + F \tag{5.2}$$

[e] この近似を用いない場合については Appendix で扱う

先ず特性根は $\pm\sqrt{\frac{g}{l}}i$ なので、 $F=0$ のときの解は

$$\varphi(t) = C_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{5.3}$$

で一定の振幅で振動を続ける。

また、$F = F_0 \sin\omega t$ のときは、一つの特殊解として次が取れる：

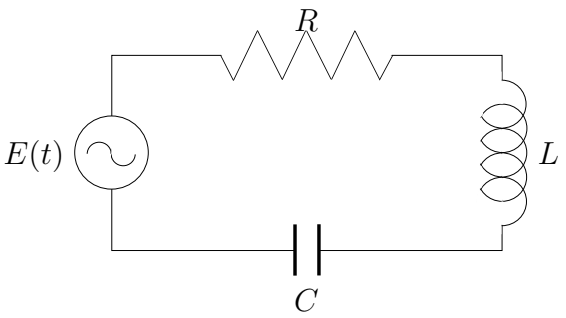
$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0}{m(g-\omega^2 l)}\sin\omega t, & \omega^2 \neq \dfrac{g}{l} \\ -\dfrac{F_0}{2ml\omega}t\sin\omega t, & \omega^2 = \dfrac{g}{l} \end{cases} \tag{5.4}$$

一般解はこれと (5.3) の和なので、$\omega^2 \neq \frac{g}{l}$ のときは二つの周期の振動の和となり、$\omega^2 = \frac{g}{l}$ のときは t が大きくなるに従って振幅が t に比例して大きくなる。この様な現象を共鳴現象とよぶ。(途中で $\sin\varphi \approx \varphi$ の近似が有効ではなくなる。)

共鳴現象を利用してお寺の鐘を小指一本で大きく揺らすことができる：
`https://www.youtube.com/watch?v=SuBYXw20tIE`

具体例 11.

抵抗値 $R[\Omega](R \geq 0)$ の抵抗素子、インダクタンス $L[Nm/A^2]$ のコイル、静電容量 $C[F]$ と時刻 t での起電力が $E(t)[V]$ の電源が直列に繋がれた回路を考える。



このとき時刻 t にコンデンサーに蓄えられている電荷量を $q[C]$ とすると、回路を流れている電流を $i(t)[A]$ は $i = \frac{dq}{dt}$ となり、これよりコイルでの電圧降下は $L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$、抵抗での電圧降下は $Ri = R\frac{dq}{dt}$ となる (3 節、具体例 7 参照)。また、コンデンサーにかかる電圧は $\frac{1}{C}q$ となる。よって、Kirchhoff の法則より次の関係式が成り立つ。

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \tag{5.5}$$

先ず特性根は $-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{R^2}{4L}-\frac{1}{C}\right)}$ なので、$E=0$ のときは

$$q(t)=\begin{cases} C_1 e^{\left(-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{R^2}{4L}-\frac{1}{C}\right)}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{R^2}{4L}-\frac{1}{C}\right)}\right)t}, & (CR^2>4L) \\ C_1 t e^{-\frac{R}{2L}t} + C_2 e^{-\frac{R}{2L}t}, & (CR^2=4L) \\ e^{-\frac{R}{2L}t}\left\{C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{R^2}{4L}-\frac{1}{C}\right)}\right)t + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{R^2}{4L}-\frac{1}{C}\right)}\right)t\right\}, & (CR^2<4L) \end{cases} \tag{5.6}$$

従って、$CR^2 \geq 4L$ のときは $t \to +\infty$ で解は単調に 0 に近づき、$R>0$ かつ $CR^2<4L$ の時は振動しながら 0 に近づく。$R=0$ のときは解は振動を続ける。

また、$E=E_0 \sin \omega t$ の時は、一つの特殊解として次が取れる：

$$q_1(t)=\begin{cases} -\dfrac{E_0}{\left(L\omega^2-\frac{1}{C}\right)^2+R^2\omega^2}\left\{R\omega\cos\omega t + \left(L\omega^2-\dfrac{1}{C}\right)\sin\omega t\right\}, & (\omega^2 \neq \dfrac{1}{LC} \text{ または } R\neq 0) \\ -\dfrac{E_0}{2L\omega} t\cos\omega t, & (\omega^2 = \dfrac{1}{LC} \text{ かつ } R=0) \end{cases} \tag{5.7}$$

一般解はこれと (5.6) の和なので、$R>0$ かつ $\omega^2 \neq \frac{1}{LC}$ のとき一般解は $t \to +\infty$ で (5.7) の上の解に近づき、$R=0$ かつ $\omega^2 \neq \frac{1}{LC}$ のときは (5.6) の三番目の解と (5.7) の上の解の二つの振動の合成となる。$R=0$ かつ $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ のときは (5.7) の下の解に従って振動しながら振幅が t に比例して大きくなる。

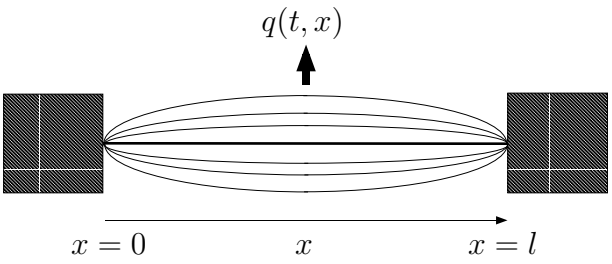
実際には、R が正であっても非常に小さく、ω^2 が $\frac{1}{LC}$ に非常に近い時には (5.7) の上の解の振幅が非常に大きくなる。無線通信での微弱な電波の受信はこの原理に依っている。

具体例 12.

両端を固定され外力 $q(t,x)$ で駆動された、長さ l の弦の振動は力学の運動方程式より次の偏微分方程式で記述される：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\rho} q(t,x) \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{5.8}$$

ただし、ρ：弦の密度、T：弦の張力として $c^2 = \dfrac{T}{\rho}$ とする。



この方程式の解は次のように Fourier 級数で表示される ([新居] 参照)：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{5.9}$$

ただし、$c_n(t)$ は以下で与えられる：

$$c_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(t,x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{5.10}$$

$q(t,x)$ も Fourier 級数に展開して：

$$q(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad q_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l q(t,x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{5.11}$$

従って (5.10) は Fourier 級数を使うと以下のように書かれる：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2c_n}{dt^2}\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2c_n(t)+\frac{1}{\rho}q_n(t)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{5.12}$$

(5.12) を各 n について考えると次の定数係数線型常微分方程式が得られる：

$$\frac{d^2c_n}{dt^2}+c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2c_n=\frac{1}{\rho}q_n(t) \tag{5.13}$$

この方程式の特性根は $\pm\dfrac{cn\pi}{l}i$ なので $q(t)\equiv 0$ のときは解は

$$c_n(t)=A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t \tag{5.14}$$

ただし A_n, B_n は任意定数とする。また、ある n について $q_n(t)=Q_0\sin\dfrac{cn\pi}{l}t$ となる (例えば周期 $\dfrac{cn\pi}{l}$ で外力を加える) 場合には

$$c_n(t)=-\frac{Q_0l}{2\rho cn\pi}t\sin\omega_nt \tag{5.15}$$

という特殊解が得られる。一般解はこれと (5.14) の和なので、$c_n(t)$ は振動しながら $t \to +\infty$ で振幅が無限大に発散する。

実際の物理系でこの共鳴が起き、構造物の破壊につながった例として Tacoma 橋の崩落が有名：

https://www.youtube.com/watch?v=VJ0JILWo_vw

この場合の外力を与えるカルマン渦についてもいろいろ紹介がある：

https://www.youtube.com/watch?v=5GrnQzKYrMs

https://www.youtube.com/watch?v=rU8sCBaeIdw

一般の二階線型常微分方程式

一般の二階線型常微分方程式を考える：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \tag{5.16}$$

但し、P, Q, R は $\mathbb{R}$ またはその区間 I で定義された連続関数とする。

この形の方程式は、一階線型常微分方程式と同様に同次方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{5.17}$$

の特殊解 $y_1(x)$ が求まれば

$$y(x) = C(x)y_1(x) \tag{5.18}$$

と置いて (5.16) に代入すると $\frac{dC}{dx}$ についての一階線型常微分方程式が得られ、それを再び定数変化法で解いた後に、もう一度積分することで解くことができる。しかしここでは、関数解析学等でも使うもう一つの定数変化法を紹介する。

先ず同次方程式 (5.17) の以下の意味で一次独立な二つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が何らかの方法で分かったとする。

定理 7 (一年生の線形代数学 I・II の教科書 [南]124 ページ問題 **5.7**(1))**.**
$\mathbb{R}$ またはその区間 I で定義された (5.17) の解全体は線型空間をなす。

同様に $\mathbb{R}$ またはその区間 I で定義された n 階同次線型常微分方程式

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x)y = 0 \tag{5.19}$$

の解全体は線型空間をなす。ただし $P_1, P_2, \ldots, P_n$ は連続関数とする。

定義 13.

$\mathbb{R}$ またはその区間 I で定義された (5.19) の解 $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ は次を満たす時一次独立であるという：

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_m y_m(x) \equiv 0 \implies C_1 = \cdots = C_m = 0, \ (C_i \in \mathbb{R}) \tag{5.20}$$

定理 8 (一年生の線形代数学 I・II の教科書 [南]136 ページ問題 **5.13**).

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ は $\mathbb{R}$ またはその区間 I で定義された (5.19) の解とする。次で定義される Wronski 行列式 $W(y_1, \ldots, y_n)$ が、ある x_0 について $x = x_0$ で 0 ではないならば、$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ は一次独立である：

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \frac{dy_1}{dx}(x) & \cdots & \frac{dy_n}{dx}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx}(x) & \cdots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx}(x) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

証明.

実数 $c_1, \ldots, c_n$ について

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0 \tag{5.22}$$

が成り立つとする。上式を $n-1$ 回微分して並べると

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \frac{dy_1}{dx}(x) & \cdots & \frac{dy_n}{dx}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx}(x) & \cdots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

これより結論が得られる。 □

元の方程式 (5.16) の解を

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{5.24}$$

と置く。ただし、このままだと $C_1(x), C_2(x)$ が初期値に対して一意に定まらないので

$$\frac{dC_1}{dx} y_1(x) + \frac{dC_2}{dx} y_2(x) = 0 \tag{5.25}$$

が成り立っていると仮定する。すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dC_1}{dx}y_1 + C_1\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}y_2 + C_2\frac{dy_2}{dx} \\ &= C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx}\end{aligned} \tag{5.26}$$

より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2} \tag{5.27}$$

となり、これらを (5.16) に代入すると

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} = R(x) \tag{5.28}$$

が得られる。(5.25) と (5.28) より

$$\begin{cases}\dfrac{dC_1}{dx} = -\dfrac{Ry_2}{W(y_1, y_2)} \\ \dfrac{dC_2}{dx} = \dfrac{Ry_1}{W(y_1, y_2)}\end{cases} \tag{5.29}$$

である。

(5.29) における割り算は次の補題で正当化される：

補題 2.

$y_1(x), y_2(x)$ が同次方程式 (5.15) を満たし、$W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ となる x_0 が存在するならば任意の x について $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ である。

証明.

$$\frac{dW}{dx} = -PW \tag{5.30}$$

なので

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi} \tag{5.31}$$

となり、これより命題が従う。 □

(5.29) より (5.16) の解は

$$y(x) = -y_1(x)\int \frac{Ry_2}{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{Ry_1}{W(y_1, y_2)}dx \tag{5.32}$$

と求まる。

宿題 5.

寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.51〜57 (小テスト範囲)

6　初等積分法とその応用５

二階線型常微分方程式の応用

Ω を n 次元空間の開領域とするとき、その閉包 $\overline{\Omega}$ を占める物体における熱の伝搬は、時刻 t、位置 $\boldsymbol{x}$ における物体の温度を $u(t,\boldsymbol{x})$ として、次の熱法方程式によって表現される [新居]：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho\gamma}\mathrm{div}\,(\kappa\cdot\mathrm{grad}u) + q, & t>0, \boldsymbol{x}\in\Omega \\ u = 0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

ただし、$\rho(\boldsymbol{x})$ を物体の密度、$\gamma(\boldsymbol{x})$ を比熱、$\kappa(\boldsymbol{x})$ を熱伝導率とし、Ω 内部に熱源 $q(\boldsymbol{x})$ があり、境界 $\partial\Omega$ では零度の恒温槽に接しているとする。

特に、時間的な温度変化の無い定常温度分布は次の Poisson 方程式の解として得られる：

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,(\kappa\cdot\mathrm{grad}\ u) = -\rho\gamma q, & \boldsymbol{x}\in\Omega \\ u = 0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases} \tag{6.2}$$

この問題の解を与える作用素[f]を $\mathbf{G}$ と書き Green 作用素と呼ぶ。すなわち、

$$u = \mathbf{G}(\rho\gamma q) \tag{6.3}$$

とおくと、この u は (6.2) を満たす。一般には $\delta(\boldsymbol{x})$ を Dirac のデルタ関数[g]として、方程式

$$\mathrm{div}\,(\kappa\cdot\mathrm{grad}\ u) = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{6.4}$$

の解を $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とおいて (ただし左辺の div, grad は $\boldsymbol{x}$ に関するものとする)

$$\mathbf{G}(\rho\gamma q) = \int G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,(\rho\gamma q(\boldsymbol{y}))\,dy_1\cdots dy_n \tag{6.5}$$

---

[f] 関数の集合から関数の集合への写像を作要素と呼ぶ。

[g]
$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0} \\ +\infty & \boldsymbol{x}=\mathbf{0}, \end{cases} \qquad \int_\Omega \delta(\boldsymbol{x})dx_1\cdots dx_n = 1$$

と書かれることが多い。ただし、二つ目の式は積分論に反する。正確には任意の f に対し記号的に次を満たす線型汎函数として定式化される (関数解析の教科書参照)：

$$\int_\Omega \delta(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})dx_1\cdots dx_n = f(0),$$

となる。この $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を Green 関数とよぶ。

以下では一次元の場合を常微分方程式として考える：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\kappa\cdot\dfrac{du}{dx}\right) = -f(x), & 0<x<1 \\ u=0, & x=0,1 \end{cases} \tag{6.6}$$

ただし、$f(x)=\rho\gamma q(x)$ とする。

先ず、同次方程式：

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dx}\frac{du}{dx}=0, \quad 0\le x\le 1 \tag{6.7}$$

