非線形数理秋の学校「パターン形成の数理とその周辺」
－反応拡散方程式理論による時・空間パターンの解析を中心に－
2007年9月25日－27日

モデル方程式を通してみるパターン解析
― 進行波からヘリカル波の分岐を例として ―

池田　勉　（龍谷大学理工学部）

講義概要，講義資料，講義中に使用するC言語プログラムと初期値データ，ヘリカル波のアニメーションをウェブで公開しています：http://www.math.ryukoku.ac.jp/~tsutomu/autumnsclool07.html

分岐解析による研究（最近10年多かった？）

問題に現れる定数のうち，いくつかを固定されたものではなく，その値を変化させることができるパラメータと考える（分岐パラメータ）

例：　つぎの微分方程式の定常解を求めなさい：　$\dfrac{dx}{dt} = ax - x^3$　(a: 実定数)

1．常微分方程式や偏微分方程式の定常解の数が変わり，安定性も変わる．

2．常微分方程式や偏微分方程式の定常解から振動解が分岐してくる．安定性も変わる．

3．偏微分方程式の進行波解（一定の形状を保って一定速度で進む解）から振動解が分岐してくる．安定性も変わる．

4．・・・

5．・・・

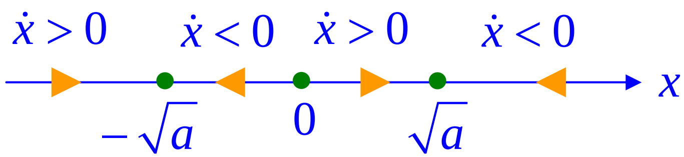
Pitchfork 分岐（定常解の数の変化）の例1

つぎの微分方程式の定常解をすべて求めなさい：

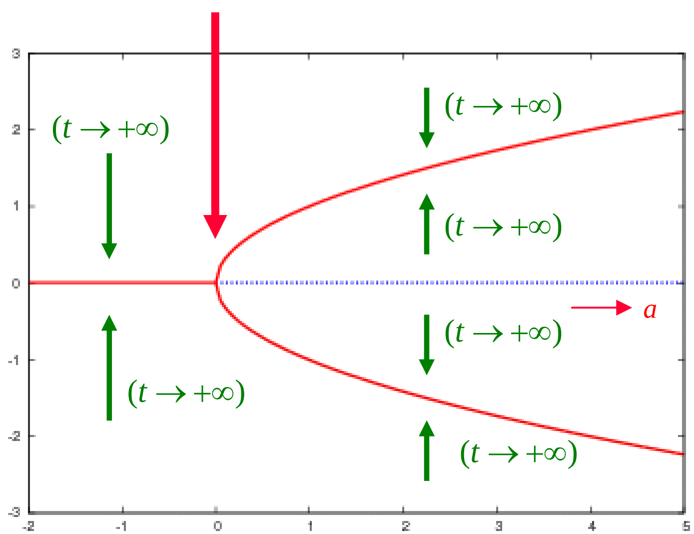
$$\dot{x} = ax - x^3 \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt},\ a\text{: 実定数} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} a \le 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ a > 0 & \Rightarrow & x = 0,\ x = \pm\sqrt{a} \end{array}}$$

$a > 0$



分岐



線形化方程式　$\dot{x} = ax$

線形化方程式の係数行列 a の

固有値 $\lambda = a$

線形化方程式の係数行列の固有値が
原点を通過するときに分岐が起きた

Hopf 分岐（定常解から振動解が分岐）の例1

つぎの微分方程式の解の $t \to +\infty$ における挙動を調べなさい

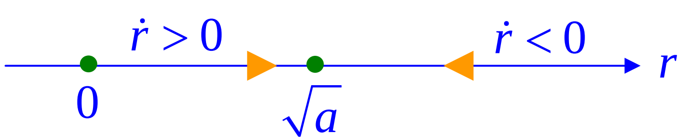
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y - (x-y)(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + ay - (x+y)(x^2+y^2) \end{cases} \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt},\ a\text{: 実定数} \right)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ とおく． $r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = ar\cos\theta - r\sin\theta - (\cos\theta - \sin\theta)r^3 \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = r\cos\theta + ar\sin\theta - (\cos\theta + \sin\theta)r^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = ar - r^3 \\ r\dot{\theta} = r - r^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{r} = ar - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 - r^2 \end{cases}}$$

