極限・連続関数および微分法の理論と応用
§1 極限の再定義とその威力

新居セミナー

九州大学 理学部 数学科

http://imi.kyushu-u.ac.jp/ ym/

2016 年

数列の極限

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = b$ とは …?

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ とは $\cdots$?

  $\to n$ が限りなく大きくなるとき、a_n は限りなく b に近づくということ.

数列の極限

- $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ とは $\cdots$?

  $\to n$ が限りなく大きくなるとき、a_n は限りなく b に近づくということ.
- 「限りなく」「近づく」とはどういうことか？
  (どれだけ大きくなればよいのか？具体的にどれだけ近づけばよいのか？)

数列の極限

- $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ とは $\cdots$?

  $\to n$ が限りなく大きくなるとき、a_n は限りなく b に近づくということ.

- 「限りなく」「近づく」とはどういうことか？
  (どれだけ大きくなればよいのか？具体的にどれだけ近づけばよいのか？)

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ のような数列の極限は、この定義では扱いにくい.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ とは $\cdots$?

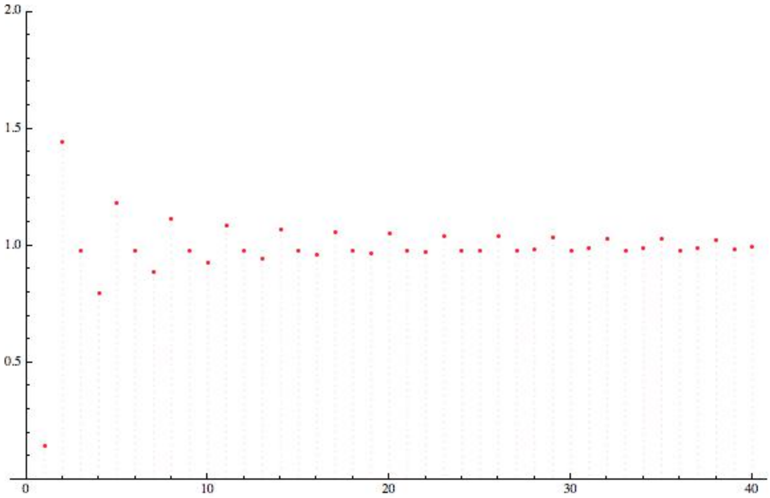
  → n が限りなく大きくなるとき、a_n は限りなく b に近づくということ.

- 「限りなく」「近づく」とはどういうことか？
  (どれだけ大きくなればよいのか？具体的にどれだけ近づけばよいのか？)

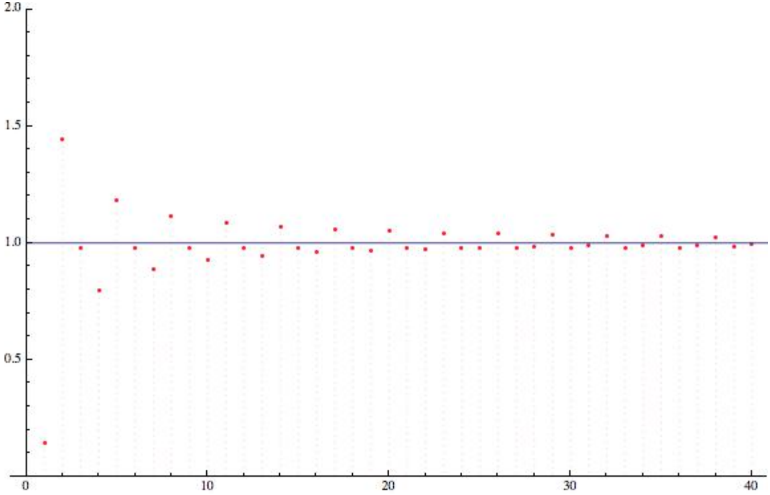
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ のような数列の極限は、この定義では扱いにくい.

  → この定義では不十分！

数列の極限

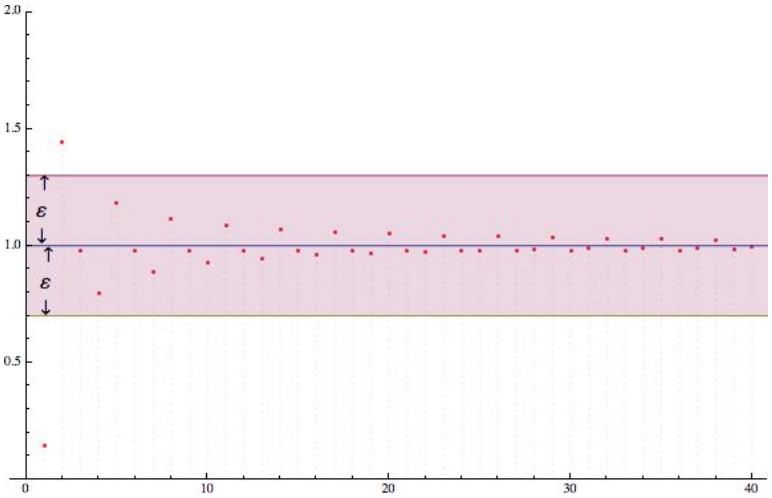


そこで, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ を次のように考える.(上の図では,$b = 1$)