の解 $u_1(x), u_2(x)$ で

$$\begin{cases} u_1(0) &= 0 \\ \dfrac{du_1}{dx}(0) &= 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(1) &= 0 \\ \dfrac{du_2}{dx}(1) &= 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

を満たすものを取る。u_1 と u_2 が独立ではない、すなわち $u_1=cu_2,\ (c\in\mathbb{R})$ と書ける場合は、$u_1(0)=u_1(1)=0$ となるので、u が (6.6) の解であるとき $u+cu_1,\ (c\in\mathbb{R})$ も解となり、一意性が無く解を (6.5) のように表示することはできない。

以下では u_1 と u_2 が独立である場合を考える。この場合は (5.32) により (6.6) の第一式の解は

$$u(x)=u_1(x)\int\frac{f(x)u_2(x)}{\kappa(x)W(u_1,u_2)}dx-u_2(x)\int\frac{f(x)u_1(x)}{\kappa(x)W(u_1,u_2)}dx \tag{6.9}$$

となるが (ただし (6.6) 第一式全体を κ で割ったものを考え、(6.9) は被積分関数の分母に κ が掛かっている)、これに含まれる積分定数を適切に定めて境界条件 ((6.6) 第二式) を満たすようにする。$x=0$ を代入すると $u_1(0)=0$ より

$$u(0)=-u_2(0)\int\frac{f(x)u_1(x)}{\kappa(x)W(u_1,u_2)(x)}dx=0 \tag{6.10}$$

よって

$$u(x)=u_1(x)\int\frac{f(x)u_2(x)}{\kappa(x)W(u_1,u_2)(x)}dx-u_2(x)\int_0^x\frac{f(y)u_1(y)}{\kappa(y)W(u_1,u_2)(y)}dy \tag{6.11}$$

とする。さらに $x=1$ を代入して $u_2(1)=0$ より

$$u(1)=u_1(1)\int\frac{f(x)u_2(x)}{\kappa(x)W(u_1,u_2)(x)}dx=0 \tag{6.12}$$

よって

$$u(x)=-u_1(x)\int_x^1\frac{f(y)u_2(y)}{\kappa(y)W(u_1,u_2)(y)}dy-u_2(x)\int_0^x\frac{f(y)u_1(y)}{\kappa(y)W(u_1,u_2)(y)}dy \tag{6.13}$$

が (6.6) の解である。

これより Green 関数を

$$G(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{u_2(y)}{\kappa(y)W(u_1,u_2)(y)}u_1(x), & 0\le x\le y\le 1\\ -\dfrac{u_1(y)}{\kappa(y)W(u_1,u_2)(y)}u_2(x), & 0\le y<x\le 1\end{cases} \tag{6.14}$$

とおくと (6.6) の解は

$$u(x)=\int_0^1 G(x,y)f(y)dy \tag{6.15}$$

となる。

7 微分方程式の級数解法

微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=y \tag{7.1}$$

について、もし事前に y が x の解析関数である、すなわち無限項まで Taylor 展開できて元の関数に収束すると分かっているならば、解を

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{7.2}$$

とおいて (7.1) に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{7.3}$$

すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nc_n - c_{n-1})x^{n-1} = 0 \tag{7.4}$$

から

$$c_n = \frac{1}{n}c_{n-1}, \qquad c_0\text{は任意} \tag{7.5}$$

となり

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \tag{7.6}$$

が得られる。

一般に、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}x^i y^j, \qquad y(0) = 0 \tag{7.7}$$

の解が x の解析関数であることが事前に分かっていれば同じ解法が適用できる。それを保証するのが次の定理である：

定理 9.

微分方程式 (7.7) の右辺が正の収束半径を持つならば

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{7.8}$$

とおいて方程式に代入して得られるべき級数も正の収束半径を持つ。

注意 3.

べき級数は収束半径内では項別微分ができるので (一年生の微分積分学 I・II の教科書 [齋藤正彦]156 ページ参照)、この様にして得られた $y(x)$ は元の方程式の解である。

この定理を証明するには先ず多変数のべき級数が「正の収束半径をもつ」という言葉の意味をはっきりさせなければならない。

補題 3.

べき級数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}x^i y^j \tag{7.9}$$

について

$$R := \frac{1}{\overline{\lim_{i+j\to\infty}} \sqrt[i+j]{|f_{i,j}|}} = \frac{1}{\lim_{N\to\infty} \sup_{i+j\geq N} \sqrt[i+j]{|f_{i,j}|}} \tag{7.10}$$

と定めると $|x|, |y| < R$ ならば (7.9) は絶対収束し、$|x|, |y| > R$ ならば発散する。

証明.

$0 < R < +\infty$ とし $|x|, |y| < R$ とする。

$|x|, |y| < r < R$ となる r を取ると、ある N について $i + j \geq N$ ならば $\sqrt[i+j]{|f_{i,j}|} < \frac{1}{r}$ が成り立つ。

従って、

$$|f_{i,j}x^i y^j| < \left(\frac{|x|}{r}\right)^i \left(\frac{|y|}{r}\right)^j \tag{7.11}$$

が成り立つので

$$\sum_{i+j\geq N} |f_{i,j}x^i y^j| < \frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)\left(1 - \frac{|y|}{r}\right)} \tag{7.12}$$

が成り立ち、$i + j < N$ となる項は有限個なので $\sum_{i,j=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{r}\right)^i \left(\frac{|y|}{r}\right)^j$ は収束する優級数となり (7.9) は絶対収束する。(一年生の微分積分学 I・II の教科書 [齋藤正彦]169 ページ参照)

$|x|, |y| > R$ とする。

$|x|, |y| > r > R$ となる r を取ると $|x|^i|y|^j > r^{i+j}$ だが、上極限の定義より無限個の i, j の組みについて $\sqrt[i+j]{|f_{i,j}|} > \frac{1}{r}$ なので、それらの i, j について $|f_{i,j}x^i y^j| > 1$ となり (7.9) は発散する。

$R = 0$ の場合は $\overline{\lim} \sqrt[i+j]{|f_{i,j}|} = +\infty$ なので 、 $|x|, |y| > 0$ ならば無限個の i, j について $\sqrt[i+j]{|f_{i,j}|} > \frac{1}{\min\{|x|,|y|\}}$ が成り立つので、それらの i, j について $|f_{i,j}x^i y^j| > 1$ となり (7.9) は発散する。

$R = +\infty$ の場合は $\overline{\lim} \sqrt[i+j]{|f_{i,j}|} = 0$ なので、$|x|, |y| < r$ となる任意の r について、ある N について $i + j \geq N$ ならば $\sqrt[i+j]{|f_{i,j}|} < \frac{1}{r}$ が成り立つ。よって (7.9) は収束する。 □

この補題により定理 9 の仮定は $R = \frac{1}{\overline{\lim_{i+j\to\infty}} \sqrt[i+j]{|f_{i,j}|}} > 0$ の意味とする。

定理の証明

(7.8) を (7.7) に代入して得られる式を考える：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}x^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)^j \tag{7.13}$$

ただし、初期条件 $y(0)=0$ より $c_0=0$ なので、c_0 は省略してある。

ここで

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)^j = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{j,n}(c_0, c_1, \ldots, c_n)x^n \tag{7.14}$$

と展開すると $\phi_{j,n}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ は $c_0, c_1, \ldots, c_n$ の正係数多項式であり、(7.13) から

$$(n+1)c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f_{i,j}\phi_{j,n-i}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-i}) \tag{7.15}$$

が得られる。($c_0=0$ なので、和の範囲は $j \le n$ である。) 従って

$$|c_{n+1}| \le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |f_{i,j}|\phi_{j,n-i}(|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-i}|) \tag{7.16}$$

が成り立つ。

さて $r < R = \frac{1}{\overline{\lim}_{i+j\to\infty} \sqrt[i+j]{|f_{i,j}|}}$ と取ると、ある N について $i+j \ge N$ ならば $|f_{i,j}| < \frac{1}{r^i r^j}$ が成り立つので、$i+j < N$ の範囲の有限個の項も含めると $|f_{i,j}| < \frac{C}{r^i r^j}$ となる定数 C がある。この右辺について $|x|, |y| < r$ であれば

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{C}{r^i r^j} x^i y^j = \frac{C}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)} \tag{7.17}$$

が成り立つが、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)}, \quad y(0)=0 \tag{7.18}$$

は変数分離形で、その解は

$$\begin{aligned} y &= r\left(1-\sqrt{1+2C\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right) \\ &= r\left(1-\sqrt{1-\left\{-2C\log\left(1-\frac{x}{r}\right)\right\}}\right) \end{aligned} \tag{7.19}$$

となるが、$\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ の範囲では $-\log$ の項は Taylor 展開できて係数は全て正であり (一年生の微分積分学 I・II の教科書 [齋藤正彦]80 ページ参照)、さらに $\left|-2C\log\left(1-\frac{x}{r}\right)\right| < 1$ の範囲では $1-\sqrt{1-\ }$ の項も Taylor 展開できて係数は全て正なので (一年生の微分積分学 I・II の教科書 [齋藤正彦]80 ページ参照)、その両方が成り立つ範囲では y は Taylor 展開できて[h]係数は全て正である。この解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \tag{7.20}$$

と書く。

以下 c_n と d_n を比較する。

1. (7.7) と (7.18) は共に初期条件 $y(0) = 0$ を満たすので $c_0 = d_0 = 0$ である。

2. $|c_0| \le d_0, |c_1| \le d_1, \ldots, |c_n| \le d_n$ とするとき、$|f_{i,j}| < \frac{C}{r^i r^j}$ と (7.16) において $\phi_{j,n}(c_0, \ldots, c_n)$ が $c_0, \ldots, c_n$ の正係数多項式であることより

$$\begin{aligned}
|c_{n+1}| &\le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|f_{i,j}|\phi_{j,n-i}(|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-i}|) \\
&\le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{C}{r^i r^j}\phi_{j,n-i}(|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-i}|) \\
&\le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{C}{r^i r^j}\phi_{j,n-i}(d_0, d_1, \ldots, d_{n-i}) \\
&= d_{n+1}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

但し、最後の等号は (7.20) は (7.18) の解であり、(7.18) の右辺は (7.17) であることから成り立つ。

従って全ての n で $|c_n| \le d_n$ なので (7.20) が収束する x の範囲では (7.8) は収束する。 □

[h]ベキ級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ の収束半径が R と r であるとする。(但し $g(0) = 0$ となる様に b_0 の項はない。) 更に $|x| < \delta \le r$ では $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||x|^k < R$ であるとする。このとき $f(g(x))$ は $|x| < \delta$ で絶対収束する、すなわち、$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||x|^k\right)^n$ は $|x| < \delta$ で収束する。

注意 4.

最初の微分方程式を $(x,y)=(a,b)$ の近傍で考える時は、方程式を

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}(x-a)^i(y-b)^j, \qquad y(a)=b \tag{7.22}$$

とし、解を

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \tag{7.23}$$

として同じ議論をする。

注意 5.

同様の定理は連立微分方程式でも成り立つ。本質的に同じ議論の繰り返しだが煩雑なので省略する。詳しくは [金子] の著者のサポートページ (`http://www.kanenko.com/~kanenko/Book/ODE/webchu.pdf`) の「139 ページ, 連立微分方程式の場合の収束半径の評価」の項参照。

宿題 6.

寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.80〜82 (小テスト範囲)

次に係数が特異点を持つ場合を考える：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a(x)}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{x^2}y=0 \tag{7.24}$$

但し $a(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ b(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ とし、$a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$ とする。これは分母を払って次の形で書かれることも多い：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xa(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0 \tag{7.25}$$

この解を

$$y(x)=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n, \qquad \lambda\in\mathbb{R} \tag{7.26}$$

の形で求める。

(7.26) を (7.25) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n x^{\lambda+n} \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)c_n x^{\lambda+n}\right) \\
&\quad\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

これを $x^{\lambda+n}$ の係数ごとに見ると

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n + \sum_{k=0}^{n}(\lambda+k)a_{n-k}c_k + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}c_k \\
&= \left\{(\lambda+n)(\lambda+n-1) + (\lambda+n)a_0 + b_0\right\} c_n \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{(\lambda+k)a_{n-k} + b_{n-k}\right\} c_k \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

すなわち

$$
c_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left\{(\lambda+k)a_{n-k} + b_{n-k}\right\} c_k}{(\lambda+n)(\lambda+n-1) + (\lambda+n)a_0 + b_0}
\tag{7.29}
$$

特に $n=0$ については

$$
\left\{\lambda(\lambda-1) + \lambda a_0 + b_0\right\} c_0 = 0
\tag{7.30}
$$

となるので

$$
\lambda(\lambda-1) + \lambda a_0 + b_0 = 0
\tag{7.31}
$$

であれば c_0 は任意に選べる (但し、$c_0 = 0$ ならば全ての n で $c_n = 0$ となるので $c_0 \neq 0$)。(7.31) を決定方程式、その根を特性指数とよぶ。

(7.31) の解を λ_1, λ_2 とし、$\mathrm{Re}\lambda_1 \geq \mathrm{Re}\lambda_2$ とするとき、$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ であれば $\lambda = \lambda_1$ と $\lambda = \lambda_2$ について其々 c_0 を任意に選び、c_1 以降を (7.29) によって定めたものは独立な二つの解になる。

しかし、$\lambda_1 - \lambda_2 = m \in \mathbb{N}$ の場合は、$\lambda = \lambda_2$ として c_0 を任意に選び、c_1 以降を (7.29) に従って決めていくと、$n = m$ で分母が 0 になる。従って (7.29) において

$$\sum_{k=0}^{m-1} \{(\lambda + k)a_{m-k} + b_{m-k}\} c_k = 0 \tag{7.32}$$

が成り立っていなければならない。これが成り立っていれば、c_m を任意に選んで再び c_{m+1} 以降が (7.29) に従って定まる。

ところが、(7.32) を満たす c_0 が $c_0 = 0$(従って帰納的に $c_1 = c_2 = \cdots c_{m-1} = 0$) のみである場合は $\lambda = \lambda_1$ に対する解と $\lambda = \lambda_2$ に対する解は同じになってしまう。

この場合は、定数変化方で λ_1 に対する解と独立な解を求める。

λ_1 に対する解を $y_1(x)$ として、独立な解を $y(x) = z(x)y_1(x)$ として (7.24) に代入して、y_1 が解であることを利用すると

$$y_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{a(x)}{x} y_1 + 2\frac{dy_1}{dx} \right) \frac{dz}{dx} = 0 \tag{7.33}$$