$a > 0$

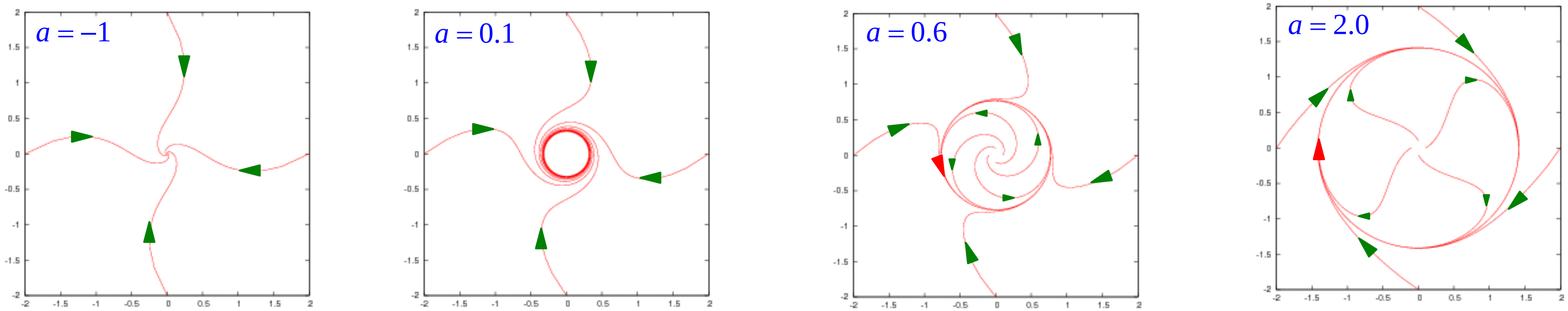


$$a \le 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) \to 0, \quad \big(x(t), y(t)\big) \to \big(0, 0\big) \qquad (t \to +\infty)$$

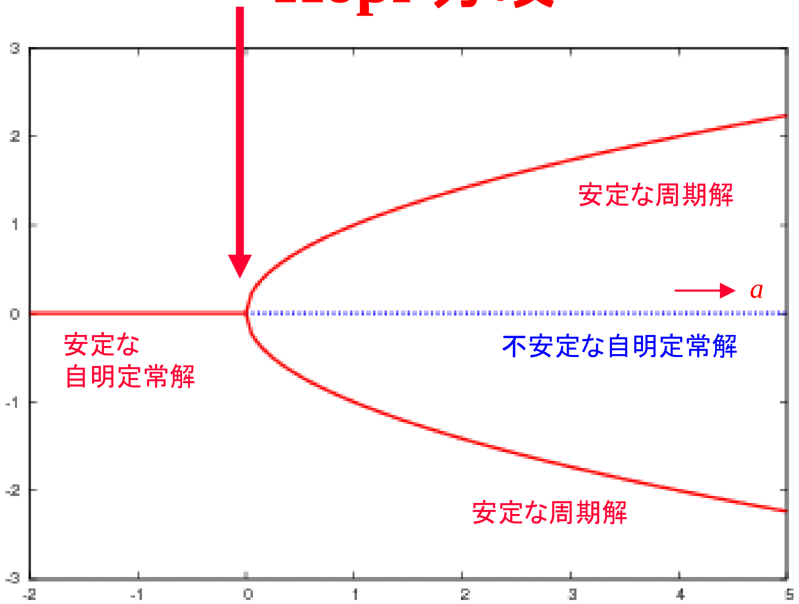
$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) \to \sqrt{a}, \quad \dot{\theta}(t) \to 1 - a,$$

$$\big(x(t), y(t)\big) \to \Big(\sqrt{a}\cos((1-a)t + \beta), \sqrt{a}\sin((1-a)t + \beta)\Big) \qquad (t \to +\infty)$$