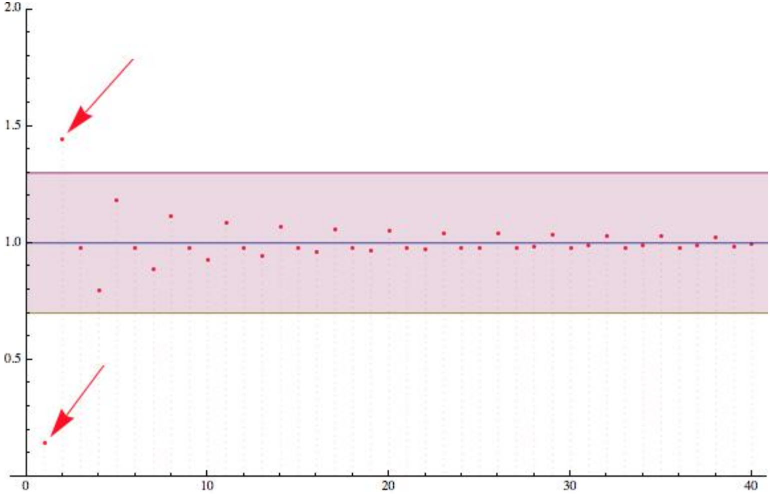
n が限りなく大きくなるとき,a_n は b に限りなく近づくのだから,
$|a_n - b|$ を誤差とみると, それは限りなく 0 に近づく.

数列の極限

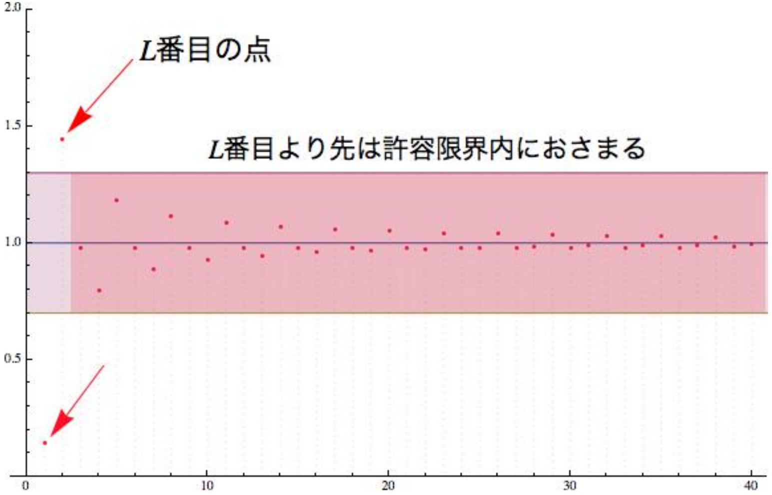


そこで誤差の許容限界として $\varepsilon > 0$ が与えられたとしよう.
(図では,$\varepsilon = 0.3$)$|a_n - b|$ は限りなく 0 に近づくから,
十分先の方の n では $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

数列の極限

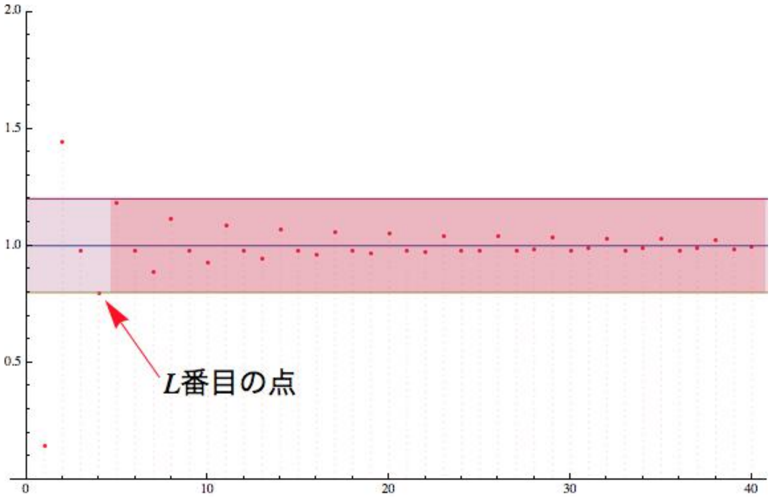


したがって, 限界の外に出るような a_n は有限個しかない.



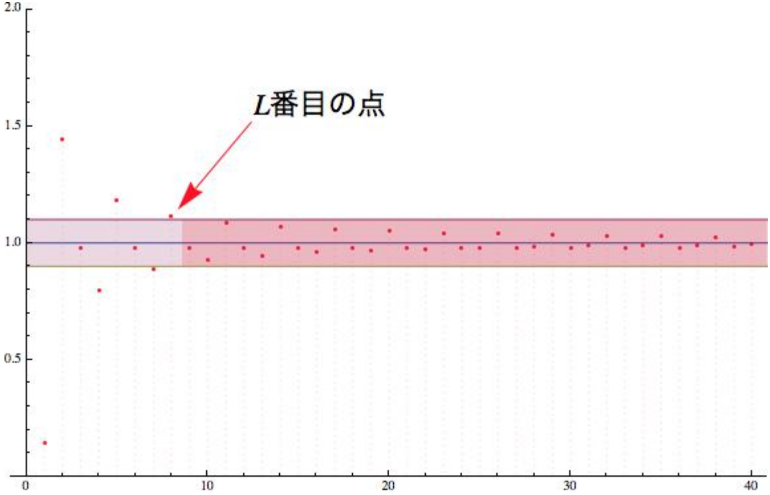
このような n のうち, もっとも大きいものを L とかくと,
L 以下の n については何も分からないが,$L < n$ なら $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