となる。

$$y_1(x) = x_1^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{7.34}$$

の形をしているので、

$$\frac{dy_1}{dx} = \lambda_1 x^{\lambda_1 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + x^{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \tag{7.35}$$

となり、これを (7.33) に代入して y_1 で全体を割ると

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{a(x) + 2\lambda_1}{x} + \frac{2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \right) \frac{dz}{dx} = 0 \tag{7.36}$$

$c_0 \neq 0$ より $\frac{2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$ は $x = 0$ の周りで x のべき級数に展開できるので (二年生後期数学概論 IV・演習の教科書 [神保]31〜33 ページ参照)、$\frac{dz}{dx}$ の係数は

$$\frac{a_0 + 2\lambda_1}{x} + h(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n \tag{7.37}$$

と書ける。ここで決定方程式 (7.31) の解と係数の関係から $\lambda_1+\lambda_2=1-a_0$ であり、これと $\lambda_1-\lambda_2=m\in\mathbb{N}$ より $a_0+2\lambda_1=m+1$ は自然数である。

$z_1=\frac{dz}{dx}$ と書くと (7.36) は

$$\frac{dz_1}{dx}+\left(\frac{m+1}{x}+h(x)\right)z_1=0 \tag{7.38}$$

となる。この解を

$$z_1(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n,\quad d_0\neq 0 \tag{7.39}$$

の形で求める。

(7.39) を (7.38) に代入すると：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)d_nx^{\lambda+n-1}+(m+1)\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{\lambda+n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n-1-k}d_k\right)x^{\lambda+n-1}=0 \tag{7.40}$$

$x^{\lambda-1}$ の項は

$$(\lambda+m+1)d_0=0 \tag{7.41}$$

で $d_0\neq 0$ なので

$$\lambda=-(m+1) \tag{7.42}$$

となる。このとき、任意の d_0 に対し以降の項は

$$d_n=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n-1-k}d_k \tag{7.43}$$

と決まる。

以下 $d_0=1$ ととると

$$z_1(x)=\frac{1}{x^{m+1}}+\frac{d_1}{x^m}+\cdots+\frac{d_{m-1}}{x^2}+\frac{d_m}{x}+d_{m+1}+d_{m+2}x+\cdots \tag{7.44}$$

となるので、一回積分して

$$z(x)=-\frac{1}{mx^m}-\frac{d_1}{(m-1)x^{m-1}}-\cdots-\frac{d_{m-1}}{x}+d_m\log x+d_{m+1}x+\cdots \tag{7.45}$$

よって (7.24) の y_1 と独立な解として

$$\begin{aligned}y(x)&=z(x)y_1(x)\\&=d_my_1(x)\log x+y_1(x)\left(-\frac{1}{mx^m}-\frac{d_1}{(m-1)x^{m-1}}-\cdots\frac{d_{m-1}}{x}+d_{m+1}x+\cdots\right)\end{aligned} \tag{7.46}$$

が得られる。

注意 6.

実際に y_1 と独立な解を求めるには、解が (7.46) の形をしていることと $\lambda_1 - m = \lambda_2$ であるを利用して、べき級数表現の一意性 (二年生後期数学概論 IV・演習の教科書 [神保]29 ページ参照) より

$$y(x) = cy_1(x)\log x + x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \tag{7.47}$$

とおいて d_n を帰納的に求めればよい。

以下、この様にして求めた級数解の収束を示す。

$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ の場合

係数 $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ の収束半径が $r > 0$ 以上であるとすると、任意の $r > \rho > 0$ に対し、

$$|a_k|\rho^k, |b_k|\rho^k \leq A \qquad (k \geq 1) \tag{7.48}$$

となる A が存在する。

従って、(7.29) の分子は

$$|(7.29)\text{ の分子 }| \leq \sum_{k=0}^{n-1} A|\lambda + k + 1|\rho^{k-n}|c_k| \tag{7.49}$$

を満たす。ただし、$\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ とする。

また、(7.29) の分母は 2 次式で任意の n で 0 にならないので、

$$|(7.29)\text{ の分母 }| \geq \delta n^2 \tag{7.50}$$

となる $\delta > 0$ が存在する。

これらより

$$|c_n| \leq \frac{A\rho^{-n}}{\delta}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda + k + 1|\rho^k|c_k|}{\delta n^2} \leq \frac{A\rho^{-n}}{\delta}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(|\lambda| + n)\rho^k|c_k|}{n^2} \tag{7.51}$$

ここで $\rho^k|c_k| = \gamma_k$ とおくと、上式より

$$\gamma_n \leq \frac{A}{\delta n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(|\lambda| + n)\gamma_k \leq \frac{A}{\delta n^2}\sum_{k=0}^{n-1} n(|\lambda| + 1)\gamma_k = \frac{A(|\lambda| + 1)}{\delta n}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k \tag{7.52}$$

が得られ、$n=1$ では $|\gamma_1| \leq \frac{A(|\lambda|+1)}{\delta}\gamma_0$ から帰納的に

$$\gamma_n \leq \left(\frac{A(|\lambda|+1)}{\delta}\right)^n \gamma_0 \tag{7.53}$$

が成り立つ。 よって

$$|c_n| \leq \left(\frac{A(|\lambda|+1)}{\delta\rho}\right)^n \gamma_0 \tag{7.54}$$

が成り立ち、

$$y_1(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{7.26}$$

は $|x| \leq \frac{\delta\rho}{A(|\lambda|+1)}$ で絶対収束する。

$\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$ の場合

(7.36) は (7.24) の形をしているので、級数解も $x=0$ の近傍で絶対収束する。

特異点を持つより一般の微分方程式については [島倉] 参照。

宿題 7.

寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.83〜85 (小テスト範囲)

8 Legendre 培関数と Bessel 関数

具体例 13.

三次元空間のポテンシャル場 $V(x,y,z)$ 内の質量 m の粒子を記述する Schrödinger 方程式を考える：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x,y,z)\psi \tag{8.1}$$

但し、慣習的に $\nabla^2\psi = \nabla(\nabla\psi) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ と書かれている。

ここで、定数係数線型連立一階常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \qquad (\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ A : n \times n \text{ 実行列}) \tag{8.2}$$

は、右辺の係数行列 A が対角化 (一年生の線形代数学 I・II の教科書 [南]202 ページ参照) できる場合は、その固有値と固有ベクトルを $\lambda_i, \boldsymbol{v}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ として $\boldsymbol{y}(x) = c_i(x)\boldsymbol{v}_i$ を (8.2) に代入すると

$$\frac{dc_i}{dx} = \lambda_i c_i \tag{8.3}$$

が得られるので、この解 $c_i(x) = c_i(0)e^{\lambda_i x}$ を用いて解は

$$\boldsymbol{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(0)e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}_i \tag{8.4}$$

と書かれた。

同様の方法が (8.1) に対しても用いられる。そのために右辺の固有値問題を考える：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x,y,z)\psi = E\psi \tag{8.5}$$

これを三次元極座標：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad (0 \le r,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi) \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{8.6}$$

(一年生の微分積分学 I・II の教科書 [齋藤正彦]236 ページ参照) で書くと

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\} \\ + V(r,\theta,\varphi)\psi = E\psi \end{aligned} \tag{8.7}$$

となる。

もしポテンシャル関数が球対称ならば $V(r,\theta,\varphi) = V(r)$ と書けるので

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\} \\ + V(r)\psi = E\psi \end{aligned} \tag{8.8}$$

となる。特に水素原子の電子の場合は $V(r) = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$ である。ただし、ε_0 は真空の誘電率、e は電子の電荷とする。

この解を変数分離形で求める[i]：

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{8.9}$$

[i] 当然変数分離形では表せない解をどうするかという問題があるが、実は「全ての解」は変数分離形で求めた解の一次結合で表される。しかし、それを示すには「全ての解」の範囲を設定するところから始めて関数解析の議論が必要になるので本講の範囲をはるかに超える。例えば [野村] の附章 G 等に必要な知識の解説がある。

これを (8.8) に代入すると：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\left\{\Theta\Phi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+R\Phi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+R\Theta\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}$$
$$+\left(V(r)-E\right)R\Theta\Phi=0 \tag{8.10}$$

全体を $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}R\Theta\Phi$ で割って r を変数とする項を左辺、それ以外を右辺に集めると：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)\\&=-\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{8.11}$$

この左辺は r の関数で右辺は θ,φ の関数なので、r,θ,φ にかかわらずに常に成り立つためには両辺とも定数でなければならない。この定数を λ と書くと次の二式に分離する：

$$\begin{cases}\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)&=\lambda\\ \frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}&=-\lambda\end{cases} \tag{8.12}$$

(8.12) の第一式は $V(r)$ によって変わるのでここではその議論は省略する。

(8.12) の第二式は、全体に $\sin^2\theta$ をかけて整理すると：

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{8.13}$$

これも左辺は θ のみの関数で、右辺は φ のみの関数なので両辺共に定数であり、それを ν とおくと二式に分離する：

$$\begin{cases}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\Theta\lambda\sin^2\theta=\nu\Theta\\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\nu\Phi\end{cases} \tag{8.14}$$

(8.14) の第二式において、φ は極座標の角度変数なので Φ は 2π 周期、すなわち $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ を満たさなければならない。従って、$\nu=m^2$ となる整数 m があり $\Phi(\varphi)=Ae^{im\varphi}$ となる (整数 m を質量と混同しないこと)。関数解析的な理由で通常 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ととる。

(8.14) の第一式は、$x = \cos\theta$ とおいて変数変換すると

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \tag{8.15}$$

となる。但し $-1 \leq x \leq 1$ とする。

$m = 0$ の場合の (8.15) を Legendre の微分方程式、その解を Legendre 多項式とよび (以下で述べる様に多項式になる)、$m \neq 0$ の場合の (8.15) を Legendre の培微分方程式、その解を Legendre 培多項式とよぶ。

(8.15) で $m = 0$ の場合を考える：

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \lambda\Theta = 0 \tag{8.16}$$

解の形を

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{8.17}$$

として方程式に代入すると、

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}c_n \tag{8.18}$$

という漸化式が得られるが、もし $l(l+1) - \lambda = 0$ となる非負整数 l が存在しなければ、(8.17) の右辺は $x = 1$ では発散し[j]、元の固有値問題 (8.8) の解は定めない。

従って、ある非負整数 l について $\lambda = l(l+1)$ でなければならない。このとき解は多項式になるので、各 l に対する解で $x = 1$ で値が 1 となるものを $P_l(x)$ と書いて Legendre 多項式と呼ぶ。

以下、Legendre 多項式を具体的に求める。

$\lambda = l(l+1)$ のとき (8.18) を逆に解くと

$$c_n = -\frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}c_{n+2} \tag{8.19}$$

なので、

$$c_0 = 1, \qquad c_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l-1)}{l!} \quad (l \geq 1) \tag{8.20}$$

[j] $0 < C < 1$ を満たす定数 C を一つ取ると、十分大きな n に対しては $n(n+1) - \lambda > Cn(n+1)$ が成り立つので、$\sum \frac{1}{n} = +\infty$ であることより発散する。

ととると

$$c_{l-2n} = (-1)^n \frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} \tag{8.21}$$

すなわち

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{[\frac{l}{2}]} (-1)^n \frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n} \tag{8.22}$$

が得られる。このとき $P_l(1) = 1$ が成り立つ。

Legendre 多項式のより簡単な計算方法は [寺田-坂田]86〜89 ページ参照。

(8.15) で $m \neq 0$ の場合の解は

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|} P_l(x)}{dx^{|m|}} \tag{8.23}$$

で与えられる。但し、$P_l(x)$ が l 次なので $|m| \leq l$ 以外では右辺は 0 となる。これを Legendre 倍多項式とよぶ。

具体例 14.

三次元空間の波動方程式を考える：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \tag{8.24}$$

ただし c は波の伝わる速さとする。

この方程式の定常解、すなわち波形を変えずに特定の振動数で振動し続ける解を求める。そのために

$$u(t,x,y,z) = e^{i\omega t} \psi(x,y,z) \tag{8.25}$$

とおいて (8.24) に代入すると

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \psi(x,y,z) = 0 \tag{8.26}$$

となる、ただし $k = \dfrac{\omega}{c}$ とする。(8.26) を Helmholtz 方程式とよぶ。

(8.26) を三次元の極座標で書くと：

$$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}\right\} + k^2 \psi = 0 \tag{8.27}$$

となるので、変数分離形 $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi))$ を仮定すると Schrödinger 方程式の場合と全く同じ議論により

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \\ \Theta(\theta) = P_l^m(\cos\theta) \end{cases} \tag{8.28}$$

となる。

$R(r)$ についての方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0 \tag{8.29}$$

となるが、$R(r)=\dfrac{1}{\sqrt{r}}u_l(r)$ とし、更に $x=kr$ と変換すると

$$\frac{d^2u_l}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du_l}{dx}+\left(1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right)u_l=0 \tag{8.30}$$

となる。

一般に

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0,\qquad \alpha\geq 0 \tag{8.31}$$

の形の微分方程式を Bessel の微分方程式、その解を Bessel 関数と呼ぶ。

Bessel 関数の具体的な計算結果は [金子] 143〜145 ページ等参照。

宿題 8.