Hopf 分岐の例1（続き）



Hopf 分岐



線形化方程式 $\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases}$

線形化方程式の係数行列 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

の固有値 $\lambda = a \pm i \qquad (i = \sqrt{-1})$

線形化方程式の係数行列の固有値のペアが虚軸をよぎる通過ときに分岐が起きた

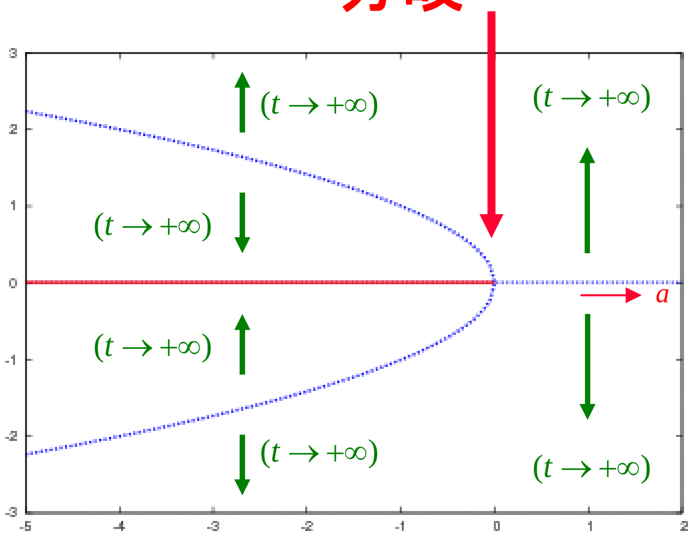
Pitchfork 分岐の例2

つぎの微分方程式の定常解をすべて求めなさい：

$$\dot{x} = ax + x^3 \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt},\ a\text{: 実定数} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} a \le 0 & \Rightarrow & x = 0,\ x = \pm\sqrt{-a} \\ a > 0 & \Rightarrow & x = 0 \end{array}}$$

分岐



・分岐点における線形化方程式の係数行列の固有値は例1の時と同じ
・分岐の方向を決めるにはより詳細な情報が必要となる

Hopf 分岐の例2

つぎの微分方程式の解の挙動を調べなさい

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y + (x-y)(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + ay + (x+y)(x^2+y^2) \end{cases}$$

・分岐点における線形化方程式の係数行列の固有値は例1の時と同じ
・分岐の方向を決めるにはより詳細な情報が必要となる

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ とおく. $r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$

$$\begin{cases} \dot{r} = ar + r^3 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$$

