極限・連続関数および微分法の理論と応用
§1 極限の再定義とその威力

新居セミナー

九州大学 理学部 数学科

http://imi.kyushu-u.ac.jp/ ym/

2016 年

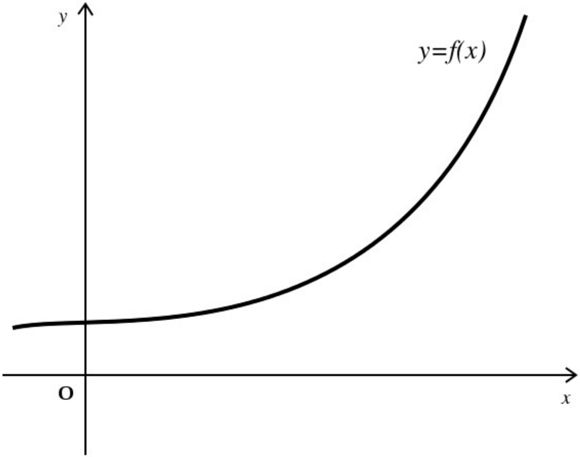
関数の極限

- 前回は数列の極限について, 厳密に定義しなおした.

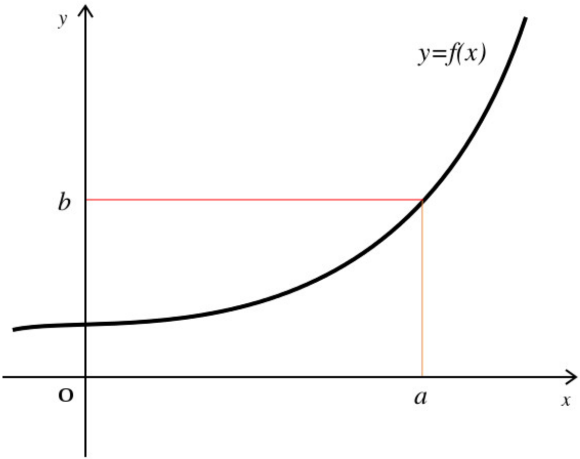
関数の極限

- 前回は数列の極限について, 厳密に定義しなおした.
- 同じように関数の極限も定義しなおしてみる.

関数の極限

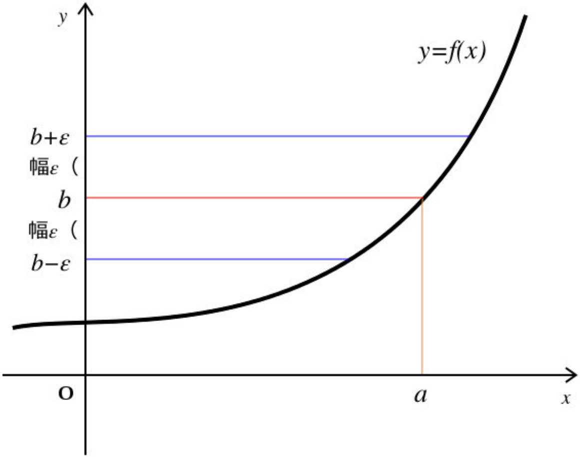


数列の極限と同じような考え方を, この $y = f(x)$ の極限に取り入れてみる.



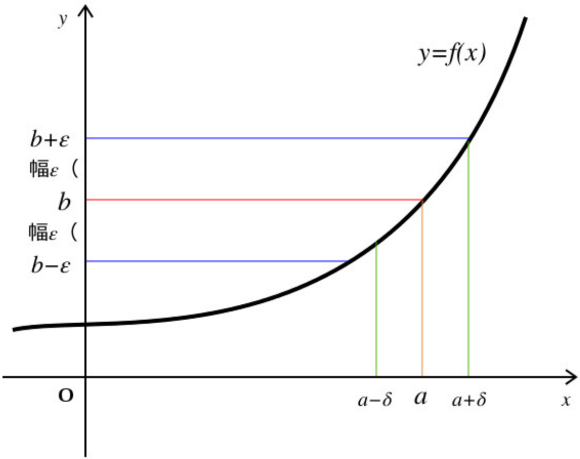
今回 x が a に限りなく近づくとき,
$f(x)$ は b に限りなく近づくということをいいたい.

関数の極限



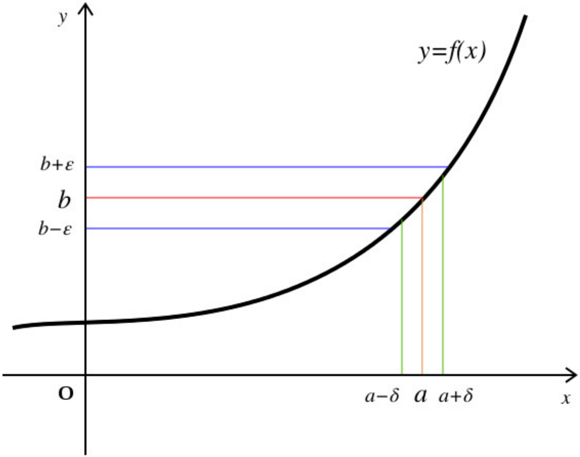
そこで数列のときと同じように,
b との誤差の許容限界として $\varepsilon > 0$(y に関する幅) が与えられたとしよう.