数列の極限



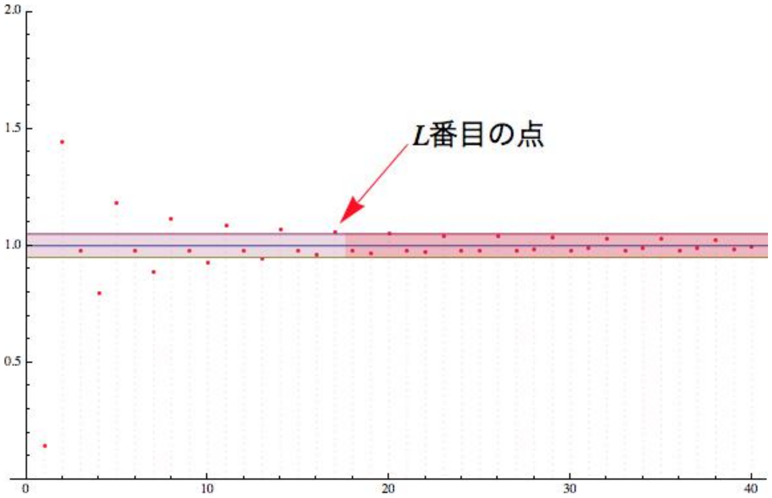
この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば, それより先の n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.(図は $\varepsilon = 0.2$)

数列の極限



この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば, それより先の n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.(図は $\varepsilon = 0.1$)

数列の極限



この許容限界 ε は正でありさえすれば何でもよい. どんなに小さい ε が与えられても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば, それより先の n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.(図は $\varepsilon = 0.05$)

数列の極限

定義 2.1.2

$\lim_{n\to\infty} a_n = b$

$\Leftrightarrow$ 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し, ある番号 L を選ぶと,L より先のすべての番号 n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

数列の極限

定義 2.1.2

$\lim_{n\to\infty} a_n = b$
$\Leftrightarrow$ 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し, ある番号 L を選ぶと,L より先のすべての番号 n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

- 心の中では,ε をどんなに小さくしても, それに応じて L を大きくとれば,L より先の n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ, というように考える.

定義 2.1.2

$\lim_{n\to\infty} a_n = b$
$\Leftrightarrow$ 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し, ある番号 L を選ぶと,L より先のすべての番号 n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ.

- 心の中では,ε をどんなに小さくしても, それに応じて L を大きくとれば,L より先の n に対して $|a_n - b| < \varepsilon$ が成り立つ, というように考える.
- 数列が収束するとは, 上のような b が存在するということ.

定義 2.1.4

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
$\Leftrightarrow$ 任意に与えられた数 M に対し, ある番号 L を選ぶと,L より先の全ての番号 n に対して

$$M < a_n$$

が成り立つ.

数列の極限

定義 2.1.4

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
$\Leftrightarrow$ 任意に与えられた数 M に対し, ある番号 L を選ぶと,L より先の全ての番号 n に対して

$$M < a_n$$

が成り立つ.

- 心の中では,M をどんなに大きくしても, それに応じて L を大きくとれば,L より先の n に対して $M < a_n$ が成り立つ, というように考える.

数列の極限

定義 2.1.4

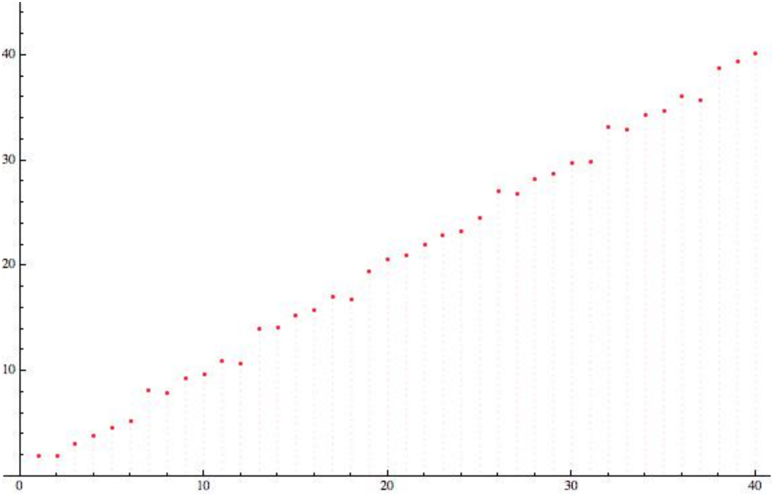
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
$\Leftrightarrow$ 任意に与えられた数 M に対し, ある番号 L を選ぶと,L より先の全ての番号 n に対して

$$M < a_n$$

が成り立つ.