Hopf 分岐

$a \le 0 \quad \Rightarrow$

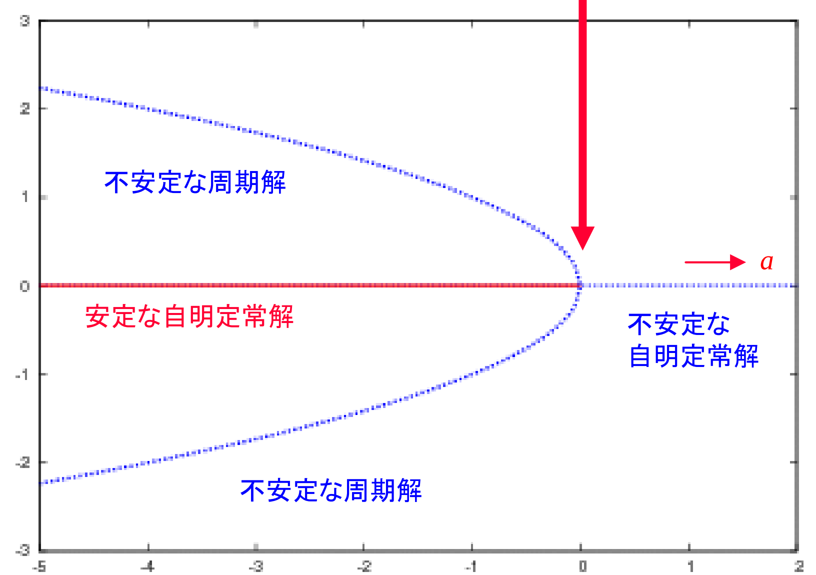
$(0,0)$ は安定な定常解,

$\left(\sqrt{-a}\cos((1-a)t+\beta), \sqrt{-a}\sin((1-a)t+\beta)\right)$

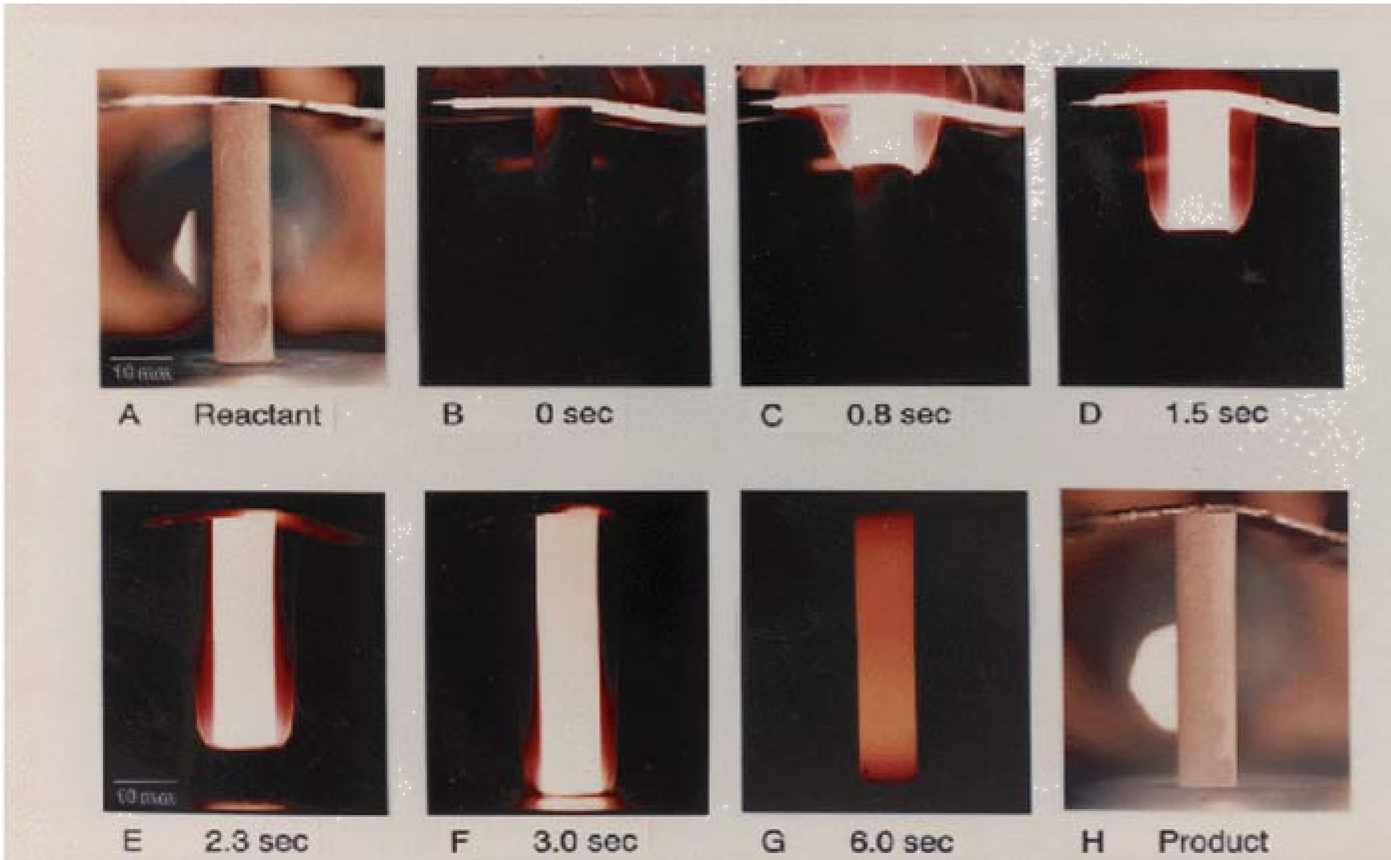
は不安定な周期解

$a > 0 \quad \Rightarrow$

$(0,0)$ は不安定な定常解



燃焼合成反応とは？　ヘリカル波とは？



（実験の写真）

燃焼合成反応とは？　ヘリカル波とは？

Experiment

$Ti + Ni \rightarrow TiNi$

さまざまな燃焼波（燃焼形態）

定常燃焼波（進行波，traveling wave）