関数の極限



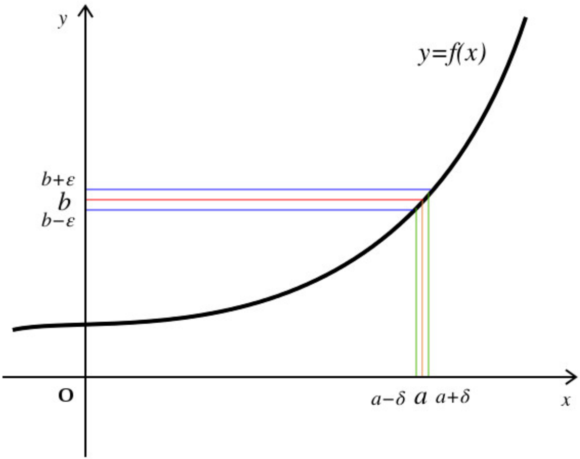
これに対して $\delta > 0$(x に関する幅) を十分小さくとれば,
a からの距離が δ より小さいようなすべての x に対して,
$f(x)$ が許される誤差の範囲 $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ に入る.

関数の極限

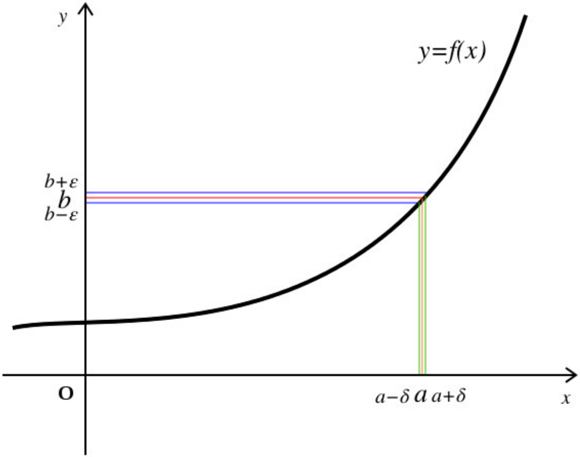


この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに小さい δ をとりなおせば, $|x-a|<\delta$ をみたす x に対して $|f(x)-b|<\varepsilon$ が成り立つ.

関数の極限

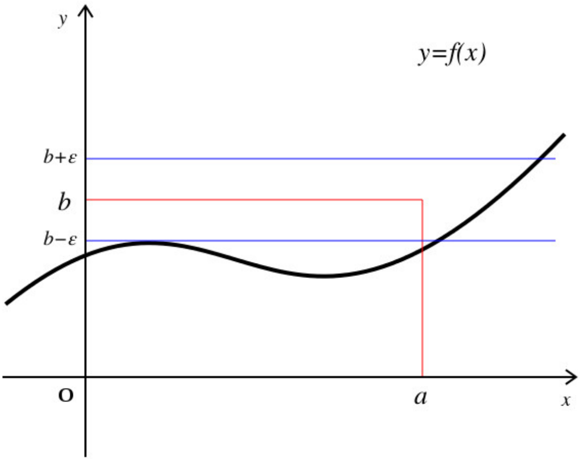


この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに小さい δ をとりなおせば, $|x-a|<\delta$ をみたす x に対して $|f(x)-b|<\varepsilon$ が成り立つ.



この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに小さい δ をとりなおせば, $|x-a|<\delta$ をみたす x に対して $|f(x)-b|<\varepsilon$ が成り立つ.

関数の極限



逆に, 図のように $\lim_{x \to a} f(x) = b$ でない場合, 例えばこのような幅 ε を与えれば, 対応する δ をとることができない.

(よって, 矛盾なく定義されている.)

まとめると,

定義 2.1.9

a を区間 I の一点とする.I から a を除いたところで定義された関数 $f(x)$ があるとし,b を実数とする.

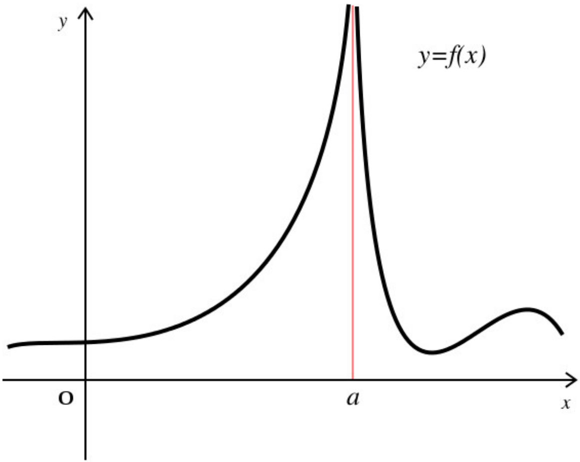
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

とはつぎのことである:任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$(デルタとよむ) を選ぶと,$0 < |x - a| < \delta$ をみたすような I のすべての点 x に対して

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

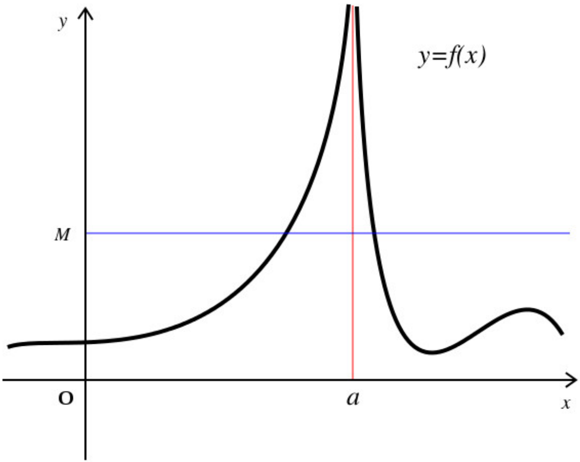
が成り立つ.