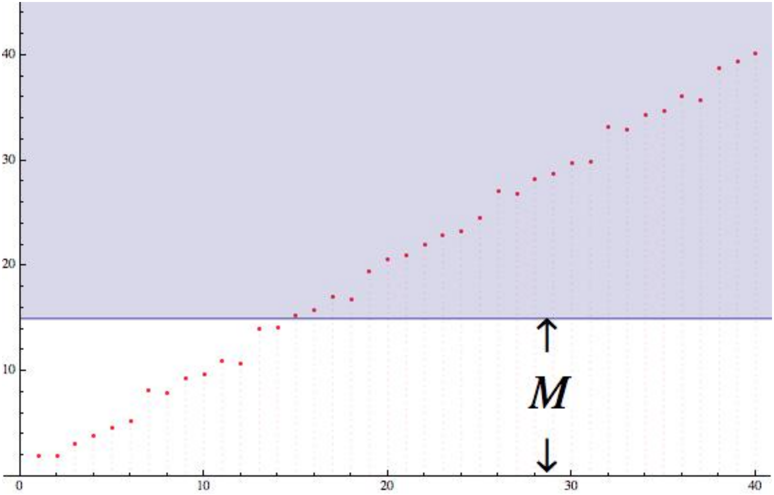
- 心の中では,M をどんなに大きくしても, それに応じて L を大きくとれば,L より先の n に対して $M < a_n$ が成り立つ, というように考える.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ も同様に定義される.
  $(\forall M > 0, \exists L \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > L \Rightarrow a_n < M)$