- 寺田文行・坂田そう共著「新版演習微分方程式」P.86〜93 (テスト範囲)

第 II 部
常微分方程式の理論

9　常微分方程式の解の存在と一意性

逐次近似法

次の常微分方程式の解の構成方法を考える：

$$\frac{dy}{dx}=y,\qquad y(0)=1 \tag{9.1}$$

この方程式の解は次の積分方程式を満たす：

$$y(x)=\int_0^x y(\xi)d\xi+1 \tag{9.2}$$

このことに基づき、次の関数列の漸化式を考える：

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x y_n(\xi)d\xi + 1, \qquad y_0 \equiv 1 \tag{9.3}$$

この解は

$$y_1(x) = x + 1, \quad y_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \ldots \tag{9.4}$$

となり、一般項は

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \tag{9.5}$$

である。よって y_n は $n \to \infty$ で (9.1) の解 $y = e^x$ に収束する。この様にして解を構成する方法を **Picard の逐次近似法**とよぶ。

これを一般的に考えて常微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(0) = b \tag{9.6}$$

に対し $x > 0$ の範囲で次の漸化式を考える：

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f\left(\xi, y_n(\xi)\right) d\xi + b, \qquad y_0(x) \equiv b \tag{9.7}$$

このとき、もし $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ が存在し、さらに積分や関数と極限の交換ができるのであれば、(9.7) の両辺で極限を取って

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^x f\left(\xi, y_n(\xi)\right) d\xi + b \\ &= \int_0^x \lim_{n\to\infty} f\left(\xi, y_n(\xi)\right) d\xi + b \\ &= \int_0^x f\left(\xi, y(\xi)\right) d\xi + b \end{aligned} \tag{9.8}$$

となり、y が (9.6) の解となる。$f(x, y)$ が y について連続であれば f と極限の交換ができるので、積分と極限の交換について考える。

$0 < x_0$ を一つ固定すると $0 \le x \le x_0$ について

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y(x)| &= \left| \int_0^x f\left(\xi, y_n(\xi)\right) - f\left(\xi, y(\xi)\right) d\xi \right| \\ &\le \int_0^x \left| f\left(\xi, y_n(\xi)\right) - f\left(\xi, y(\xi)\right) \right| d\xi \end{aligned} \tag{9.9}$$

なので、特に $f(x,y)=Ly,\ (L>0)$ ならば、$0\le x\le x_0$ について

$$\begin{aligned}|y_{n+1}(x)-y(x)| &\le L\int_0^x |y_n(\xi)-y(\xi)|d\xi \\ &\le xL\max_{0\le\xi\le x}|y_n(\xi)-y(\xi)| \\ &\le x_0L\max_{0\le\xi\le x_0}|y_n(\xi)-y(\xi)| \\ &\le x_0L\max_{0\le x\le x_0}|y_n(x)-y(x)|\end{aligned} \tag{9.10}$$

よって、$x_0=\dfrac{1}{2L}$ と取ると

$$\max_{0\le x\le\frac{1}{2L}}|y_{n+1}(x)-y(x)|\le\frac{1}{2}\max_{0\le x\le\frac{1}{2L}}|y_n(x)-y(x)| \tag{9.11}$$

となり、$y_n(x)$ は $y(x)$ に $0\le x\le\dfrac{1}{2L}$ で一様収束し、積分と極限が交換できる。

$f(x,y)$ が線型ではないときは y について Lipschitz 連続あるとする：

定義 14.

二変数関数 $f(x,y)$ が変数 y に関して一様に Lipschitz 連続であるとは、ある $L>0$ について

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{9.12}$$

が任意の $x,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ について成り立つこととする。

(9.12) の下では (9.9) の右辺は (9.10) と同じ計算で同じ不等式でおさえられる：

$$\int_0^x\Big|f\left(\xi,y_n(\xi)\right)-f\left(\xi,y(\xi)\right)\Big|d\xi\le x_0L\max_{0\le x\le x_0}|y_n(x)-y(x)| \tag{9.13}$$

従ってこのときも $x_0=\dfrac{1}{2L}$ と取ると

$$\max_{0\le x\le\frac{1}{2L}}|y_{n+1}(x)-y(x)|\le\frac{1}{2}\max_{0\le x\le\frac{1}{2L}}|y_n(x)-y(x)| \tag{9.14}$$

となり、$y_n(x)$ は $y(x)$ に $0\le x\le\dfrac{1}{2L}$ で一様収束し、積分と極限が交換できる。

実は、$y = \lim_{n\to\infty} y_n$ の存在そのものは仮定した上で収束が一様であることを示しているので、これでは解の存在証明にはなっていない。存在証明には関数列 $\{y_n\}$ が一様に Cauchy 列になっていることを示す。

$m > n$ について

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_m(x) - y_n(x)| \\
&= \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_m(x) - y_{m-1}(x) + y_{m-1}(x) - \cdots + y_{n+1}(x) - y_n(x)| \\
&\le \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_m(x) - y_{m-1}(x)| + \cdots + \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \\
&\le \frac{1}{2} \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_{m-1}(x) - y_{m-2}(x)| + \cdots + \frac{1}{2} \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_1(x) - y_0(x)| + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_1(x) - y_0(x)| \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right\} \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_1(x) - y_0(x)| \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \max_{0\le x\le \frac{1}{2L}} |y_1(x) - y_0(x)|
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

すなわち、$0 \le x \le \dfrac{1}{2L}$ ならば関数列 $\{y_n\}$ は一様に Cauchy 列をなすので、ある関数 y に一様収束する。各 y_n は連続なので y も連続である。以上の議論は $x < 0$ に関しても同様である。

以上の議論をもう少し一般化すると次の定理が得られる：

定理 10 (常微分方程式の解の存在と一意性).

二変数連続関数 $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ の近傍で y に関して次の意味で局所的に一様に Lipschitz 連続であるとする：

ある $L > 0, \varepsilon_x, \varepsilon_y > 0$ について、$a - \varepsilon_x \le x \le a + \varepsilon_x$,
$b - \varepsilon_y \le y_1, y_2 \le b + \varepsilon_y$ の範囲で以下が成り立つ：

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{9.16}$$

このとき、ある $0 < \varepsilon < \varepsilon_x$ について微分方程式の初期値問題：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b \tag{9.17}$$

は $a - \varepsilon \le x \le a + \varepsilon$ の範囲でただ一つの解を持つ。

宿題 9.

- 上の定理の仮定が満たされておらず、その結果結論が成り立っていない具体例をあげよ。(小テスト範囲)
- 一変数関数 $f(y)$ が C^1 級であるならば局所 Lipschitz 連続であることを示せ。(小テスト範囲)

定理の証明

$0 < \varepsilon < \varepsilon_x$ とし、$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$ に対し

$$y_0 \equiv b, \quad y_{n+1}(x) := \int_a^x f(\xi, y_n(\xi))d\xi + b \tag{9.18}$$

と定める。

$$M := \max_{\substack{a-\varepsilon_x \leq x \leq a+\varepsilon_x \\ b-\varepsilon_y \leq y \leq b+\varepsilon_y}} |f(x,y)| \tag{9.19}$$

とおくと、$[a - \varepsilon_x, a + \varepsilon_x] \times [b - \varepsilon_y, b + \varepsilon_y]$ は有界閉集合なので、M は有限の値である。(一年生の微分積分学 I・II、二年生前期の微分積分学続論 I の教科書 [齋藤正彦]206 ページ参照)

このとき、

$$\begin{aligned} |y_1(x) - b| &= \left| \int_a^x f(\xi, b)d\xi \right| \\ &\leq \int_a^x |f(\xi, b)|d\xi \\ &\leq M|x - a| \end{aligned} \tag{9.20}$$

なので、$\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_x, \dfrac{\varepsilon_y}{M}\right\}$ としておくと $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$ の範囲では

$$|y_1(x) - b| < \varepsilon_y \tag{9.21}$$

が成り立つ。これより

$$
\begin{aligned}
|y_2(x)-b| &\le |y_2(x)-y_1(x)| + |y_1(x)-b| \\
&= \left| \int_a^x \{f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, b)\}\, d\xi \right| + |y_1(x)-b| \\
&\le \int_a^x |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, b)|\, d\xi + |y_1(x)-b| \\
&\le \int_a^x L\,|y_1(\xi)-b|\, d\xi + |y_1(x)-b| \qquad (9.22) \\
&\le L\int_a^x M|\xi-a| d\xi + M|x-a| \\
&\le LM\int_a^x |x-a| d\xi + M|x-a| \\
&\le (L|x-a|+1)\, M|x-a|
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\varepsilon_y}{2M}, \frac{1}{2L}\right\} \qquad (9.23)$$

とすると $a-\varepsilon \le x \le a+\varepsilon$ の範囲では

$$L|x-a| < \frac{1}{2} \qquad (9.24)$$

$$2M|x-a| < \varepsilon_y \qquad (9.25)$$

が成り立つが、(9.24) より

$$L|x-a|+1 < \sum_{n=0}^{\infty} L^n |x-a|^n < 2 \qquad (9.26)$$

が成り立つので、(9.22) と (9.25) より

$$|y_2(x)-b| < \varepsilon_y \qquad (9.27)$$

が成り立つ。

更に、(9.22) の途中で計算した様に $|y_2(x)-y_1(x)| \leq LM|x-a|^2$ なので

$$
\begin{aligned}
|y_3(x)-y_2(x)| &\leq \int_a^x |f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))|\, d\xi \\
&\leq \int_a^x L\,|y_2(\xi)-y_1(\xi)|\, d\xi \\
&\leq L\int_a^x LM|\xi-a|^2 d\xi \\
&\leq L^2 M \int_a^x |x-a|^2 d\xi \\
&\leq L^2 M|x-a|^3
\end{aligned}
\tag{9.28}
$$

となり、(9.26) を用いると

$$
\begin{aligned}
|y_3(x)-b| &\leq |y_3(x)-y_2(x)| + |y_2(x)-y_1(x)| + |y_1(x)-b| \\
&\leq \left\{L^2|x-a|^2 + L|x-a| + 1\right\} M|x-a| \\
&\leq 2M|x-a| \\
&< \varepsilon_y
\end{aligned}
\tag{9.29}
$$

が成り立つ。

以下帰納的に

$$
|y_n(x)-b| < \varepsilon_y \tag{9.30}
$$

と

$$
|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leq L^{n-1}|x-a|^{n-1}M|x-a| \tag{9.31}
$$

が任意の n について成り立つ。

これより (9.15) と全く同じ計算で $a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$ の範囲で $m > n$ について

$$
|y_m(x)-y_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} M\varepsilon \tag{9.32}
$$

が成り立つ。

これより $a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$ の範囲で $y_n(x)$ は一様に Cauchy 列をなし、ある $y(x)$ に一様収束する。$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ とすると $y_n(x)$ の定義 (9.18)

より

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi + b \\
&= \int_a^x \lim_{n\to\infty} f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi + b \\
&= \int_a^x f(\xi, y(\xi))d\xi + b
\end{aligned}
\tag{9.33}
$$

が成り立ち、$y(x)$ はこの範囲で微分方程式の初期値問題 (9.17) を満たす。

最後に一意性について。

$y(x)$ と $\bar{y}(x)$ が (9.17) を満たすとすると、$a-\varepsilon \le x \le a+\varepsilon$ の範囲で

$$
\begin{aligned}
|y(x) - \bar{y}(x)| &= \left| \int_a^x f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, \bar{y}(\xi))d\xi \right| \\
&\le \int_a^x |f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, \bar{y}(\xi))|\, d\xi \\
&\le L|x-a| \max_{a-\varepsilon\le\xi\le a+\varepsilon} |y(\xi) - \bar{y}(\xi)|
\end{aligned}
\tag{9.34}
$$

が成り立ち、両辺で最大値を考えると

$$
\max_{a-\varepsilon\le x\le a+\varepsilon} |y(x) - \bar{y}(x)| \le L\varepsilon \max_{a-\varepsilon\le x\le a+\varepsilon} |y(x) - \bar{y}(x)| \tag{9.35}
$$

となるが、(9.24) より $L\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ なので $y(x) = \bar{y}(x)$ でなければならない。 □

定理 11 (常微分方程式の解の初期値に関する連続性).

二変数連続関数 $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ の近傍で y に関して局所的に一様に Lipschitz 連続であるとする。

このとき、微分方程式

$$
\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{9.36}
$$

の解は初期値 $y(a)$ について b の近傍で連続である。

この証明には次の補題を用いる：

補題 4 (Gronwall の補題).

x の非負値関数 $\varphi(x)$ は $x_0 \le x \le x_1$ で有界 ($\varphi(x) \le M$) で、ある $C, K > 0$ に対し

$$
\varphi(x) \le C + K \int_{x_0}^x \varphi(\xi)d\xi \tag{9.37}
$$

を満たすとする。このとき $x_0 \leq x \leq x_1$ で

$$\varphi(x) \leq Ce^{K(x-x_0)} \tag{9.38}$$

が成り立つ。

補題の証明

仮定より

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq C + K\int_{x_0}^{x}\left\{C + K\int_{x_0}^{\xi}\varphi(\xi_1)d\xi_1\right\}d\xi \\
&= C + CK(x-x_0) + K^2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\varphi(\xi_1)d\xi_1 d\xi \\
&\leq C + CK(x-x_0) + \frac{CK^2}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{CK^n}{n!}(x-x_0)^n \\
&\qquad + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\int_{x_0}^{\xi_1}\cdots\int_{x_0}^{\xi_{n-2}}\int_{x_0}^{\xi_{n-1}}\varphi(\xi_n)d\xi_n d\xi_{n-1}\cdots d\xi_2 d\xi_1 d\xi \\
&\leq C + CK(x-x_0) + \frac{CK^2}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{CK^n}{n!}(x-x_0)^n \\
&\qquad + \frac{CK^{n+1}}{(n+1)!}M(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned} \tag{9.39}$$

右辺で $n \to \infty$ の極限をとると最後の項は 0 に収束し、それ以外は $Ce^{K(x-x_0)}$ に収束する。 □

定理の証明

$x \geq a$ の場合。

微分方程式を一回積分した Volterra 形の積分方程式で考える：

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(\xi, y(\xi))d\xi \tag{9.40}$$

$y(a) = b, b_1$ を初期値とする解を $y(x), y_1(x)$ とすると Lipschitz 定数を L として

$$\begin{aligned}
|y(x) - y_1(x)| &\leq |b - b_1| + \int_a^x |f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))|\, d\xi \\
&\leq |b - b_1| + L\int_a^x |y(\xi) - y_1(\xi)|\, d\xi
\end{aligned} \tag{9.41}$$

よって Gronwall の補題より

$$|y(x) - y_1(x)| \leq e^{L|x-a|}|b - b_1| \tag{9.42}$$

が成り立つ。

よって、$y_1(x)$ は $b_1 \to b$ のときに 0 に収束する。
$x \leq a$ の場合は $\tilde{x} = 2a - x$ とおいて $\tilde{x}$ で考えると $\tilde{x} \geq a$ で同じ議論ができる。 □

定理 12 (常微分方程式の解のパラメータに関する連続性).

三変数連続関数 $f(x, y; \lambda)$ は $(x, y, \lambda) = (a, b, \lambda_0)$ の近傍で y に関して局所的に一様に Lipschitz 連続であるとする。

このとき、常微分方程式の初期値問題：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \lambda), \quad y(a) = b \tag{9.43}$$

の解は $\lambda = \lambda_0$ の近傍で λ について連続である。

証明.