関数の極限

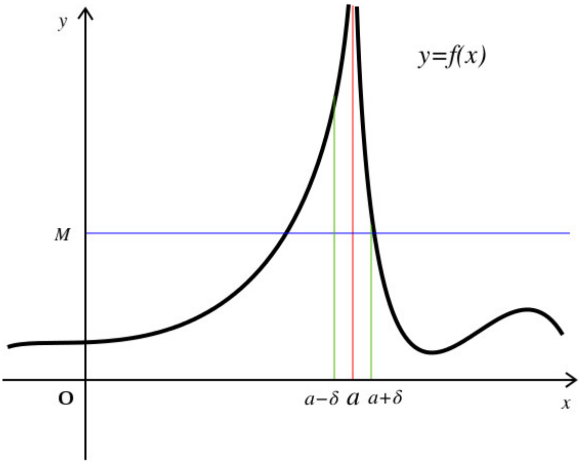


次に,$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ を定義する.

関数の極限

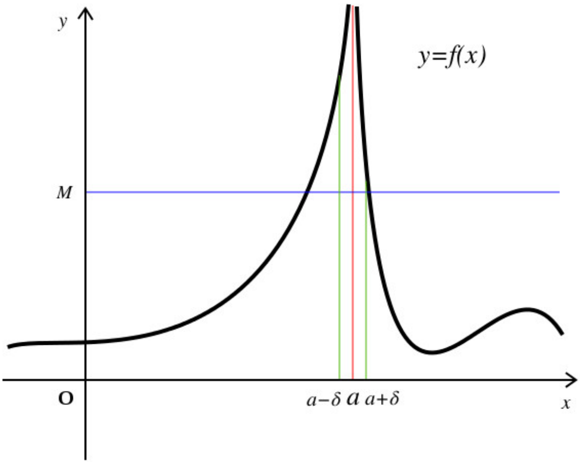


たとえばこのような関数があったときに,
ある数 M をもってくる.



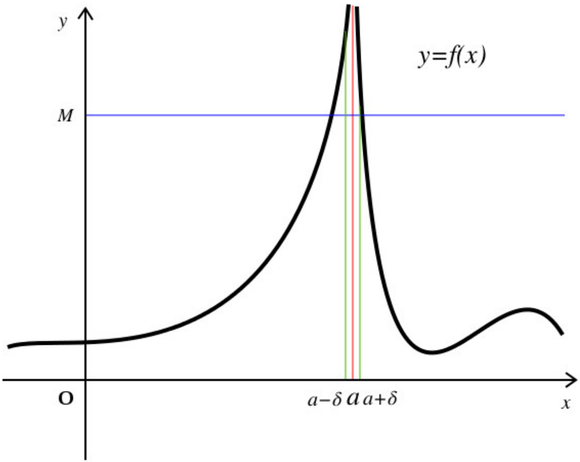
すると a の近くで関数の値は限りなく大きくなっているので,
$a-\delta < x < a+\delta$ では $f(x) > M$ となるように
幅 δ をもってくることができる.

関数の極限

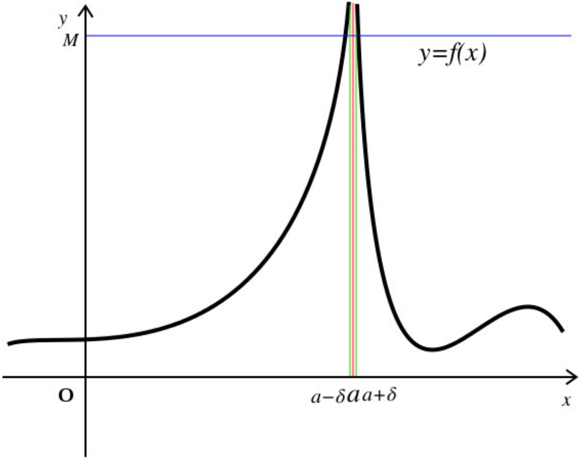


実際この M は何でもよい. どんなに大きい M が与えられても,
それに応じてさらに小さい δ をとりなおせば,
$|x-a|<\delta$ をみたす x に対して $f(x)>M$ が成り立つ.

関数の極限



実際この M は何でもよい. どんなに大きい M が与えられても,
それに応じてさらに小さい δ をとりなおせば,
$|x-a|<\delta$ をみたす x に対して $f(x)>M$ が成り立つ.