数列の極限

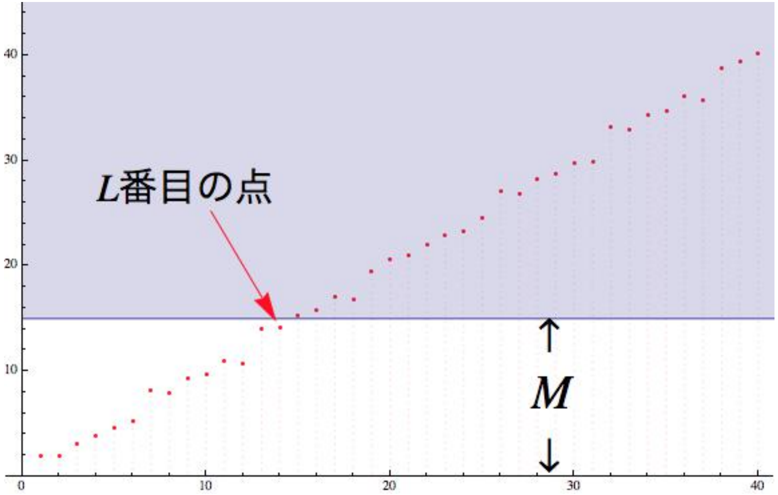


数列 $\{a_n\}$ に対して$\cdots$

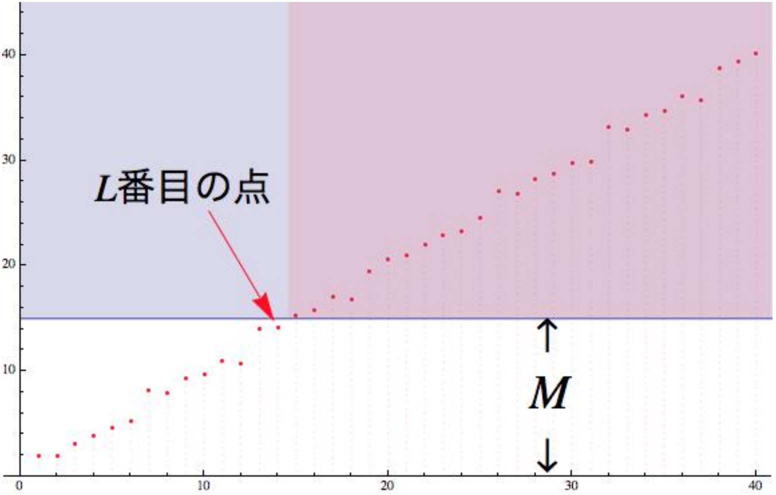
数列の極限



任意の $M>0$(ここでは $M=15$ とする) をとると…

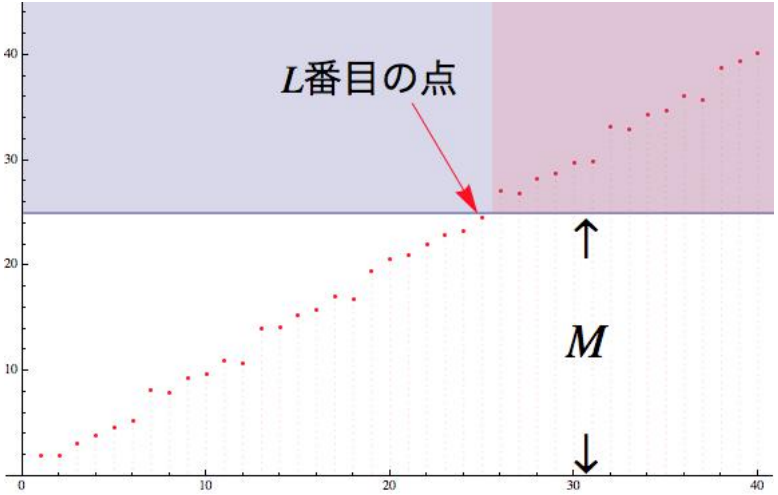


ある L(ここでは $L = 14$) が選べて…



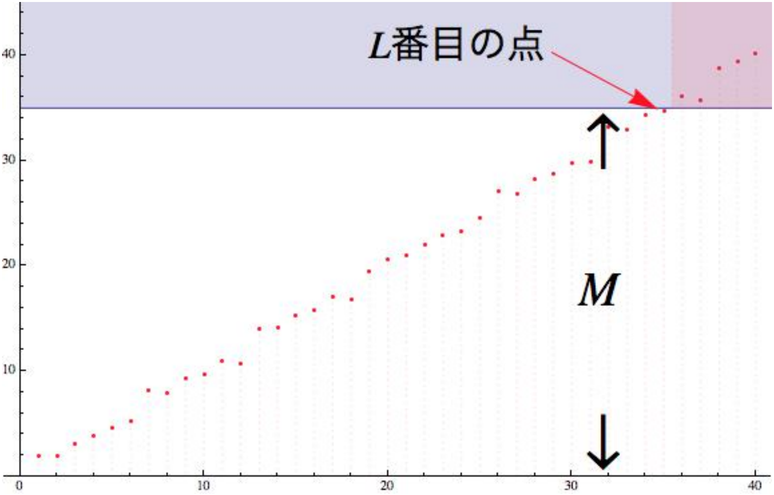
ここから先は全て $a_n > 15$ である.

数列の極限



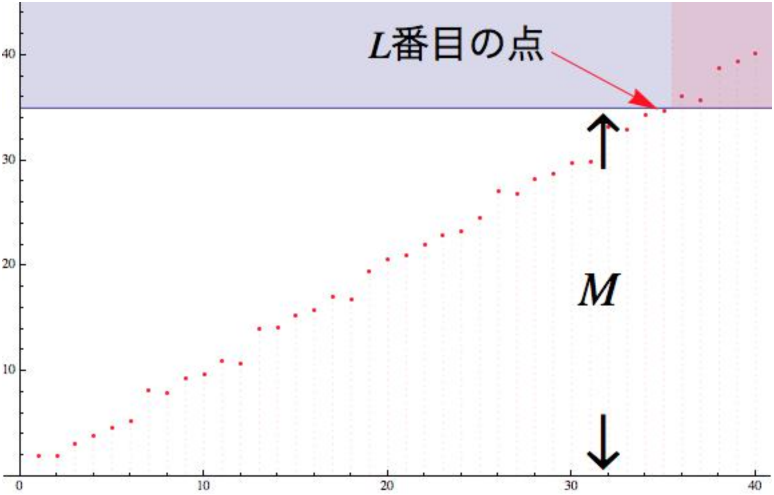
どれだけ大きい M をとっても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば, それより先の n に対して $a_n > M$ が成り立つ.(図は $M = 25$)

数列の極限



どれだけ大きい M をとっても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば, それより先の n に対して $a_n > M$ が成り立つ.(図は $M = 35$)

数列の極限

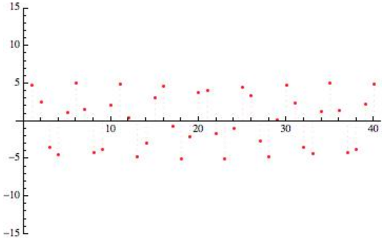


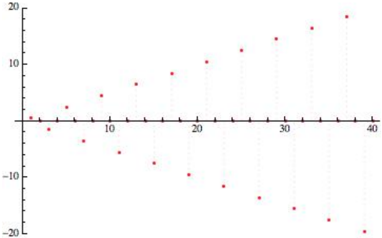
どれだけ大きい M をとっても, それに応じてさらに大きい L をとりなおせば, それより先の n に対して $a_n > M$ が成り立つ.(図は $M = 35$)

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ は,+∞ に発散！

数列の極限

(数列の極限がある値に収束しないが, 正の無限大や負の無限大に発散もしないときは,「振動する」という.)





例 2.1.5

1） $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ のとき,$s_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ とおくと,$\lim_{n\to\infty} s_n = b$.

2） $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

- 詳しい証明は こちら

定義 2.1.6

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が有界
$\Leftrightarrow$ ある数 M をとると, すべての n に対して $|a_n| \leq M$(または $|a_n| < M$).

定義 2.1.6

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が有界
$\Leftrightarrow$ ある数 M をとると, すべての n に対して $|a_n| \leq M$(または $|a_n| < M$).

- すべての a_n がある幅の中に収まるということである.

定義 2.1.6

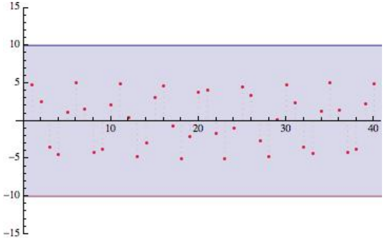
数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が有界
$\Leftrightarrow$ ある数 M をとると, すべての n に対して $|a_n| \leq M$(または $|a_n| < M$).