ある定数 $L > 0$ と $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\lambda > 0$ について、$a - \varepsilon_x \leq x \leq a + \varepsilon_x$, $b - \varepsilon_y \leq y_1, y_2 \leq b + \varepsilon_y$, $\lambda_0 - \varepsilon_\lambda \leq \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_\lambda$ の範囲で以下が成り立つとする：

$$|f(x, y_1; \lambda) - f(x, y_2; \lambda)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{9.44}$$

$\lambda = \lambda_0$ と $\lambda_0 - \varepsilon_\lambda \leq \lambda_1 \leq \lambda_0 + \varepsilon_\lambda$ を満たす $\lambda = \lambda_1$ に対する (9.43) の解を $y(x; \lambda_0), y(x; \lambda_1)$ とする。但し (9.23) における M を (9.19) の代わりに

$$M := \max_{\substack{a - \varepsilon_x \leq x \leq a + \varepsilon_x \\ b - \varepsilon_y \leq y \leq b + \varepsilon_y \\ \lambda_0 - \varepsilon_\lambda \leq \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_\lambda}} |f(x, y; \lambda)| \tag{9.45}$$

と取ることで、$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$ の範囲では $b - \varepsilon_y \leq y(x; \lambda_1) \leq b + \varepsilon_y$ が成り立っているとする。

$a \leq x \leq a+\varepsilon$ の場合。

$$
\begin{aligned}
|y(x;\lambda_0)-y(x;\lambda_1)| &\leq \int_a^x |f(\xi,y(\xi;\lambda_0);\lambda_0)-f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_1)|\,d\xi \\
&\leq \int_a^x |f(\xi,y(\xi;\lambda_0);\lambda_0)-f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_0)|\,d\xi \\
&\qquad + \int_a^x |f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_0)-f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_1)|\,d\xi \\
&\leq L\int_a^x |y(\xi;\lambda_0)-y(\xi;\lambda_1)|\,d\xi \\
&\qquad + \varepsilon \max_{a\leq\xi\leq a+\varepsilon} |f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_0)-f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_1)|
\end{aligned}
\tag{9.46}
$$

より Gronwall の補題から

$$
|y(x;\lambda_0)-y(x;\lambda_1)| \leq e^{L|x-a|}\varepsilon \max_{a\leq\xi\leq a+\varepsilon} |f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_0)-f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda_1)| \tag{9.47}
$$

が成り立つ。

$[a-\varepsilon_x, a+\varepsilon_x]\times[\lambda_0-\varepsilon_\lambda,\lambda_0+\varepsilon_\lambda]$ はコンパクトなので (ξ,λ) の連続関数 $f(\xi,y(\xi;\lambda_1);\lambda)$ はそこで一様連続であり、(9.47) の右辺は $\lambda_1\to\lambda_0$ で 0 に収束する。

$a-\varepsilon \leq x \leq a$ の場合も同様。 □

定理 13.

二変数連続関数 $f(x,y)$ は C^k 級であるとする。このとき常微分方程式

$$
\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{9.48}
$$

の解は C^{k+1} 級である。

証明.

(9.48) の解 $y(x)$ は C^1 級なので $f(x,y)$ が C^1 級であれば (9.48) の右辺 $f(x,y(x))$ は x で微分できて、その導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y(x))$ は連続である。すなわち、$f(x,y)$ が C^1 級であれば $y(x)$ は C^2 級である。

これを繰り返すと定理が得られる。

□

定理 14 (常微分方程式の解のパラメータに関する微分可能性)**.**

三変数関数 $f(x,y;\lambda)$ は y,λ について C^k 級であるとする。

このとき常微分方程式の初期値問題：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \lambda), \quad y(a) = b \tag{9.49}$$

の解は λ について C^k 級である。

証明は最初に平均値の定理を使う以外は有界閉集合上の連続関数の一様連続生と Gronwall の不等式を使って同じ議論を繰り返すだけなので省略する。[金子]96〜98 ページ等参照。

宿題 10.

- 有界閉集合上の連続関数は一様連続であることの証明を確認せよ。(小テスト範囲)
- (9.47) の右辺は $\lambda_1 \to \lambda_0$ で 0 に収束することを示せ。(小テスト範囲)

10 連立常微分方程式

以下では連立微分方程式を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{10.1}$$

先ず基本的な定理である定理 10〜14 をこの場合に一般化するために用語を用意する。

定義 15.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ のノルム $|\boldsymbol{x}|_1$ を以下で定める：

$$|\boldsymbol{x}|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n| \tag{10.2}$$

[k]更に、$a \leq x \leq b$ で定められたベクトル値連続関数 (各成分が連続間であるベクトル値関数) $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ のノルム $\|\boldsymbol{y}\|$ を以下で定める：

$$\|\boldsymbol{y}\| := \max_{a \leq x \leq b} |\boldsymbol{y}(x)|_1 \tag{10.3}$$

補題 5.

$a \leq x \leq b$ で定められたベクトル値連続関数の列 $\boldsymbol{y}_k(x)$ とベクトル値連続関数 $\boldsymbol{y}(x)$ について以下は同値：

(1). $\|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}\| \to 0 \ (k \to \infty)$

(2). $\boldsymbol{y}_k(x)$ の各成分は $\boldsymbol{y}(x)$ の各成分に一様収束する。

証明は各自でやっておくこと。(一年生の微分積分学 I・II の範囲。)

定理 15.

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ として、$n+1$ 変数ベクトル値連続関数 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ は $(x, \boldsymbol{y}) = (a, \boldsymbol{b})$ の近傍で $\boldsymbol{y}$ に関して次の意味で局所的に一様に Lipschitz 連続であるとする：

ある $L > 0, \varepsilon_x, \varepsilon_y > 0$ について、$|x - a|_1 \leq \varepsilon_x$,
$|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{b}|_1,\ |\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{b}|_1 \leq \varepsilon_y$ の範囲で以下が成り立つ：

$$|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)|_1 \leq L|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2|_1 \tag{10.4}$$

このとき、ある $0 < \varepsilon < \varepsilon_x$ について連立微分方程式の初期値問題：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b} \tag{10.5}$$

は $|x - a| \leq \varepsilon$ の範囲でただ一つの解を持つ。

---

[k]通常ノルムは $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ で定めることが多いが、

$$|\boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{x}|_1 \leq \tfrac{n(n+1)}{2}|\boldsymbol{x}|$$

が成り立つので、$|\boldsymbol{x}|_1$ と $|\boldsymbol{x}|$ のどちらを用いても収束性に関しては同じ議論ができる。よってここでは計算のしやすい $|\boldsymbol{x}|_1$ を用いる。

証明は定理 10 と同様に逐次近似法で行われるが、同じ議論を繰り返す無駄を省くために逐次近似法を一般的な定理にまとめておいた方が便利である。

定義 16.
距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、次を満たすとき Cauchy 列であるという：

> 任意の $\varepsilon > 0$ について、適切な自然数 N を選ぶと $m, n > N$ を満たす任意の自然数 m, n に対し $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ が成り立つ。

定義 17.
距離空間 (X, d) において Cauchy 列が収束する時、(X, d) は完備であるという。

定義 18.
$T\colon X \to X$ を距離空間 (X, d) からそれ自身への写像とする。
ある定数 $0 < \lambda < 1$ について、任意の $x, y \in X$ に対し以下が成り立つとき T は縮小写像であるという：

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y) \tag{10.6}$$

定理 16 (縮小写像の原理、Banach の不動点定理)**.**
完備距離空間 (X, d) からそれ自身への縮小写像 $T\colon X \to X$ はただ一つの不動点をもつ。すなわち、次が成り立つような $x \in X$ がただ一つ存在する：

$$T(x) = x \tag{10.7}$$

証明.
逐次近似法で不動点を構成する。
先ず、縮小写像が連続であることは ε-δ 論法で簡単に示すことができる。数学概論 II・演習の教科書 [一樂] 122 ページには「コメント」として、『‥‥これまでの議論は「実数の連続性」を用いるところ以外はすべて同じように議論できる』とある。本当に同じ様に議論できることを各自ちゃんと自分で確認すること。(小テスト範囲。)

任意に $x_1 \in X$ を取り $x_{n+1} := T(x_n),\ (n \in \mathbb{N})$ とする。

このとき三角不等式 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),\ (x,y,z \in X)$ を繰り返し適用すると、$m > n$ について

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_{m-2}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned} \tag{10.8}$$

だが、T が縮小写像であることより

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d\left(T\left(x_k\right), T\left(x_{k-1}\right)\right) \qquad \leq \lambda d\left(x_k, x_{k-1}\right) \\ &= \lambda d\left(T\left(x_{k-1}\right), T\left(x_{k-2}\right)\right) \leq \lambda^2 d\left(x_{k-1}, x_{k-2}\right) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{k-1} d(x_2, x_1) \end{aligned} \tag{10.9}$$

が成り立つので、結局

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \lambda^{m-2} d(x_2, x_1) + \lambda^{m-3} d(x_2, x_1) + \cdots + \lambda^{n-1} d(x_2, x_1) \\ &= \lambda^{n-1}\left(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1\right) d(x_2, x_1) \\ &\leq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(x_2, x_1) \end{aligned} \tag{10.10}$$

が成り立つ。

従って $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であり

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \tag{10.11}$$

が存在するが、T は縮小写像なので連続であり、

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_*) \tag{10.12}$$

となる。つまり x_* は T の不動点である。

更に、$T(x_*) = x_*$ と $T(x'_*) = x'_*$ が成り立つならば、

$$d(x_*, x'_*) = d(T(x_*), T(x'_*)) \leq \lambda d(x_*, x'_*) \tag{10.13}$$

となるので

$$(1-\lambda) d(x_*, x'_*) \leq 0 \tag{10.14}$$

だが、$1-\lambda > 0$ かつ $d(x_*, x'_*) \geq 0$ なので $d(x_*, x'_*) = 0$ すなわち $x_* = x'_*$ である。従って不動点はただ一つである。 □

この定理を使って定理 15 を証明するには、解の候補になる x のベクトル値関数 $\boldsymbol{y}(x)$ の集合を完備距離空間になる様に選び、(10.5) の右辺の積分で定める写像がその上の縮小写像になる様にする。具体的には

$$X := \left\{ \boldsymbol{y}(x) \in C^0([a-\varepsilon, a+\varepsilon], \mathbb{R}^n) \;\middle|\; |\boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{b}|_1 \leq \varepsilon_y \right\} \tag{10.15}$$

に定義 15 で定義したノルム $\|\boldsymbol{y}\|$ を用いて、距離を $d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) := \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|$ と定めると完備距離空間になり、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対しては

$$T(\boldsymbol{y})(x) := \int_a^x \boldsymbol{f}\left(\xi, \boldsymbol{y}(\xi)\right) d\xi + \boldsymbol{b} \tag{10.16}$$

で定められる T が X から X への縮小写像になる (すなわち、定義域を X としたとき値域が X 内に収まり、(10.6) を満たす) ことを示す。この時 T のただ一つの不動点としてただ一つの解が得らる。

上記の手続きの具体的な計算は定理 10 とほぼ同様なので省略する。詳細は [金子]87 ページ以降等参照。

解の初期値やパラメータに対する連続性や微分可能性の証明も y がスカラーの場合と同様である。

宿題 11.

- 縮小写像は連続であることを証明せよ。(小テスト範囲)
- $d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) := \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|$ は距離の公理を満たすことを示せ。(小テスト範囲)

11 定数係数連立線型常微分方程式

この節では次の定数係数線型連立一階常微分方程式を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases} \tag{11.1}$$

これは $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ として次の様に書かれる：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y} \tag{11.2}$$

これは以下の様にして解くことができる：

A が対角化 (一年生の線形代数学 I・II の教科書 [南]202 ページ参照) できる場合

A の固有値、固有ベクトルを $\lambda_i, \boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とする。

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\boldsymbol{v}_i \tag{11.3}$$

と表すとき

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc_i}{dx}\boldsymbol{v}_i = A\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i A\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \boldsymbol{v}_i \tag{11.4}$$

となるので

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dc_i}{dx} - \lambda_i c_i \right) \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \tag{11.5}$$

が成り立ち、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ は一次独立であることより

$$\frac{dc_i}{dx} = \lambda_i c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.6}$$

となる。これを解いて (11.3) に代入すると (11.2) の解が得られる。

A が対角化できない場合

この場合でも A は Jordan 標準形 (一年生の線形代数学 I・II の教科書 [南]290 ページ参照) にできる。

先ず $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ となる場合を考える。

この時は $P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とすると

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v}_1 = \lambda \boldsymbol{v}_1 \\ A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \lambda \boldsymbol{v}_2 \\ \qquad \vdots \\ A\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_{n-1} + \lambda \boldsymbol{v}_n \end{cases} \tag{11.7}$$

なので、

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\boldsymbol{v}_i \tag{11.8}$$

と表すとき

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc_i}{dx}\boldsymbol{v}_i = A\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i A\boldsymbol{v}_i = \lambda c_1 \boldsymbol{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\boldsymbol{v}_{i-1} + \lambda \boldsymbol{v}_i\right) \tag{11.9}$$

となるので

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dc_i}{dx} - \lambda c_i - c_{i+1}\right)\boldsymbol{v}_i + \left(\frac{dc_n}{dx} - \lambda c_n\right)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{11.10}$$

が成り立ち、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立であることより

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dx} &= \lambda c_1 + c_2 \\ & \vdots \\ \dfrac{dc_{n-1}}{dx} &= \lambda c_{n-1} + c_n \\ \dfrac{dc_n}{dx} &= \lambda c_n \end{cases} \tag{11.11}$$

となる。これを c_n から逆順に解いて (11.8) に代入すると (11.2) の解が得られる。

一般の場合は $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を A の固有値とし、 Jordan ブロックを $k \times k$ 行列 $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ として

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$ とできるので、各 Jordan ブロックに対し同様の操作を行えば良い。

問題 4. 次の連立微分方程式を解け：

(1).

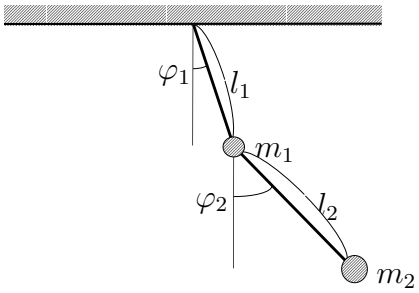
$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

具体例 15.