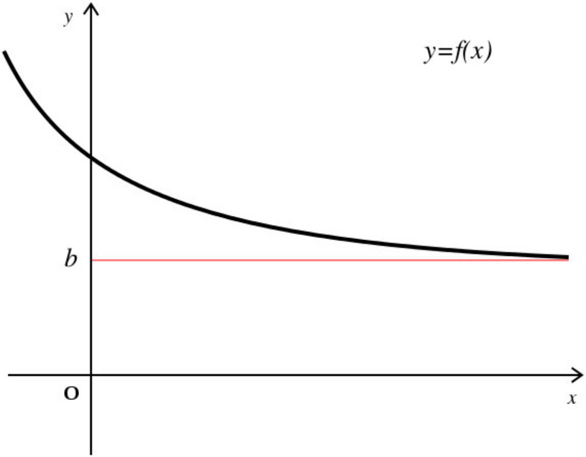
実際この M は何でもよい. どんなに大きい M が与えられても,
それに応じてさらに小さい δ をとりなおせば,
$|x-a|<\delta$ をみたす x に対して $f(x)>M$ が成り立つ.

定義 2.1.10

1）$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ 任意に与えられた数 M に対してある $\delta > 0$ をとると,$0 < |x - a| < \delta$ なるすべての x に対して $f(x) > M$ が成りたつ.

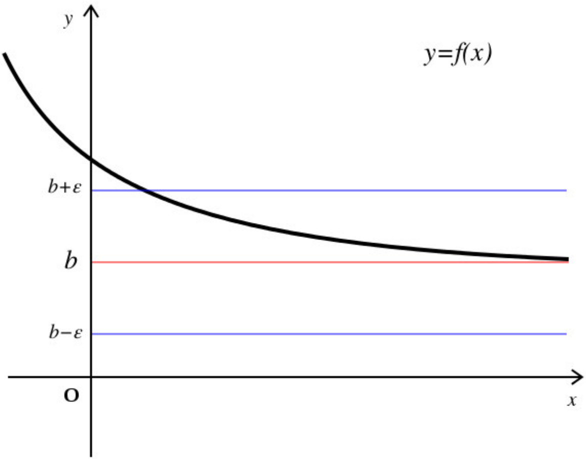
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ も同様に考える.
  (最後を $f(x) < M$ とすればよい.)

関数の極限



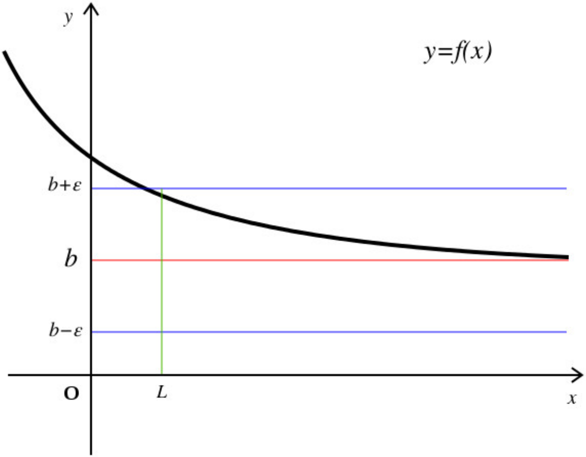
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ についても考えてみよう．
これは数列の極限にイメージが近い．

関数の極限



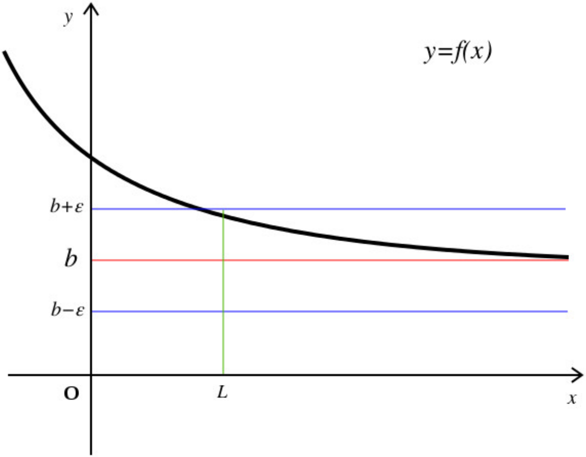
そこで数列のときと同じように,
b との誤差の許容限界として $\varepsilon > 0$(y に関する幅) が与えられたとしよう.

関数の極限



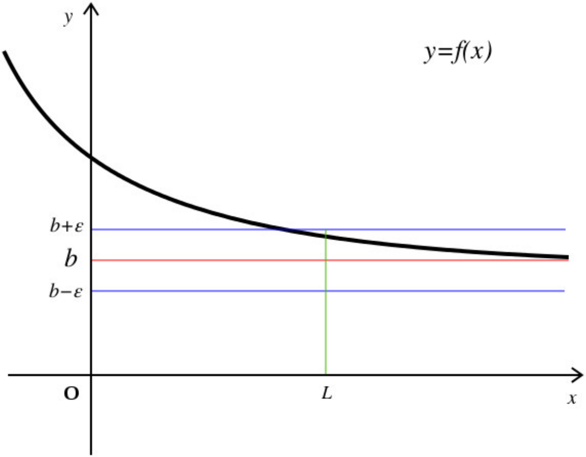
すると x が大きくなるにつれて
関数の値も限りなく b に近づいていくので,$x > L$ では
$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ となるようにある数 L をもってくることができる.