- すべての a_n がある幅の中に収まるということである.
- $\{a_n\}$ が正の無限大または負の無限大に発散するとき有界でないのは直感的にもわかるし, 定義からもすぐわかる.

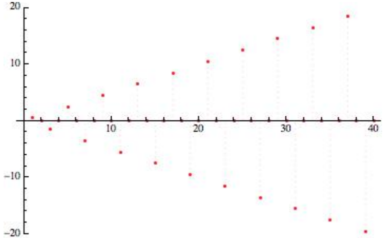
定義 2.1.6

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が有界
$\Leftrightarrow$ ある数 M をとると, すべての n に対して $|a_n| \leq M$(または $|a_n| < M$).

- すべての a_n がある幅の中に収まるということである.
- $\{a_n\}$ が正の無限大または負の無限大に発散するとき有界でないのは直感的にもわかるし, 定義からもすぐわかる.



有界な数列



有界でない数列

命題 2.1.7

1）収束数列は有界である.

2）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$.

3）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ で $\alpha \neq 0$ なら, 十分大きな n に対する a_n は 0 ではない. もっと強く, ある番号 L をとると,L より先の全ての番号 n に対して $|a_n| > \dfrac{|\alpha|}{2}$ が成り立つ.

数列の極限

命題 2.1.7

1）収束数列は有界である.

2）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$.

3）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ で $\alpha \neq 0$ なら, 十分大きな n に対する a_n は 0 ではない. もっと強く, ある番号 L をとると,L より先の全ての番号 n に対して $|a_n| > \dfrac{|\alpha|}{2}$ が成り立つ.

- 3) を大雑把に言うと, 収束する数列の先のほうで数列は極限に非常に近い値をとるから, 極限が 0 でなければ先のほうで 0 はとらないということ (当たり前のことではあるが).
- 詳しい証明は こちら

命題 2.1.8

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.

1） $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$(複号同順).

2） $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

3） $\beta \neq 0$ なら, 十分大きな n に対しては $b_n \neq 0$ で, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

4） $a_n \leq b_n$ なら $\alpha \leq \beta$.ただし,$a_n < b_n$ でも $\alpha < \beta$ とはかぎらない.

5） もうひとつの数列 $\{c_n\}$ があって $a_n \leq c_n \leq b_n$ であり,$\alpha = \beta$ とする. このとき $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha = \beta$(はさみうちの原理).

命題 2.1.8

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$(複号同順).

2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

3) $\beta \neq 0$ なら, 十分大きな n に対しては $b_n \neq 0$ で, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

4) $a_n \leq b_n$ なら $\alpha \leq \beta$.ただし,$a_n < b_n$ でも $\alpha < \beta$ とはかぎらない.

5) もうひとつの数列 $\{c_n\}$ があって $a_n \leq c_n \leq b_n$ であり,$\alpha = \beta$ とする. このとき $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha = \beta$(はさみうちの原理).

- 収束する数列 (重要！) の極限どうしの加減乗除は自由に行うことができる.

数列の極限

命題 2.1.8

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.

1） $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$(複号同順).

2） $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

3） $\beta \neq 0$ なら, 十分大きな n に対しては $b_n \neq 0$ で, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

4） $a_n \leq b_n$ なら $\alpha \leq \beta$.ただし,$a_n < b_n$ でも $\alpha < \beta$ とはかぎらない.

5） もうひとつの数列 $\{c_n\}$ があって $a_n \leq c_n \leq b_n$ であり,$\alpha = \beta$ とする. このとき $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha = \beta$(はさみうちの原理).

- 収束する数列 (重要！) の極限どうしの加減乗除は自由に行うことができる.
- しかし, 発散する数列において, 例えば $(+\infty) - (+\infty) = 0$ のようなことはできない.

  ($a_n = 2n, b_n = n$ のような例で考えるとわかる.)
- 詳しい証明は こちら

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ の証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき,$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ だから,$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ の証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき,$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ だから,$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

また,L_1 を固定すると $\displaystyle\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|$ は定数になるから (有限な数の有限個の和だから.), 十分大きな $L_2 (\geq L_1)$ をとると,$L_2 < n$ なるすべての n に対して $\dfrac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる.

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ の証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき,$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ だから,$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

また,L_1 を固定すると $\displaystyle\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|$ は定数になるから (有限な数の有限個の和だから.), 十分大きな $L_2(\geq L_1)$ をとると,$L_2 < n$ なるすべての n に対して $\dfrac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる.
このとき, 任意の $n(> L_2)$ に対し,

$$|s_n - b| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{L_1} a_k + \sum_{k=L_1+1}^{n} a_k}{n} - \frac{nb}{n} \right|$$

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ の証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき,$\frac{\varepsilon}{2} > 0$ だから,$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

また,L_1 を固定すると $\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|$ は定数になるから (有限な数の有限個の和だから.),

十分大きな $L_2 (\geq L_1)$ をとると,$L_2 < n$ なるすべての n に対して $\frac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ とできる.
このとき, 任意の $n (> L_2)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
|s_n - b| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{L_1} a_k + \sum_{k=L_1+1}^{n} a_k}{n} - \frac{nb}{n} \right| \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} + \frac{\sum_{k=L_1+1}^{n} |a_k - b|}{n}
\end{aligned}
$$

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ の証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき,$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ だから,$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