質量 m_1, m_2 の質点が長さ l_1, l_2 二本のアームで繋がれて、一方を天井に吊るされた二重振り子を考える：



それぞれのアームの振角を φ_1, φ_2 とし、φ_i が小さいとして $\sin\varphi_i \approx \varphi_i$ の近似を用いると、運動方程式は次のようになる：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\dfrac{m_1+m_2}{m_1 l_1} g\varphi_1 + \dfrac{m_2}{m_1 l_1} g\varphi_2 \\ \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \dfrac{m_1+m_2}{m_1 l_2} g\varphi_1 - \dfrac{m_1+m_2}{m_1 l_2} g\varphi_2 \end{cases} \tag{11.12}$$

ただし g は重力定数とする。

ここで

$$u_1 = \sqrt{\frac{m_1 l_1}{m_2}}\varphi_1, \quad u_2 = \sqrt{\frac{m_1 l_2}{m_1+m_2}}\varphi_2 \tag{11.13}$$

$$\nu_1^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1 l_1} g, \quad \nu_2^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1 l_2} g, \quad \nu_3^2 = \sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2 l_1 l_2}} g \tag{11.14}$$

とおくと (11.12) は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_1}{dt^2} = -\nu_1^2 u_1 + \nu_3^2 u_2 \\ \dfrac{d^2 u_2}{dt^2} = \nu_3^2 u_1 - \nu_2^2 u_2 \end{cases} \tag{11.15}$$

すなわち

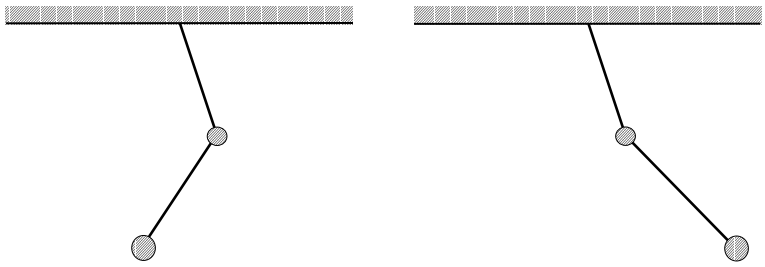
$$\begin{pmatrix} \frac{d^2u_1}{dt^2} \\ \frac{d^2u_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_1^2 & \nu_3^2 \\ \nu_3^2 & -\nu_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

となる。

この係数行列の固有値と固有ベクトルは

$$(-\omega_1^2, \boldsymbol{v}_1) = \left(-\frac{\nu_1^2+\nu_2^2+\sqrt{\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)^2+4\nu_3^4}}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\nu_1^2-\nu_2^2-\sqrt{\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)^2+4\nu_3^4}}{2\nu_3^2} \end{pmatrix} \right)$$

$$(-\omega_2^2, \boldsymbol{v}_2) = \left(-\frac{\nu_1^2+\nu_2^2-\sqrt{\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)^2+4\nu_3^4}}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\nu_1^2-\nu_2^2+\sqrt{\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)^2+4\nu_3^4}}{2\nu_3^2} \end{pmatrix} \right)$$



$\boldsymbol{v}_1$ $\boldsymbol{v}_2$

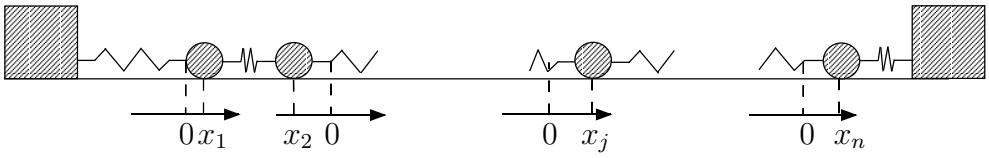
よって (11.15) の解は

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = (C_1 \sin\omega_1 t + D_1 \cos\omega_1 t)\,\boldsymbol{v}_1 + (C_2 \sin\omega_2 t + D_2 \cos\omega_2 t)\,\boldsymbol{v}_2 \tag{11.17}$$

となる。

具体例 16.

質量 m の n 個の質点がバネ定数 K のバネで繋がれた系を考える (両端は壁に固定)。



力が働かず静止した状態で全てのバネの長さが自然長である時からの各質点の変位を $x_j,\ (j=1,\ldots,n)$ とすると次の運動方程式が成り立つ：

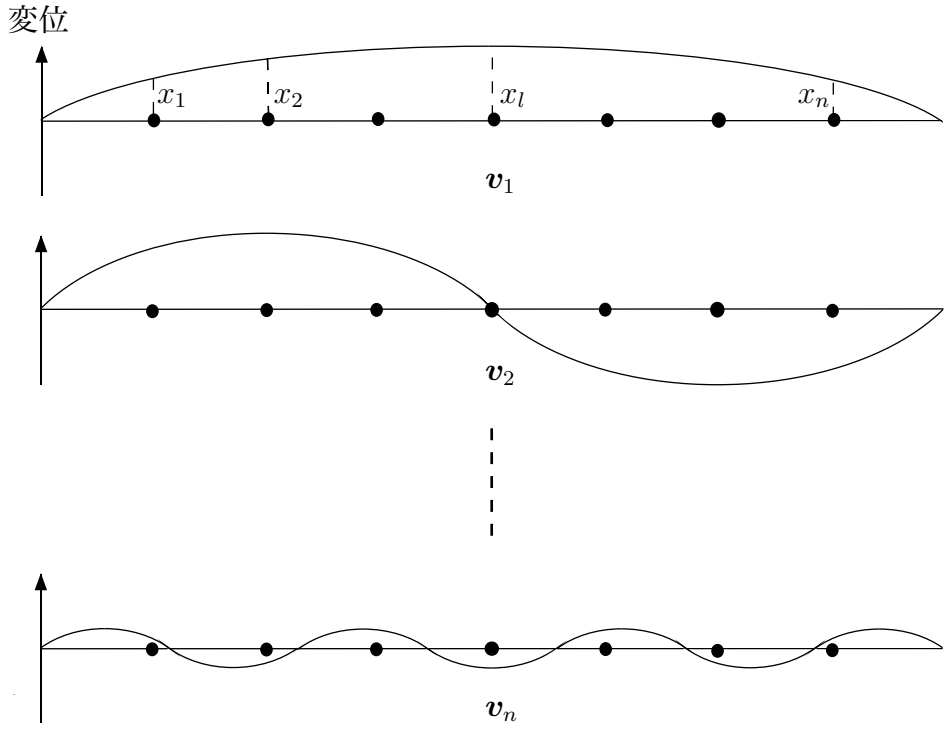
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = K(x_2-x_1) - Kx_1 \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = K(x_3-x_2) - K(x_2-x_1) \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = K(x_4-x_3) - K(x_3-x_2) \\ \qquad\vdots \\ m\dfrac{d^2x_n}{dt^2} = -Kx_n - K(x_n-x_{n-1}) \end{cases} \tag{11.18}$$

これを行列を使って書くと以下の様になる：

$$m\begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2x_{n-1}}{dt^2} \\ \frac{d^2x_n}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2K & K & 0 & \cdots & & 0 \\ K & -2K & K & \cdots & & 0 \\ 0 & K & -2K & K & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K & -2K & K \\ 0 & 0 & \cdots & & K & -2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \tag{11.19}$$

この係数行列の固有値と固有ベクトルは以下で与えられる：

$$(-\omega_l^2, \boldsymbol{v}_l) = \left(-4K\sin^2\frac{l\pi}{2(n+1)}, \begin{pmatrix} \sin\frac{l\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2l\pi}{n+1} \\ \sin\frac{3l\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{nl\pi}{n+1} \end{pmatrix} \right), \quad (l=1,2,\ldots,n)$$



これより解は次の様になる：

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \{C_l \sin \omega_l t + D_l \cos \omega_l t)\, \boldsymbol{v}_l \tag{11.20}$$

しかし、無限次元ではこのような方法は使えないので、ここでは無限次元でも使われる一般論を紹介する。

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{11.21}$$

の解を逐次近似法

$$\boldsymbol{y}_{n+1}(x) = \int_0^x A\boldsymbol{y}_n(\xi)d\xi + \boldsymbol{y}_0 \tag{11.22}$$

で構成すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_n(x) &= \boldsymbol{y}_0 + xA\boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}x^2A^2\boldsymbol{y}_0 + \cdots + \frac{1}{n!}x^nA^n\boldsymbol{y}_0 \\ &= \left(E + xA + \frac{1}{2}x^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^nA^n\right)\boldsymbol{y}_0\end{aligned} \tag{11.23}$$

となる。よって

$$E + xA + \frac{1}{2}x^2A^2 + \frac{1}{3!}x^3A^3 + \cdots \tag{11.24}$$

が適切な意味で収束するならば、これを ($e^{\lambda x}$ の Taylor 展開との比較で)e^{xA} と定義することによって、(11.21) の解は

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{xA}\boldsymbol{y}_0 \tag{11.25}$$

となる。よって以下では (11.24) の収束を証明する。

先ずベクトル空間のノルムに関する一般論をまとめる。

定義 19.

ベクトル空間 V で定義された関数 $N\colon V \to \mathbb{R}$ で以下を満たすものをノルムとよぶ：

(1). $N(\boldsymbol{u}) \geq 0$ かつ、$N(\boldsymbol{u}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

(2). $N(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leq N(\boldsymbol{u}) + N(\boldsymbol{v})$

(3). $N(\alpha\boldsymbol{u}) = |\alpha|N(\boldsymbol{u})$

但し、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$、$\alpha \in \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。

例 10.

$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}| &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\ |\boldsymbol{x}|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ |\boldsymbol{x}|_{\max} &:= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\end{aligned}$$

特に $|\cdot|$ を Euclid ノルムとよぶ。

ベクトル空間における距離はノルムを用いて定められる。

定義 20.
ベクトル空間Vにノルム$N(\cdot)$が定められているとする。この時$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$の距離を

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := N(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$$

で定める。

この$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$が距離の公理を満たすことはノルムの定義より簡単に確かめられる。

定義 21.
ノルムの定められたベクトル空間ではこの距離によって収束を定義する。すなわち

(1). $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{m\to\infty} d(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}) = \lim_{m\to\infty} N(\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}) = 0$

(2). ベクトル値級数$\sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_m$が絶対収束する$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_{m=1}^{\infty} N(\boldsymbol{x}_m)$が収束する。
(Vがこの距離について完備であるならば絶対収束級数が収束することの証明は実数の級数と同様である。)

実は有限次元ベクトル空間のノルムは全て次の意味で同値である。

定理 17.
$\mathbb{R}^n$または$\mathbb{C}^n$に定められた任意の二つのノルム$N_1(\cdot)$と$N_2(\cdot)$について、適切な定数$A, B > 0$について、以下が任意の$\boldsymbol{x}$について成り立つ：

$$AN_1(\boldsymbol{x}) \leq N_2(\boldsymbol{x}) \leq BN_1(\boldsymbol{x}) \tag{11.26}$$

証明.
任意のノルム$N(\cdot)$とEuclidノルム$|\cdot|$について

$$A|\boldsymbol{x}| \leq N(\boldsymbol{x}) \leq B|\boldsymbol{x}| \tag{11.27}$$

が成り立つことを示ば、一般の場合はこれを利用して簡単に示される。
先ずノルム$N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$(または$\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$)は連続である。
$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$を$\mathbb{R}^n$(または$\mathbb{C}^n$)の標準基底とすると定義19 (2) (3)より

$$N(\boldsymbol{x}) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(\boldsymbol{e}_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}| N(\boldsymbol{e}_i) \tag{11.28}$$

なので、

$$M := \max\{N(\boldsymbol{e}_1), \ldots, N(\boldsymbol{e}_n)\} \tag{11.29}$$

とすると、

$$N(\boldsymbol{x}) \leq nM|\boldsymbol{x}| \tag{11.30}$$

が成り立つ。つまり

$$N(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq nM|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \tag{11.31}$$

なので $N(\cdot)$ は Euclid ノルム $|\cdot|$ で定まる位相で連続である。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{x}| = 1\}$ はコンパクトなので、$N(\cdot)$ はその上での最小値 A と最大値 B を取り、定義 19 (1) より $A > 0$ である。

$|\boldsymbol{x}| \neq 0$ ならば、$\left|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right| = 1$ であることより

$$A \leq N\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) \leq B \tag{11.32}$$

だが、

$$N(\boldsymbol{x}) = N\left(|\boldsymbol{x}|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) = |\boldsymbol{x}|N\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) \tag{11.33}$$

なので (11.27) が成り立つ。

$|\boldsymbol{x}| = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので (11.27) は全ての辺がゼロで成り立つ。 □

注意 7.

この定理より $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := N(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$ を距離として定まる収束、発散の議論はどのノルムを用いても同じであり、位相は全て同じである。特に、全てのノルムが $|\cdot|_{\max}$ と同値であることより、ノルムから定まる距離で収束することと、ベクトルの各成分が収束することは同値である。よって有限次元ベクトル空間は任意のノルムについて完備である。

このことから、収束性や連続性の議論のみを行い、具体的なノルムの値が必要ないときは計算しやすいノルムを自由に選べば良い[1]。

宿題 12.