関数の極限



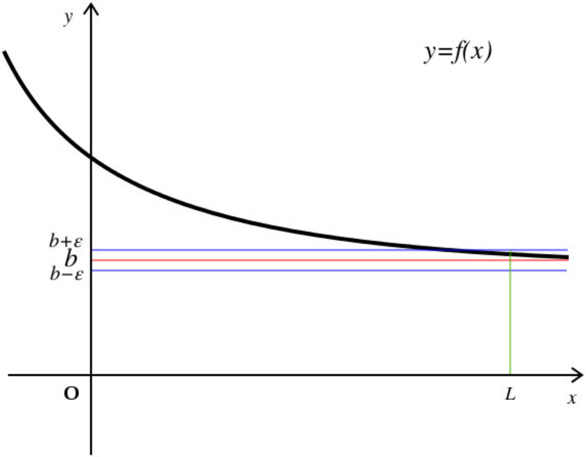
この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば,
$L < x$ をみたす x に対して $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

関数の極限



この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば,
$L < x$ をみたす x に対して $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

関数の極限



この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば,
$L < x$ をみたす x に対して $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

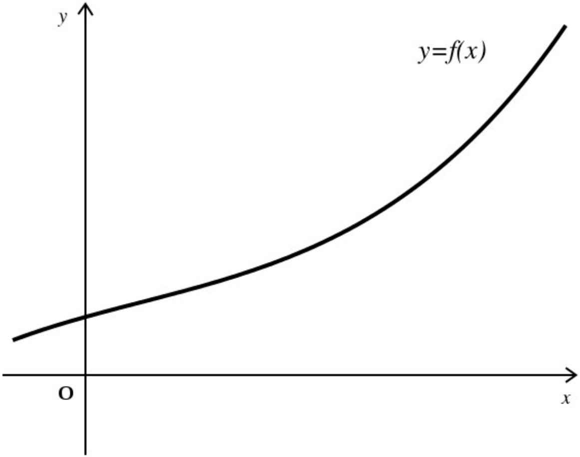
関数の極限

定義 2.1.10

2） $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある数 L をとると,$x > L$ なら $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成りたつ.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ も同様に考える.
  ($x > L$ を $x < L$ とすればよい.)

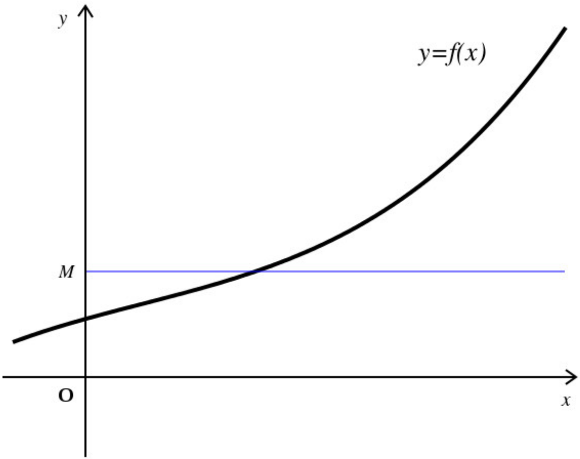
関数の極限



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ は,}$$

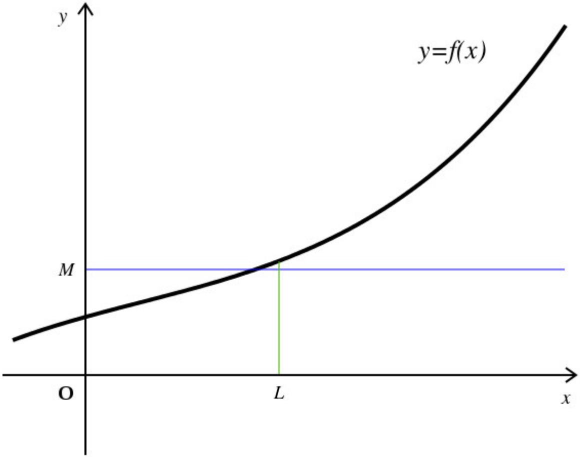
$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ と $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ の考え方を組み合わせればよい.