形状一定，伝播速度一定

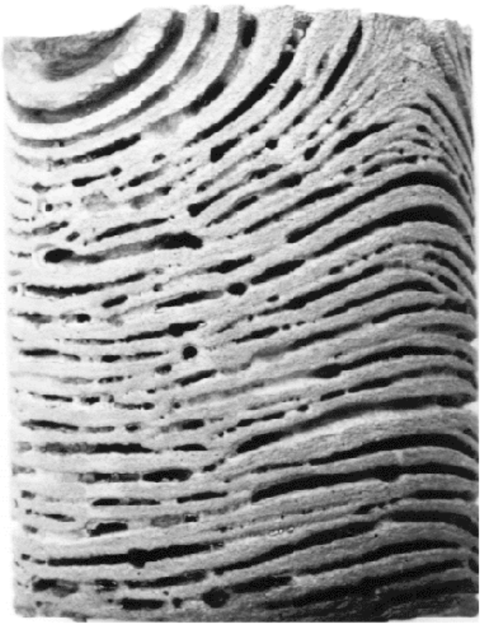
脈動燃焼波（脈動進行波，pulsating wave）

伝播速度が振動

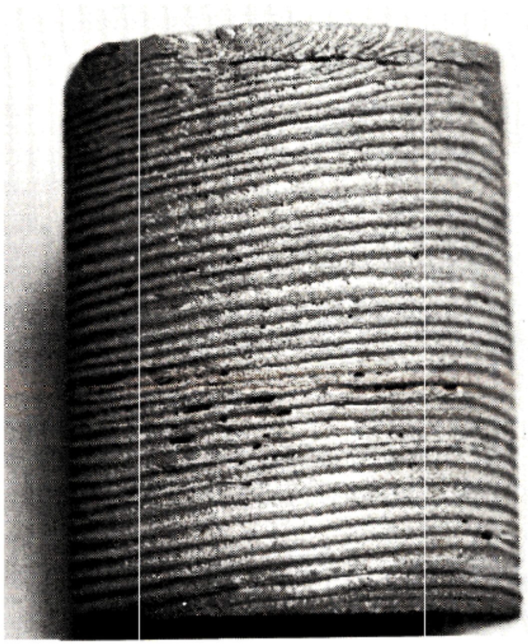
ヘリカル燃焼波（helical wave）

反応点が円柱表面をくるくる回る

ヘリカル燃焼の痕跡



ランダムな
ヘリカル燃焼の痕跡



規則的な
ヘリカル燃焼の痕跡

燃焼合成反応の数理モデル方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + vf(u;E_{\mathrm{app}})$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vf(u;E_{\mathrm{app}})$$