また,L_1 を固定すると $\displaystyle\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|$ は定数になるから (有限な数の有限個の和だから.),

十分大きな $L_2(\geq L_1)$ をとると,$L_2 < n$ なるすべての n に対して $\dfrac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる.
このとき, 任意の $n(> L_2)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
|s_n - b| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{L_1} a_k + \sum_{k=L_1+1}^{n} a_k}{n} - \frac{nb}{n} \right| \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} + \frac{\sum_{k=L_1+1}^{n} |a_k - b|}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - L_1)\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

1) $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ の証明

$\varepsilon > 0$ が与えられたとき,$\frac{\varepsilon}{2} > 0$ だから,$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ より, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

また,L_1 を固定すると $\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|$ は定数になるから (有限な数の有限個の和だから.),

十分大きな $L_2(\geq L_1)$ をとると,$L_2 < n$ なるすべての n に対して $\frac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ とできる.
このとき, 任意の $n(> L_2)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
|s_n - b| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{L_1} a_k + \sum_{k=L_1+1}^{n} a_k}{n} - \frac{nb}{n} \right| \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{L_1} |a_k - b|}{n} + \frac{\sum_{k=L_1+1}^{n} |a_k - b|}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - L_1)\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

以上より,$\lim_{n\to\infty} s_n = b$ が示された.(定義の通り ε でおさえられた！) □

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明

$n > 1$ のとき, $\sqrt[n]{n} > 1$ より,$\varepsilon > 0$ が与えられたとき, 十分大きな n に対して $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, すなわち $(1+\varepsilon)^n > n$ が成り立てばよい.

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明

$n > 1$ のとき, $\sqrt[n]{n} > 1$ より,$\varepsilon > 0$ が与えられたとき, 十分大きな n に対して $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, すなわち $(1+\varepsilon)^n > n$ が成り立てばよい.

$(1+\varepsilon)^n$ を 2 項定理で展開して第 3 項までとると,

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

であるから,$1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$ となればよい.

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明

$n > 1$ のとき, $\sqrt[n]{n} > 1$ より, $\varepsilon > 0$ が与えられたとき, 十分大きな n に対して $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, すなわち $(1+\varepsilon)^n > n$ が成り立てばよい.

$(1+\varepsilon)^n$ を 2 項定理で展開して第 3 項までとると,

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

であるから, $1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$ となればよい.

これを変形すると, $n > \frac{2}{\varepsilon^2}$ となるから, $L > \frac{2}{\varepsilon^2}$ となる $L \in \mathbb{N}$ をとると, $\forall n > L$ に対して $n > \frac{2}{\varepsilon^2}$,

すなわち $1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$ となり, $(1+\varepsilon)^n > n$ が成り立つ. □

- 例 2.1.5 に 戻る

1) 収束数列は有界であることの証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 1 という正の数に対し, ある番号 L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < 1$ が成り立つから,$|a_n| < |\alpha| + 1$.

1) 収束数列は有界であることの証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 1 という正の数に対し, ある番号 L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < 1$ が成り立つから,$|a_n| < |\alpha| + 1$.

そこで $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_L|, |\alpha| + 1\}$ とおくと, すべての n に対して $|a_n| \leq M$ となる.$\square$

1) 収束数列は有界であることの証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 1 という正の数に対し, ある番号 L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < 1$ が成り立つから,$|a_n| < |\alpha| + 1$.

そこで $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_L|, |\alpha| + 1\}$ とおくと, すべての n に対して $|a_n| \leq M$ となる.□

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ の証明

正の数 ε が与えられたとする. ある L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つから,

$$||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$. □

1) 収束数列は有界であることの証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 1 という正の数に対し, ある番号 L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < 1$ が成り立つから,$|a_n| < |\alpha| + 1$.

そこで $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_L|, |\alpha| + 1\}$ とおくと, すべての n に対して $|a_n| \leq M$ となる.□

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ の証明

正の数 ε が与えられたとする. ある L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つから,

$$||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$. □

3) の証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である. $\frac{|\alpha|}{2}$ は正の数だから, ある番号 L をとると,$L < n$ なるすべての n に対して,

$$\frac{|\alpha|}{2} = |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

より成立する. □

- 命題 2.1.7 に 戻る

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ の証明

正の数 ε が与えられたとする.$\frac{\varepsilon}{2}$ も正の数だから, 仮定によってある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, ある L_2 をとると,$L_2 < n$ なら $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ の証明

正の数 ε が与えられたとする. $\dfrac{\varepsilon}{2}$ も正の数だから, 仮定によってある L_1 をとると, $L_1 < n$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ある L_2 をとると, $L_2 < n$ なら $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

$L = \max\{L_1, L_2\}$ とすると, $L < n$ なら

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \le |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$. □

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ の証明

正の数 ε が与えられたとする. $\dfrac{\varepsilon}{2}$ も正の数だから, 仮定によってある L_1 をとると, $L_1 < n$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ある L_2 をとると, $L_2 < n$ なら $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

$L = \max\{L_1, L_2\}$ とすると, $L < n$ なら

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$. □

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$ の証明

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta| \leq |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta|$ が成り立つ. これを与えられた ε より小さくすればよい.