関数の極限

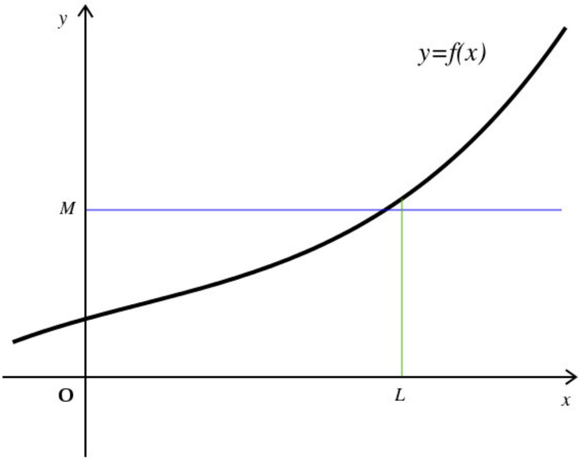


たとえばこのような関数があったときに，
ある数 M をもってくる．

関数の極限

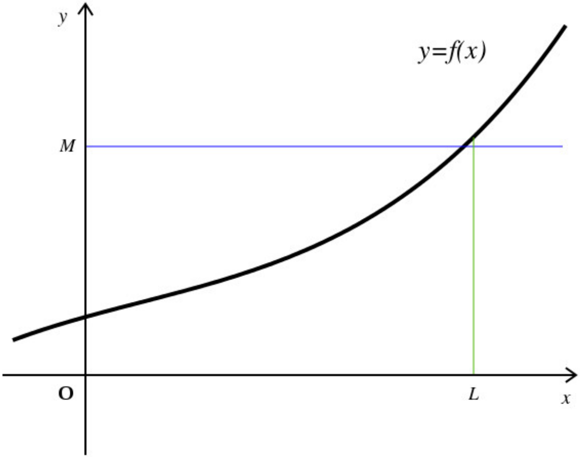


すると x が大きくなるにつれて
関数の値も限りなく大きくなっていくので,
$x > L$ では $f(x) > M$ となるようにある数 L をもってくることができる.



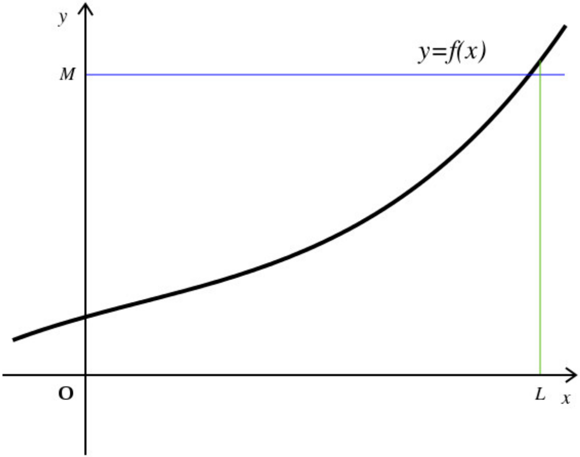
実際この M は何でもよい. どんなに大きい M が与えられても,
それに応じてさらに大きい L をとりなおせば,
$x > L$ をみたす x に対して $f(x) > M$ が成り立つ.

関数の極限



実際この M は何でもよい. どんなに大きい M が与えられても,
それに応じてさらに大きい L をとりなおせば,
$x > L$ をみたす x に対して $f(x) > M$ が成り立つ.

関数の極限



実際この M は何でもよい. どんなに大きい M が与えられても,
それに応じてさらに大きい L をとりなおせば,
$x > L$ をみたす x に対して $f(x) > M$ が成り立つ.

定義 2.1.10

3） $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ 任意の数 M に対してある数 L を選ぶと,$x > L$ なら $f(x) > M$ が成りたつ.($\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$(複号自由) も同様.)

定義 2.1.10

3） $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ 任意の数 M に対してある数 L を選ぶと,$x > L$ なら $f(x) > M$ が成りたつ.($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$(複号自由) も同様.)

4）(右または左からの極限) $\lim_{x\to a+0} f(x) = b \Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ を選ぶと,$a < x < a + \delta$ なら $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成りたつ.($\lim_{x\to a-0} f(x) = b$ も同様. また,$a = 0$ のときには $\lim_{x\to 0\pm 0}$ と書かず, $\lim_{x\to\pm 0}$ とかく (複号同順).)

5） $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$ も今までの例と同様に考えれば, 定義することができる.

命題 2.1.11(基本的な極限)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$ $\displaystyle\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}-0}\tan x=+\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty.$ (n は任意の整数.)

2) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2}$ (複号同順).

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0.$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty.$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty.$

(3) 4) の厳密な証明は後々する.)

連続関数

定義 2.1.12

1）I を区間,a を I の点とする.I で定義された関数 f が a で連続であるとは,$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成りたつことである.a が I の端点のときには $\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = f(a)$ となる.

2）区間 I のすべての点で関数 f が連続のとき,f を区間 I 上の連続関数という.

連続関数

定義 2.1.12

1）I を区間,a を I の点とする.I で定義された関数 f が a で連続であるとは,$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成りたつことである.a が I の端点のときには $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = f(a)$ となる.

2）区間 I のすべての点で関数 f が連続のとき,f を区間 I 上の連続関数という.

- 1）は極限の定義から次のように書きなおすことができる：任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ を選ぶと,$|x - a| < \delta$ なるすべての I の点 x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成りたつ.

連続関数

定義 2.1.12

1）I を区間,a を I の点とする.I で定義された関数 f が a で連続であるとは,$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成りたつことである.a が I の端点のときには $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = f(a)$ となる.

2）区間 I のすべての点で関数 f が連続のとき,f を区間 I 上の連続関数という.

- 1）は極限の定義から次のように書きなおすことができる：任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ を選ぶと,$|x - a| < \delta$ なるすべての I の点 x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成りたつ.
- 1）を心のなかでは次のように考える：どんなに小さい $\varepsilon > 0$ に対しても, それに応じて十分小さい $\delta > 0$ をとると,$a - \delta < x < a + \delta$ なら $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ が成りたつ.