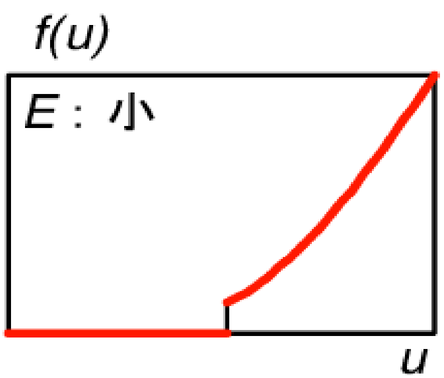
$t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$

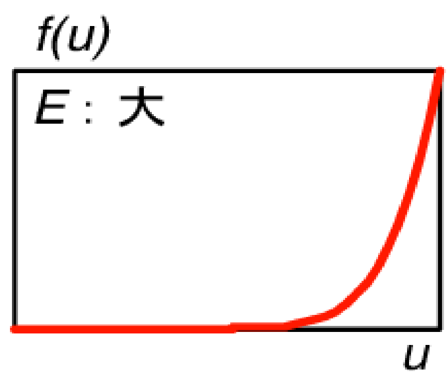
Ω: ３次元円柱領域
　（半径 R; no-flux 境界条件）
$u = u(t, \mathbf{x})$: 無次元化された温度
$v = v(t, \mathbf{x})$: 無次元化された原料密度

E_{app}: 見かけの活性化エネルギー

$$f(u;E_{\mathrm{app}}) = \begin{cases} 0 & (u < u_{\mathrm{ig}}) \\ \exp\left(\dfrac{-E_{\mathrm{app}}}{u + u_0}\right) & (u > u_{\mathrm{ig}}) \end{cases}$$