- 問題 4

[1] この定理は無限次元では成り立たず、目的に合ったノルムを使う必要がある。
例えば、$a \leq x \leq b$ で定められたベクトル値連続関数の空間は無限次元ベクトル空間であり、(10.3) で定められる $\|\cdot\|$ とは同値ではないノルムを定めることもできる。その場合、そのノルムで収束しても必ずしも一様収束するとは限らない。(各点収束すらしない場合もある。)

- ベクトル空間 V にノルム $N(\cdot)$ が定められていて $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = N(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ で定められる距離について完備である時 V の絶対収束級数は収束することを示せ。

n 次正方行列は n^2 次元ベクトルなのでノルムを定義できるが、次の特別なノルムを考えると無限次元の時にも応用できる：

定義 22.
n 次実正方行列 A のノルムを以下で定義する：

$$\begin{aligned}\|A\| :&= \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{|A\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} \\ &= \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,|\boldsymbol{x}|=1} |A\boldsymbol{x}|\end{aligned} \tag{11.34}$$

但し $|\cdot|$ は Euclid ノルムとする。

補題 6.
n 次正方行列 A と $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し $|A\boldsymbol{x}| \leq \|A\||\boldsymbol{x}|$ が成り立つ。

証明.
$\|A\|$ の定義より任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ に対し

$$\|A\| \geq \frac{|A\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} \tag{11.35}$$

が成り立つ。 □

補題 7.
二つの n 次正方行列 A, B に対し $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ が成り立つ。

証明.
ノルムの定義より

$$|A(B\boldsymbol{x})| \leq \|A\||B\boldsymbol{x}| \leq \|A\|\|B\||\boldsymbol{x}| \tag{11.36}$$

なので、

$$\frac{|(AB)\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} \leq \|A\|\|B\| \tag{11.37}$$

において最大値を考えればよい。 □

注意 8.
これより

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m \tag{11.38}$$

が成り立つ。

定理 18.
A を n 次正方行列とするとき、行列の級数

$$E + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots \tag{11.39}$$

は絶対収束する。

証明.
$0! = 1, A^0 = E$ として

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\|A\|^k \tag{11.40}$$

だが、右辺は $e^{\|A\|}$ に絶対収束する。 □

定義 23.
n 次正方行列 A に対し、e^A を次で定義する：

$$e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m \tag{11.41}$$

これで e^{xA} は定義できるが、それが x で微分可能で通常の指数関数と同様の性質を持つことを示すにはもう少し準備が要る。

補題 8.
n 次正方行列からなる二つの絶対収束級数 $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ と $B = \sum_{j=0}^{\infty} B_j$ について、

$$AB = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i+j=l} A_i B_j \tag{11.42}$$

が成り立つ。

この補題も実数級数の場合と同様に示されるが、念の為証明を与えておく。(一年生の微分積分学 I・II、二年生前期の微分積分学続論 I の教科書 [齋藤正彦]281 ページ参照)

証明.

先ず

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=0}^{m} A_i \sum_{j=0}^{m} B_j - AB\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=0}^{m} A_i \sum_{j=0}^{m} B_j - A\sum_{j=0}^{m} B_j\right\| + \left\|A\sum_{j=0}^{m} B_j - AB\right\| \\
&= \left\|\left(\sum_{i=0}^{m} A_i - A\right)\sum_{j=0}^{m} B_j\right\| + \left\|A\left(\sum_{j=0}^{m} B_j - B\right)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=0}^{m} A_i - A\right\| \left\|\sum_{j=0}^{m} B_j\right\| + \|A\| \left\|\sum_{j=0}^{m} B_j - B\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=0}^{m} A_i - A\right\| \sum_{j=0}^{m} \|B_j\| + \|A\| \left\|\sum_{j=0}^{m} B_j - B\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=0}^{m} A_i - A\right\| \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| + \|A\| \left\|\sum_{j=0}^{m} B_j - B\right\|
\end{aligned}
\tag{11.43}
$$

より

$$
\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} A_i \sum_{j=0}^{m} B_j = AB \tag{11.44}
$$

である。一方で

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{l=0}^{2m} \sum_{i+j=l} A_i B_j - \sum_{i=0}^{m} A_i \sum_{j=0}^{m} B_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-i} A_i B_j + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=m+1}^{2m-i} A_i B_j\right\| \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-i} \|A_i\|\|B_j\| + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=m+1}^{2m-i} \|A_i\|\|B_j\| \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{2m} \|A_i\| \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| + \sum_{i=0}^{m-1} \|A_i\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \|B_j\| \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \|A_i\| \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| + \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \|B_j\|
\end{aligned}
\tag{11.45}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{l=0}^{2m+1} \sum_{i+j=l} A_i B_j - \sum_{i=0}^{m} A_i \sum_{j=0}^{m} B_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=m+1}^{2m+1} \sum_{j=0}^{2m+1-i} A_i B_j + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=m+1}^{2m+1-i} A_i B_j \right\| \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{2m+1} \sum_{j=0}^{2m+1-i} \|A_i\| \|B_j\| + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=m+1}^{2m+1-i} \|A_i\| \|B_j\| \qquad (11.46) \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{2m+1} \|A_i\| \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| + \sum_{i=0}^{m} \|A_i\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \|B_j\| \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \|A_i\| \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| + \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \|B_j\|
\end{aligned}
$$

だが、$\sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\|$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\|$ 共に収束しているので、$\sum_{i=m+1}^{\infty} \|A_i\|$, $\sum_{j=m+1}^{\infty} \|B_j\|$ 共に $m \to \infty$ でゼロに収束する。従って (11.42) が成り立つ。 □

補題 9.

n 次正方行列 A, B と n 次ゼロ行列 O に対し

(0). $e^O = E$

(1). $AB = BA$ ならば $e^{A+B} = e^A e^B$

(2). $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$

証明.

(0). 定義より明らか。

(1). $AB = BA$ ならば、二項定理より

$$
(A+B)^m = m! \sum_{k+l=m} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{l!} B^l \qquad (11.47)
$$

なので、補題 8 を使うと

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A+B)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k+l=m} \frac{1}{k!}A^k \frac{1}{l!}B^l \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}B^l\right) \\
&= e^A e^B
\end{aligned}
\tag{11.48}
$$

(2).

$$
E = e^O = e^{A-A} = e^A e^{-A} \tag{11.49}
$$

より結論を得る。

□

これより行列の指数関数の微分公式が得られる。

定理 19.
n 次正方行列 A について次が成り立つ：

$$
\frac{d}{dx}e^{xA} = Ae^{xA} = e^{xA}A \tag{11.50}
$$

証明.
まず

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{h}\left(e^{hA} - E\right) - A\right\| &= \left\|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}h^{m-1}A^m\right\| \\
&\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}|h|^{m-1}\|A\|^m \\
&= \frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \\
&\to 0 \ (h \to 0)
\end{aligned}
\tag{11.51}
$$

より

$$
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(e^{hA} - E\right) = A \tag{11.52}
$$

である。よって行列に前や後ろから行列 e^{xA} をかける操作は線型であり[m]、有限次元ベクトル空間の間の線型写像は連続なので[n]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{xA} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{(x+h)A}-e^{xA}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{xA}e^{hA}-e^{xA}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}e^{xA}\left(\frac{1}{h}\left(e^{hA}-E\right)\right)\\ &= e^{xA}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{hA}-E\right)\\ &= e^{xA}A\end{aligned} \tag{11.54}$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{xA} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{hA}e^{xA}-e^{xA}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(e^{hA}-E\right)e^{xA}\right)\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{hA}-E\right)\right)e^{xA}\\ &= Ae^{xA}\end{aligned} \tag{11.55}$$

□

以上より行列値関数の一階線型常微分方程式の解の公式が得られた。

定理 20.

A を n 次正方行列とする時、$\mathbb{R}^n$ に値を取るベクトル値関数についての微分方程式の初期値問題：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{11.56}$$

---

[m] A を n 次正方行列とし、M_n を n 次正方行列の作る n^2 次元ベクトル空間とするとき $F_A\colon M_n \to M_n\colon X \mapsto AX$ および $G_A\colon M_n \to M_n\colon X \mapsto XA$ はどちらも線型写像である。

[n] V を有限次元ベクトル空間、$F\colon V \to V$ を線型写像とするとき $F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ となる行列が存在する。(一年生の線形代数学 I・II の教科書 [南]183 ページ参照。)

このとき

$$|F(\boldsymbol{u}) - F(\boldsymbol{v})| = |F(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})| = |A(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})| \le \|A\||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}| \tag{11.53}$$

が成り立つので F は一様連続である。(ただし、ノルム $\|\cdot\|$ は定義 22 の $|\cdot|$ を V のノルムに置き換えたものとする。定理 17 により $|\cdot|$ がどの様なノルムであっても結論に変わりはない。)

の解は次で与えられる：

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{xA}\boldsymbol{y}_0 \tag{11.57}$$

証明.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\left(e^{(x+h)A}\boldsymbol{y}_0 - e^{xA}\boldsymbol{y}_0\right) - Ae^{xA}\boldsymbol{y}_0\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(e^{hA} - E\right)e^{xA}\boldsymbol{y}_0 - Ae^{xA}\boldsymbol{y}_0\right| \\ &= \left|\left\{\frac{1}{h}\left(e^{hA} - E\right) - A\right\}e^{xA}\boldsymbol{y}_0\right| \\ &\leq \left\|\left\{\frac{1}{h}\left(e^{hA} - E\right) - A\right\}\right\| \left\|e^{xA}\right\| |\boldsymbol{y}_0|\end{aligned} \tag{11.58}$$

において $h \to 0$ の極限を取って (11.57) は (11.56) を満たす。

解の一意性は定理 15 の一般論が適用できる。 □

実は A が簡単に対角化できる場合や Jordan 標準形に変形できる場合は e^{xA} は間単に計算できる。

補題 10.

n 次正方行列 A, P に対し次が成り立つ：

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P \tag{11.59}$$

証明.

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^k\right)P \tag{11.60}$$

だが、行列に前と後ろから行列 P^{-1} と P をかける操作は連続なので、上式の両辺の極限を取って結論を得る。 □

これより、$P^{-1}AP$ が対角型または Jordan 標準形であれば $e^A = Pe^{P^{-1}AP}P^{-1}$ と計算することができる。従って $e^{xA} = Pe^{xP^{-1}AP}P^{-1}$ である。

注意 9.

以上の議論は複素行列に対しても全く同様である。例えば、A が複素対角行列であれば e^A は対角成分に複素数の指数関数が並ぶ対角行列である。

宿題 13.

正方行列に対し定義 22 で定められるノルム $\|\cdot\|$ は定義 19 のノルムの性質を満たすことを示せ。(小テスト範囲)

例 11.

定数係数 n 階線型常微分方程式：

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \quad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}) \tag{11.61}$$

は n 変数定数係数 1 階連立線型常微分方程式に変形できる：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & = y_2 \\ & \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} & = -a_1 y_{n-1} - \cdots - a_{n-1} y_1 - a_n y \end{cases} \tag{11.62}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{11.63}$$

この係数行列の固有方程式は (11.61) の特性方程式：

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{11.64}$$

と一致することが簡単に示せる[o]。よって、係数行列の固有値は特性方程式 (11.64) の根と重複度を込めて等しい。

更に、λ を係数行列の固有値とするとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \lambda + a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.65}$$

より $\eta_k = \lambda^k \eta_0$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ となり固有空間は一次元である。従って固有方程式が m 重根を持つ時には Jordan 標準形は m 次の Jordan

[o]例えば n 行目で展開する。

細胞：

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{11.66}$$

を含む。よって、係数行列の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ とし、その重複度を $m_1, m_2, \ldots, m_l$ すると、係数行列の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}, \qquad (m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n) \tag{11.67}$$

となる。

簡単な計算で[p]

$$e^{xJ_m(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \frac{x^2}{2!}e^{\lambda x} & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \cdots & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda x} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \tag{11.68}$$

となることが分かるので、(11.63) の解はこの成分の一時結合になり、元の方程式 (11.61) の解が (4.62) の形になることがこれからも分かる。

---

p

$$J_m(\lambda) = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と分けると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

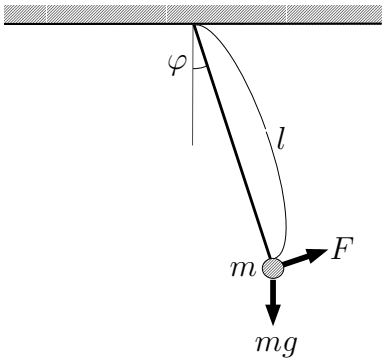
が簡単であることを利用できて計算しやすい。

問題 5.
(11.68) を証明せよ。

第III部
Appendix

12　振り子の方程式の解

質量 m の質点が長さ l のアームで天井に吊るされた振り子を考える：



アームの振れ角を φ として運動方程式を立てると

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi + F \tag{5.1}$$

5 節では φ が小さいときに $\sin\varphi \approx \varphi$ という近似を用いたが、ここでは $F \equiv 0$ の場合について (5.1) をそのまま考える。

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi \tag{12.1}$$

先ず両辺に $\dfrac{d\varphi}{dt}$ をかけて積分するとエネルギー保存則が得られる：

$$\frac{ml}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mg(1-\cos\varphi) = E_0 \tag{12.2}$$

但し、$\varphi = 0$ で位置エネルギーが 0 となるように積分定数を決めてある。

$\varphi = \alpha > 0$ のとき触れ角が最大で、従って、そのとき $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$ であるとすると $E_0 = mg(1 - \cos\alpha)$ である：

$$\frac{ml}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mg(1 - \cos\varphi) = mg(1 - \cos\alpha) \tag{12.3}$$

整理して半角の公式を使うと：

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{12.4}$$

ここで $\dfrac{g}{l} = \omega^2,\ \sin\dfrac{\alpha}{2} = k$ と書き、

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{k} = \sin\theta \tag{12.5}$$

となる θ を取ると ($-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ なのでこの様な θ は存在する)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm 2\omega k\cos\theta \tag{12.6}$$

また、(12.5) の両辺を t で微分して

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{dt} = k\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \tag{12.7}$$

から

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2k\cos\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin\theta}}\frac{d\theta}{dt} \tag{12.8}$$

なので (12.6) に代入して

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\omega\sqrt{1 - k^2\sin\theta} \tag{12.9}$$

すなわち

$$\int\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin\theta}}d\theta = \pm\int\omega dt \tag{12.10}$$

$t = 0$ で $\varphi(0) = 0$ 従って $\theta(0) = 0$ とし、さらに $t = 0$ から動き出すときに φ は正の方向に動くとすると

$$\int_0^{\theta(t)}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin\vartheta}}d\vartheta = \omega t \tag{12.11}$$

これを $\theta(t)$ について解いて、

$$\varphi = 2\sin^{-1}\left(k\sin\theta(t)\right) \tag{12.12}$$

とおけば解が求まるのだが、残念ながら (12.11) の左辺の積分は初等関数では表せない。

(12.11) の左辺を $F(k,\theta)$ と書いて第一種不完全楕円積分とよび、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ とおいたのものを $K(k)$ と書いて第一種完全楕円積分とよぶ：

$$\begin{aligned} F(k,\theta) &= \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin\vartheta}}d\vartheta \\ K(k) &= F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin\vartheta}}d\vartheta \end{aligned} \tag{12.13}$$

振り子が最大振れ角 $\varphi = \alpha$ になるときは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ なので振り子の周期は

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) \tag{12.14}$$

となり、これはアームの長さ l のみならず最大振れ角 α によるが、$\alpha = 0$ の極限では

$$K(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \frac{\pi}{2} \tag{12.15}$$

より周期は

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(0\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{12.16}$$

となり (5.3) の結果と一致する。

$z = \sin\vartheta$ 置換すると

$$F(k,\theta) = \int_0^{\sin\theta} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}} \tag{12.17}$$