2.1.13（コメント）

関数 f が a で連続でない
$\Leftrightarrow$ ある $\varepsilon > 0$ を選ぶと, 任意の $\delta > 0$ に対し,$|x - a| < \delta$ なる数 x で
$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ なるものが存在する.

- 連続の定義より導かれる.
(論理の問題であるから, よく考えればわかると思う.)

連続関数

命題 2.1.14

1）f が a で連続なら,a の近くで f は有界である. 詳しくは, ある $\delta > 0$ をとると,$a - \delta < x < a + \delta$ の範囲で $|f(x)| < |f(a)| + 1$ が成りたつ.
2）f が a で連続で $f(a) \neq 0$ のとき, ある $\delta > 0$ をとると,$|x - a| < \delta$ なる I のすべての点 x に対して $|f(x)| > \dfrac{|f(x)|}{2}$ が成りたつ.

- 証明にジャンプ

命題 2.1.14

1）f が a で連続なら,a の近くで f は有界である. 詳しくは, ある $\delta > 0$ をとると,$a - \delta < x < a + \delta$ の範囲で $|f(x)| < |f(a)| + 1$ が成りたつ.
2）f が a で連続で $f(a) \neq 0$ のとき, ある $\delta > 0$ をとると,$|x - a| < \delta$ なる I のすべての点 x に対して $|f(x)| > \dfrac{|f(x)|}{2}$ が成りたつ.

- 証明にジャンプ

命題 2.1.15

f が a で連続,g が $b = f(a)$ で連続なら, 合成関数 $h(x) = g[f(x)]$ は a で連続である.

- 証明にジャンプ

命題 2.1.16

f と g は a で連続とする.

1） $f \pm g$ は a で連続である.

2） fg は a で連続である.

3） $g(a) \neq 0$ なら a の近くで $g(x)$ は 0 でなく, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は a で連続である.

命題 2.1.16

f と g は a で連続とする.

1） $f \pm g$ は a で連続である.

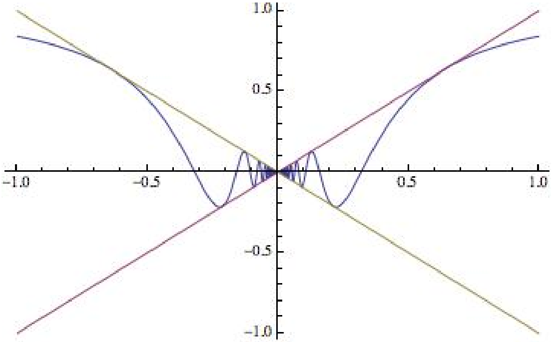
2） fg は a で連続である.

3） $g(a) \neq 0$ なら a の近くで $g(x)$ は 0 でなく, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は a で連続である.

- 連続な関数どうしを加減乗除してできた関数もまた連続であるということである.
  (除算はもちろん分母が 0 にならないときのみ成りたつ.)
- 証明にジャンプ

例 2.1.17

1） $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ は, 実数上で連続

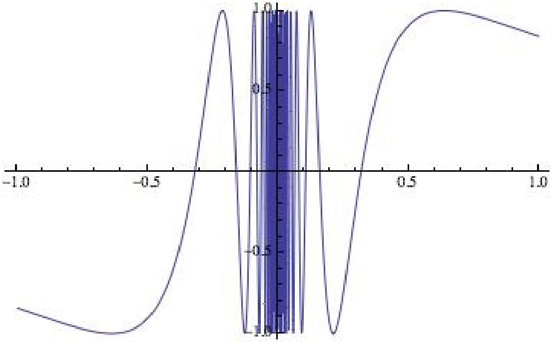


青い曲線が 1）のグラフである.

右上がりの直線は $f(x) = x$, 右下がりの直線は $f(x) = -x$.

例 2.1.17

2） $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ は,$x \neq 0$ で連続,$x = 0$ で不連続



- 証明にジャンプ

1）の証明

　1 は正の数だから, ある $\delta > 0$ をとると,$|x - a| < \delta$ なら, 絶対値の不等式を使って

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < 1$$

が成りたち,$|f(x)| < |f(a)| + 1$ となる. □

1）の証明

1 は正の数だから, ある $\delta > 0$ をとると,$|x - a| < \delta$ なら, 絶対値の不等式を使って

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < 1$$

が成りたち,$|f(x)| < |f(a)| + 1$ となる. □

2）の証明

$\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2} > 0$ に対してある $\delta > 0$ をとると,$|x - a| < \delta$ なら

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成りたつから,$\dfrac{|f(a)|}{2} = |f(a)| - \varepsilon < |f(x)|$ となる. □

1）の証明

1 は正の数だから, ある $\delta > 0$ をとると,$|x-a| < \delta$ なら, 絶対値の不等式を使って

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < 1$$

が成りたち,$|f(x)| < |f(a)| + 1$ となる. □

2）の証明

$\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2} > 0$ に対してある $\delta > 0$ をとると,$|x-a| < \delta$ なら

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成りたつから,$\dfrac{|f(a)|}{2} = |f(a)| - \varepsilon < |f(x)|$ となる. □