E_{app}: 小 $\Rightarrow$ 反応しやすい
$\Rightarrow$ $f(u;E_{\mathrm{app}})$: 大



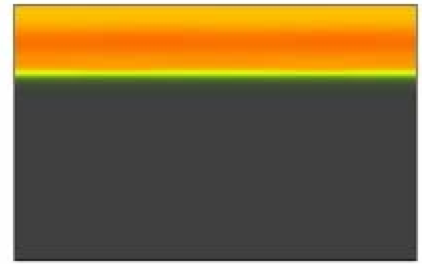


E_{app}: 大 $\Rightarrow$ 反応しにくい
$\Rightarrow$ $f(u;E_{\mathrm{app}})$: 小

燃焼合成反応の数値シミュレーション

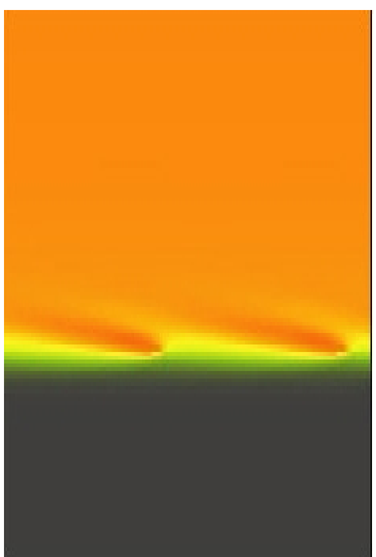
円柱表面上
の温度分布

E_{app}: 小（定常燃焼波）



円柱表面上
の温度分布

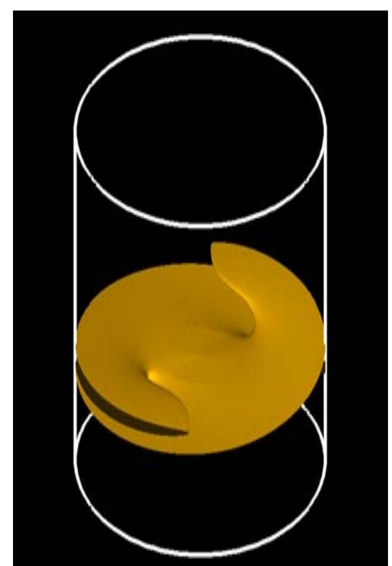
E_{app}: 中（脈動燃焼波）



E_{app}: 中や大

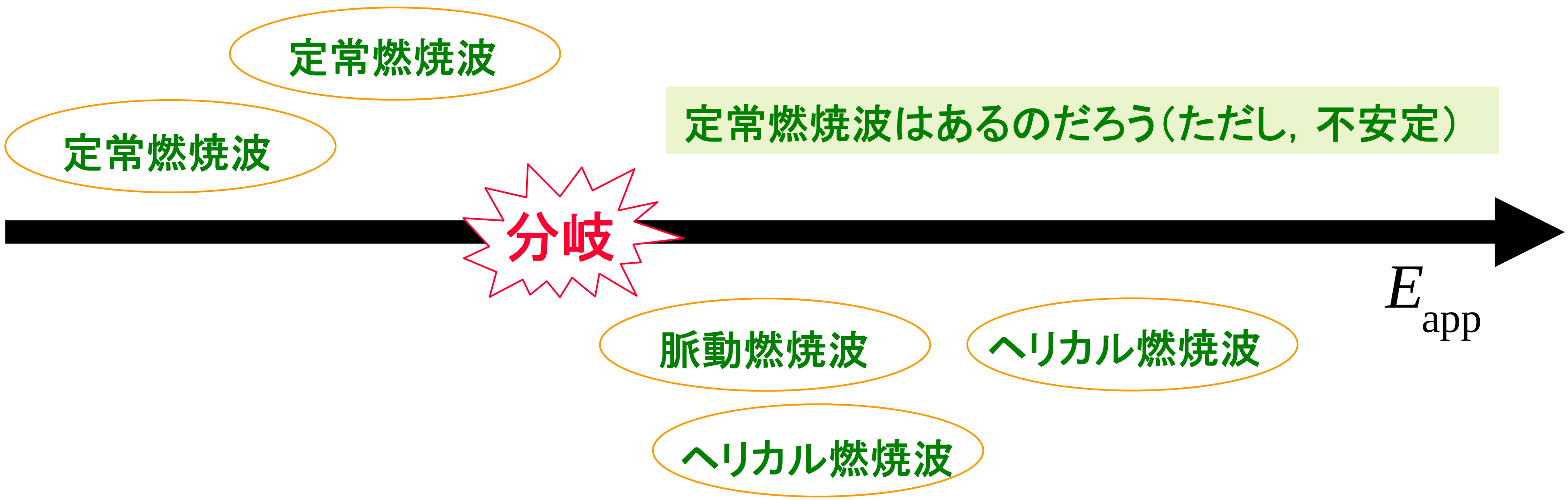
（ヘリカル燃焼波）

円柱表面上
の温度分布



円柱内部で
の等温度面

燃焼形態の変化と分岐現象



定常燃焼波が揺れはじめて脈動燃焼波が現れるのだろう

分　岐　現　象

では，ヘリカル燃焼波の起源はなにか？

脈動燃焼波から分岐してくるのか（定常燃焼波＞ 脈動燃焼波 ＞ ヘリカル燃焼波）
定常燃焼波から直接分岐してくるのか（定常燃焼波 ＞ ヘリカル燃焼波）
それとも，第3の経路があるのか？

ヘリカル波はどんなところに現れる？

実験による観測では

燃焼合成反応

高分子の重合反応における先端部の成長

数値シミュレーションでは

燃焼合成反応の数値シミュレーション

自己触媒反応の数値シミュレーション

もっと簡単な反応拡散系の数値シミュレーション

（経験則）
空間1次元問題で脈動進行波が現れると，空間2次元問題（帯領域・周期境界条件）や3次元問題ではヘリカル波が現れる
逆も真

ヘリカル波が現れる数理モデル方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + vf(u;\mu), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -vf(u;\mu) \qquad t>0, \ \ \mathbf{x}\in\Omega$$

自己触媒反応 $\quad f(u;m) = u^m$

$m=7$ **なら進行波解のみ,** $m=8,\ 9$ **なら脈動進行波解やヘリカル波も**

もっと簡単な反応拡散系 $\quad (0<\delta<<1:$ **定数**, $0<u_{\mathrm{ig}}<1:$ **パラメータ**)