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ の証明

正の数 ε が与えられたとする. $\dfrac{\varepsilon}{2}$ も正の数だから, 仮定によってある L_1 をとると, $L_1 < n$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ある L_2 をとると, $L_2 < n$ なら $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

$L = \max\{L_1, L_2\}$ とすると, $L < n$ なら

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \le |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$. □

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$ の証明

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta| \le |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta|$ が成り立つ. これを与えられた ε より小さくすればよい.

まず, $\{b_n\}$ も有界だから, ある M_0 が存在して, 全ての n に対して $|b_n| \le M_0$ とできる.

また, $M = \max\{|\alpha|, M_0\}$ とおく. $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ は正の数だから, 仮定によってある番号 L をとると, $L < n$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ が成り立つ.

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ の証明

正の数 ε が与えられたとする. $\dfrac{\varepsilon}{2}$ も正の数だから, 仮定によってある L_1 をとると, $L_1 < n$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ある L_2 をとると, $L_2 < n$ なら $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

$L = \max\{L_1, L_2\}$ とすると, $L < n$ なら

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \le |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$. □

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$ の証明

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta| \le |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta|$ が成り立つ. これを与えられた ε より小さくすればよい.

まず, $\{b_n\}$ も有界だから, ある M_0 が存在して, 全ての n に対して $|b_n| \le M_0$ とできる.

また, $M = \max\{|\alpha|, M_0\}$ とおく. $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ は正の数だから, 仮定によってある番号 L をとると, $L < n$ なら $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ が成り立つ.

よって

$$|a_n b_n - \alpha\beta| \le |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

□

3) の証明

命題 2.1.7 の 3) により, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|b_n| > \dfrac{|\beta|}{2}$ となる. また, 命題 2.1.7 の 1) により, ある M をとると $|a_n|, |b_n|, |\alpha|, |\beta|$ はすべて M 以下になる. 試みに計算すると,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{b_n} + \frac{\alpha}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \frac{|a_n - \alpha|}{|b_n|} + \frac{|\alpha||\beta - b_n|}{|b_n \beta|} \\
&= \frac{1}{|b_n||\beta|}[|\beta||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta|] \\
&\leq \frac{2M}{|\beta|^2}[|a_n - \alpha| + |b_n - \beta|]
\end{aligned}
$$

3) の証明

命題 2.1.7 の 3) により, ある L_1 をとると,$L_1 < n$ なら $|b_n| > \dfrac{|\beta|}{2}$ となる. また, 命題 2.1.7 の 1) により, ある M をとると $|a_n|, |b_n|, |\alpha|, |\beta|$ はすべて M 以下になる. 試みに計算すると,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{b_n} + \frac{\alpha}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \frac{|a_n - \alpha|}{|b_n|} + \frac{|\alpha||\beta - b_n|}{|b_n\beta|} \\ &= \frac{1}{|b_n||\beta|}[|\beta||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta|] \\ &\leq \frac{2M}{|\beta|^2}[|a_n - \alpha| + |b_n - \beta|]\end{aligned}$$

ここで,$\dfrac{|\beta|^2}{4M}\varepsilon$ は正の数だから,L_1 より大きなある L_2 を選ぶと,$L_2 < n$ なる n に対して $|a_n - \alpha| < \dfrac{|\beta|^2}{4M}\varepsilon, |b_n - \beta| < \dfrac{|\beta|^2}{4M}\varepsilon$ が成り立つ. そうすると,$L_2 < n$ なる n に対し,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| < \frac{2M}{|\beta|^2}\left[\frac{|\beta|^2}{4M}\varepsilon + \frac{|\beta|^2}{4M}\varepsilon\right] = \varepsilon$$

となって結果が成り立つ. □

4) の証明

背理法を用いる. $\alpha > \beta$ と仮定し, $\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ とおくと, $\varepsilon > 0$ だから, ある番号 L をとると, $L < n$ なら $a_n > \alpha - \varepsilon$, $b_n < \beta + \varepsilon$ が成りたつ. $a_n - b_n > (\alpha - \varepsilon) - (\beta + \varepsilon) = \alpha - \beta - 2\varepsilon = 0$ となり, $a_n \leq b_n$ に反する.

つぎに $a_n = 0, b_n = \dfrac{1}{n}$ とすると, $a_n < b_n$ だが, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ となる. □

4) の証明

背理法を用いる.$\alpha > \beta$ と仮定し,$\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ とおくと,$\varepsilon > 0$ だから, ある番号 L をとると,$L < n$ なら $a_n > \alpha - \varepsilon$, $b_n < \beta + \varepsilon$ が成りたつ.$a_n - b_n > (\alpha - \varepsilon) - (\beta + \varepsilon) = \alpha - \beta - 2\varepsilon = 0$ となり,$a_n \leq b_n$ に反する.

つぎに $a_n = 0, b_n = \dfrac{1}{n}$ とすると,$a_n < b_n$ だが,$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ となる. □

5) の証明

与えられた正の数 ε に対し, ある番号 L をとると,$L < n$ なら $\alpha - \varepsilon < a_n, b_n < \alpha + \varepsilon$ が成り立つ.$a_n \leq c_n \leq b_n$ だから $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ となる. □

- 命題 2.1.8 に 戻る