- 命題 2.1.14 に戻る

$h(x) = g[f(x)]$ が a で連続であることの証明

　与えられた $\varepsilon > 0$ に対し,g の連続性によってある $\delta > 0$ をとると,$|y - b| < \delta$ なら $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ が成りたつ.
　つぎにこの δ に対し,f の連続性によってある $\gamma > 0$ をとると,$|x - a| < \gamma$ なら $|f(x) - f(a)| < \delta$ が成りたつから,

$$|h(x) - h(a)| = |g[f(x)] - g(b)| < \varepsilon$$

となり,h は a で連続である. □

$h(x) = g[f(x)]$ が a で連続であることの証明

与えられた $\varepsilon > 0$ に対し,g の連続性によってある $\delta > 0$ をとると,$|y - b| < \delta$ なら $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ が成りたつ.
つぎにこの δ に対し,f の連続性によってある $\gamma > 0$ をとると,$|x - a| < \gamma$ なら $|f(x) - f(a)| < \delta$ が成りたつから,

$$|h(x) - h(a)| = |g[f(x)] - g(b)| < \varepsilon$$

となり,h は a で連続である. □

- 命題 2.1.15 に戻る

1） $f \pm g$ の証明はやさしいので, 省略.
(数列のときの証明も参考にするとよい.)

1） $f \pm g$ の証明はやさしいので, 省略.
(数列のときの証明も参考にするとよい.)

2） fg が a で連続であることの証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとし, まず見当をつける. 正の数 M, ε' に対し, $|g(x)|, |f(a)| \le M, |f(x) - f(a)| < \varepsilon', |g(x) - g(a)| < \varepsilon'$ なら,

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)|$$

$$\le |f(x) - f(a)||g(x)| + |f(a)||g(x) - g(a)| < 2M\varepsilon'.$$

1）$f \pm g$ の証明はやさしいので, 省略.
(数列のときの証明も参考にするとよい.)

2）fg が a で連続であることの証明

　$\varepsilon > 0$ が与えられたとし, まず見当をつける. 正の数 M, ε' に対し, $|g(x)|, |f(a)| \leq M, |f(x) - f(a)| < \varepsilon', |g(x) - g(a)| < \varepsilon'$ なら,

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)|$$

$$\leq |f(x) - f(a)||g(x)| + |f(a)||g(x) - g(a)| < 2M\varepsilon'.$$

　そこで, ある $\delta_1 > 0$ をとると, $|x - a| < \delta_1$ なら $|g(x)| < |g(a)| + 1$.
$M = \max\{|g(a)| + 1, |f(a)|\}$ とする.
　ある $\delta_2 > 0$ をとると, $|x - a| < \delta_2$ なら $|f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
　ある $\delta_3 > 0$ をとると, $|x - a| < \delta_3$ なら $|g(x) - g(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
　$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと, $|x - a| < \delta$ なら

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < 2M\varepsilon' = \varepsilon$$

となる. □

3） $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が a で連続であることの証明

（$g(a) \neq 0$ なら a の近くで $g(x)$ が 0 でないということは定理 2.1.14 の 2）からいえる.）

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| &= \left|\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| \\
&= \left|\frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| \\
&\leq \frac{|f(x) - f(a)||g(a)| + |f(a)||g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|}
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき, これを ε より小さくすればよい.

3）$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が a で連続であることの証明

（$g(a) \neq 0$ なら a の近くで $g(x)$ が 0 でないということは定理 2.1.14 の 2）からいえる.）

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| &= \left|\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| \\ &= \left|\frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| \\ &\leq \frac{|f(x) - f(a)||g(a)| + |f(a)||g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|}\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき, これを ε より小さくすればよい.

まず $M = \max\{f(a), g(a)\}$ とおく.

ある $\delta_1 > 0$ をとると,$|x - a| < \delta_1$ なら $|g(x)| > \dfrac{|g(a)|}{2}$ となる.

ある $\delta_2 > 0$ をとると,$|x - a| < \delta_2$ なら

$$|f(x) - f(a)| < \frac{g(a)^2}{4M}\varepsilon, |g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|^2}{4M}\varepsilon$$

となるから,$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと,$|x - a| < \delta_2$ なら

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| < \frac{2}{|g(a)|^2} \cdot 2M \cdot \frac{|g(a)|^2}{4M}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

- 命題 2.1.16 に戻る

1) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ が実数上で連続であることの証明

$x \neq 0$ では,$f(x)$ は $g(x) = \dfrac{1}{x}$ と $h(x) = \sin x$ の合成関数に x を掛けたものだから, 命題 2.1.15 と 2.1.16 により連続.

$x = 0$ では, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすると,$|x - 0| < \delta$ なら $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ が成りたつので, 連続. $\square$

2） $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ が $x = 0$ で不連続であることの証明

($x \neq 0$ においての連続は, 上と同様)

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とする. どんなに小さい $\delta > 0$ に対しても, $\dfrac{1}{\delta}$ より大きい自然数 n をとって $x = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ とすると, $0 < x < \delta$ で, しかも

$$f(x) = \sin 2n\pi + \frac{\pi}{2} = 1$$

だから, $|f(x) - f(0)| = 1 > \dfrac{1}{2} = \varepsilon$ となり, $f(x)$ は 0 で不連続 □

- 例 2.1.17 に戻る