この積分で定義される関数

$$u(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}} \tag{12.18}$$

の逆関数を Jacobi の楕円関数とよび $\mathrm{sn}(u)$ または $\mathrm{sn}(u,k)$ で表す。すなわち sn は次を満たす：

$$\mathrm{sn}(u(x),k) = x, \quad u(\mathrm{sn}(u,k),k) = u \tag{12.19}$$

(12.17) を用いると

$$\mathrm{sn}(F(k,\theta),k) = \sin\theta, \quad F(k,\sin^{-1}(\mathrm{sn}(u,k))) = u \tag{12.20}$$

$F(k,\theta)$ の θ に関する逆関数を $\mathrm{am}(u)$ または $\mathrm{am}(u,k)$ と書き、Jacobi の振幅関数と呼ぶ。すなわち

$$\mathrm{sn}(u) = \sin\mathrm{am}(u), \quad \mathrm{am}(u) = \sin^{-1}\mathrm{sn}(u) \tag{12.21}$$

である。これを用いると (12.20) は

$$\mathrm{am}(F(k,\theta),k) = \theta, \quad F(k,\mathrm{am}(u,k)) = u \tag{12.22}$$

これを用いると (5.1) の $F \equiv 0$ の場合の解は

$$\varphi(t) = 2\sin^{-1}\left(k\sin\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right) \tag{12.23}$$

と表される。

Jacobi の楕円関数は三角関数とよく似た性質を持つ。詳しくは [武部] 参照。

13 定性的理論

以下では独立変数を t する正規形の一階の微分方程式を考える：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n \tag{13.1}$$

ただし、右辺は t に依らないとする。

定義 24.
方程式の中に解とその道関数を通してしか独立変数の現れない微分方程式：

$$f\left(\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}, \ldots, \frac{d^m\boldsymbol{x}}{dt^m}\right) = 0 \tag{13.2}$$

を自励系の微分方程式とよぶ。

$\boldsymbol{x}(t)$ が (13.1) の解であるとき定数 τ に対して $\boldsymbol{x}(t+\tau)$ も解である。従って、解が特定の $\boldsymbol{x}$ を通るのがどの t であるかを問題にせず、その $\boldsymbol{x}$ を通るかどうかのみを考える時は (13.1) の解の軌道を考えれば良い。

定義 25.
微分方程式 (13.1) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に対し

$$\gamma := \{\ \boldsymbol{x}(t) \mid \text{解}\ \boldsymbol{x}(t)\ \text{が存在する}\ t\ \} \tag{13.3}$$

を $\boldsymbol{x}(t)$ の軌道とよぶ。一般には軌道には t が増加する時に $\boldsymbol{x}(t)$ が動く方向の向きを付ける。

以下では (13.1) は局所 Lipschiz 連続で解の存在と一意性を満たすとする。この時異なる二つの軌道が交わることはない。すなわち、$\gamma_i = \{\ \boldsymbol{x}_i(t) \mid \text{解}\ \boldsymbol{x}_i(t)\ \text{が存在する}\ t\ \}$, $(i = 1, 2)$ とし、$\boldsymbol{x} \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ とすると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1(t_1) = \boldsymbol{x}_2(t_2)$ となる $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ が存在するが、$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) := \boldsymbol{x}_1\left(t - (t_2 - t_1)\right)$ とすると方程式 (13.1) を満たし $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_2) = \boldsymbol{x}$ である。よって解の一位性から $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}_2(t)$ なので、$\tilde{\boldsymbol{x}}$ の軌道と $\boldsymbol{x}_2$ の軌道は一致する。従って $\gamma_1 = \gamma_2$ である。

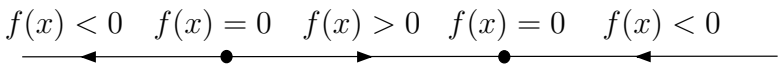
定義 26.
$\mathbb{R}^n$ を (13.1) の解の向き付きの軌道の和集合とみなす時相空間とよぶ。

以下では相空間の構造を解析する手法を紹介する。

13.1 $n = 1$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{13.4}$$

において $f(x) = 0$ となる点は一点 $\{x\}$ が軌道であり、$\mathbb{R}$ からその様な点を除いたものは開区間の和集合となる。その各開区間上では $f(x)$ の符号は一定なので、正の区間には x が増加する方向に矢印を書き、負の区間には x が減少する方向に矢印を書くと相空間は完全に表現される。



13.2　$n = 2$ のとき

$n \geq 2$ では相空間の構造を解析するのは難しくなる。そこで、先ず $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となる点の近傍で考える。このような点を (13.1) の平衡点または $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の特異点とよぶ。

先ず、$\boldsymbol{f}$ が特異点の近傍では線型である場合を考える。平行移動で $\boldsymbol{0}$ が特異点である様にすると：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{13.5}$$

ただし、A は二次正方行列とする。

A の固有値を λ_1, λ_2 とし、この方程式の解の軌道を分類する。

$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\lambda_1 > \lambda_2 > 0}$ または $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$ のとき

座標変換をして A を対角化する：

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

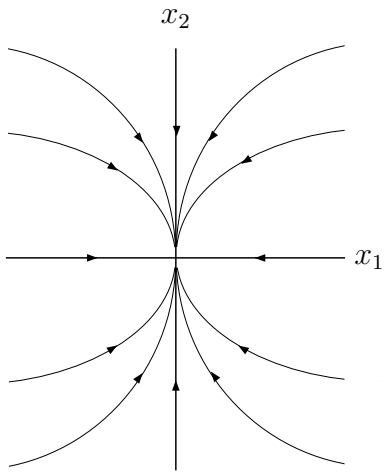
この解

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{13.7}$$

から t を消去すると軌道を表す式は

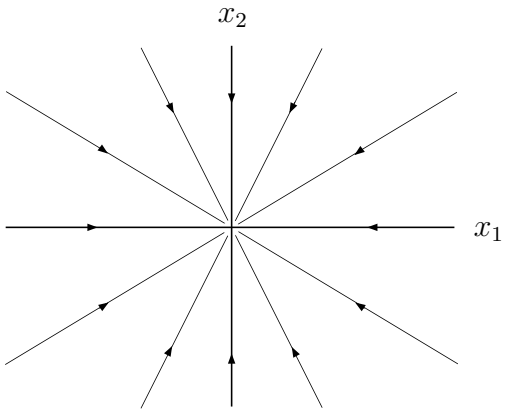
$$\left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = \left(\frac{x_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} > 0 \tag{13.8}$$

となるので相空間は次図の様になる。



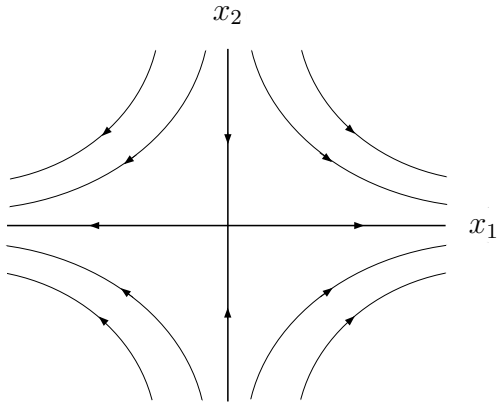
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0,\ A = \lambda E$ のとき

このとき相空間は次図の様になる。



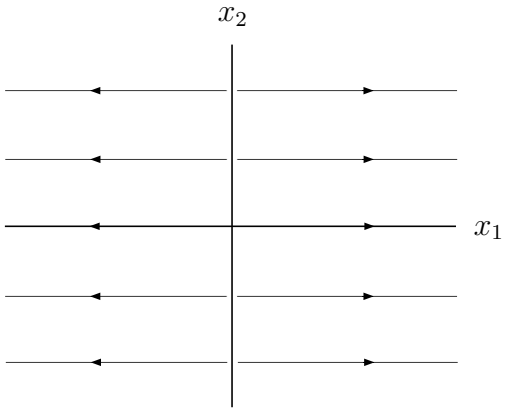
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 > 0 > \lambda_2$ のとき

この時は相空間は次図の様になる。



$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0$ のとき

このとき相空間は次図の様になる。



$\boldsymbol{A = O}$ のとき

この時は相空間全体が平衡点。

$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R},\ \lambda_1 = \overline{\lambda_2},\ \mathrm{Re}\ \lambda_1 = \mathrm{Re}\ \lambda_2 \neq 0}$ のとき

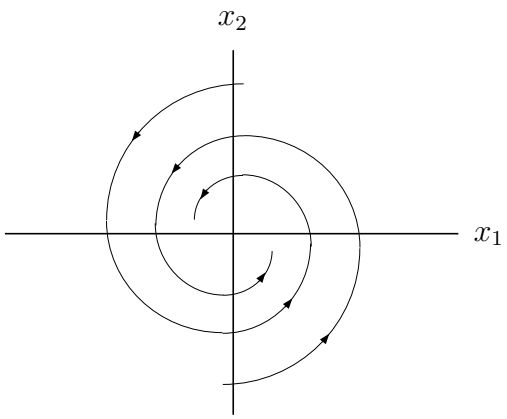
$\alpha = \mathrm{Re}\ \lambda_1,\ \beta = \mathrm{Im}\ \lambda_1$ として、座標変換をして方程式を次の形にする

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{13.9}$$

この解は

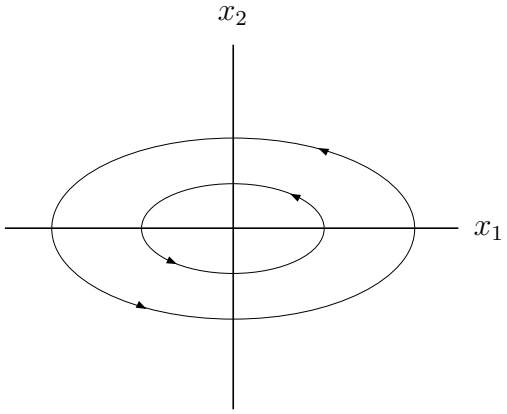
$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t\right) \\ x_2(t) = e^{\alpha t}\left(c_2 \cos \beta t - c_1 \sin \beta t\right) \end{cases} \tag{13.10}$$

となるので相空間は次図の様になる。



$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R},\ \lambda_1 = \overline{\lambda_2},\ \mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0}$ のとき

このとき相空間は次図の様になる。



$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0}$ で $\boldsymbol{A}$ が対角化できないとき

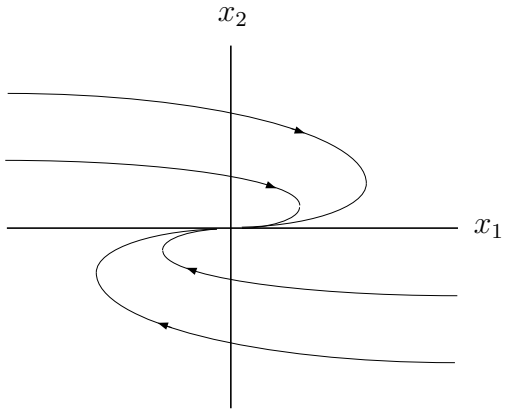
座標変換をして A を Jordan 標準形にする：

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{13.11}$$

この解は

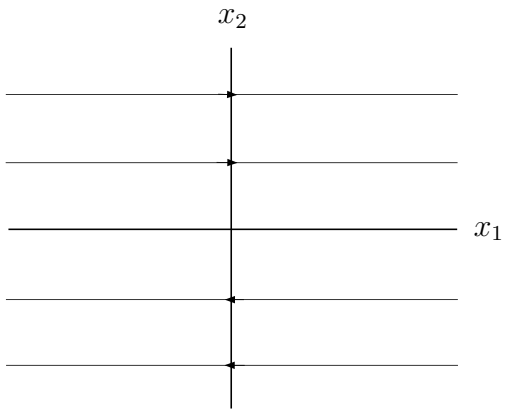
$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases} \tag{13.12}$$

となるので相空間は次図の様になる。



$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$ で $\boldsymbol{A \neq O}$ のとき

このとき相空間は次図の様になる。



実は、線型ではない方程式の平衡点での Taylor 展開

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + (\text{二次以上の項}) \tag{13.13}$$

において、A の固有値の実部がどちらも 0 でなければ、平衡点近傍の相空間の構造は上記とほぼ同じである。詳しくは [金子]181〜185 ページ参照。

13.3 $n \geq 3$ のとき

平衡点近傍では、平衡点での Taylor 展開の一次の項の係数行列の固有値によって $n = 2$ の場合の直積の形をしている。

実は、更に次の定理が成り立つ：

定理 21 (Hartman – Grobman の定理)**.**

原点を平衡点とする自励系の常微分方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{13.14}$$

において、 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の原点における Jacobi 行列 $D\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$ は実部が 0 の固有値を持たないとする。

このとき、ある原点の近傍 U、V とその間の同相写像 $\varphi\colon U \to V$ によって、(13.14) の U 内の各軌道は線型化方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = D\boldsymbol{f}(\mathbf{0})\boldsymbol{x} \tag{13.15}$$

の V 内の各軌道に向きを保って写される。

証明は [ロビンソン] 等参照。

参考文献

[寺田-坂田] 寺田文行・坂田そう 共著
「新版演習微分方程式」
サイエンス社 (2010 年)

[齋藤正彦] 齋藤正彦 著
「微分積分学」
東京図書 (2006 年)

[大森] 大森英樹 著
「力学的な微分幾何」
日本評論社 (2010 年)

[新居] 新居俊作 著
「Fourier 級数と偏微分方程式」
数学 III 講義ノート (2022 年)
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/Fourier.pdf

[南] 南和彦 著
「線形代数学講義」
裳華房 (2020 年)

[金子] 金子晃 著
「常微分方程式講義 — ライブラリ 数理・情報系の数学講義 4 」
サイエンス社 (2014 年)

[野村] 野村隆昭 著
「球面調和関数と群の表現」日本評論社 (2018 年)

[ロビンソン] C. ロビンソン 著
「力学系 上」
シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001 年)

[神保] 神保道夫 著
「複素関数入門」岩波書店 (2003 年)

[一樂] 一樂重雄 著
「新版 集合と位相 そのまま使える答えの書き方」
講談社 (2016 年)

[島倉] 島倉紀夫 著
「常微分方程式」
裳華房 (1988 年)

[武部] 武部尚志 著
「楕円積分と楕円関数 – おとぎの国の歩き方 –」
日本評論社 (2019 年)