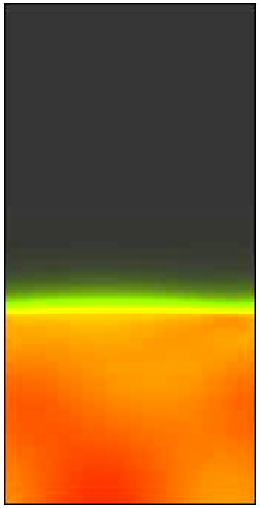
$$f(u;u_{\mathrm{ig}}) = \frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{u-u_{\mathrm{ig}}}{\delta}\right)$$

$$f(u;u_{\mathrm{ig}}) = \begin{cases} 0 & (u<u_{\mathrm{ig}}) \\ 1 & (u>u_{\mathrm{ig}}) \end{cases}$$

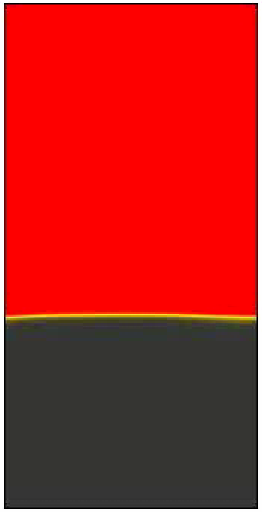
u_{ig}:**小 なら進行波解のみ,**

u_{ig}:**中または大 なら**

脈動進行波解やヘリカル波も



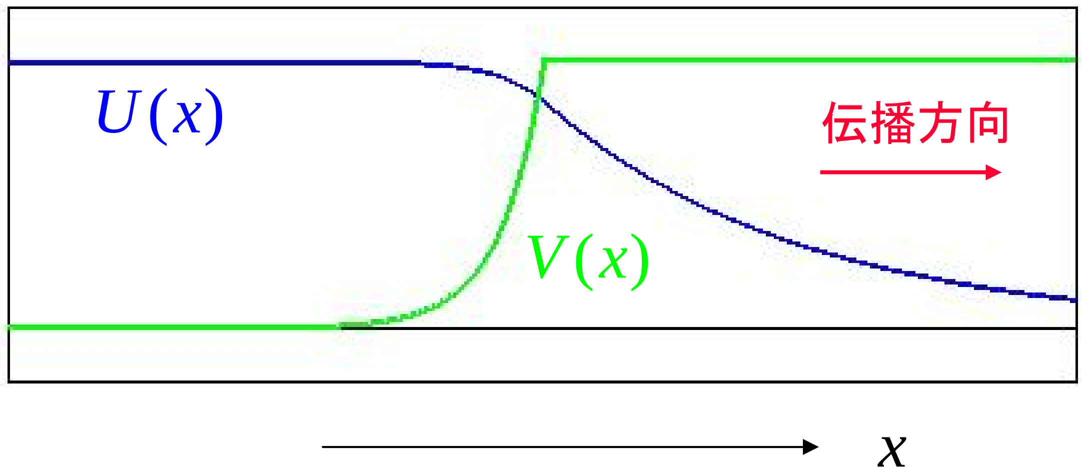
Distribution of *u*



Distribution of *v*

数理解析で行ったこと･･･（ステップ関数を用いて）

(1) 進行波解の構成



(2) 線形化固有値問題の導出

(3) 重要な固有値の摘出 (u_{ig}: 分岐パラメータ)

(4) 重要な固有値の振る舞いの調査

重要な固有値(その1)

摂動の波数を k とする：

空間２次元帯領域の場合

$k = 2\pi n / L \ (n = 0, 1, \cdots)$　（L: 帯幅）

空間３次元円柱領域の場合（省略）

１． 摂動の波数 $k = 0$ とする. このとき，３つの重要な固有値が存在する：

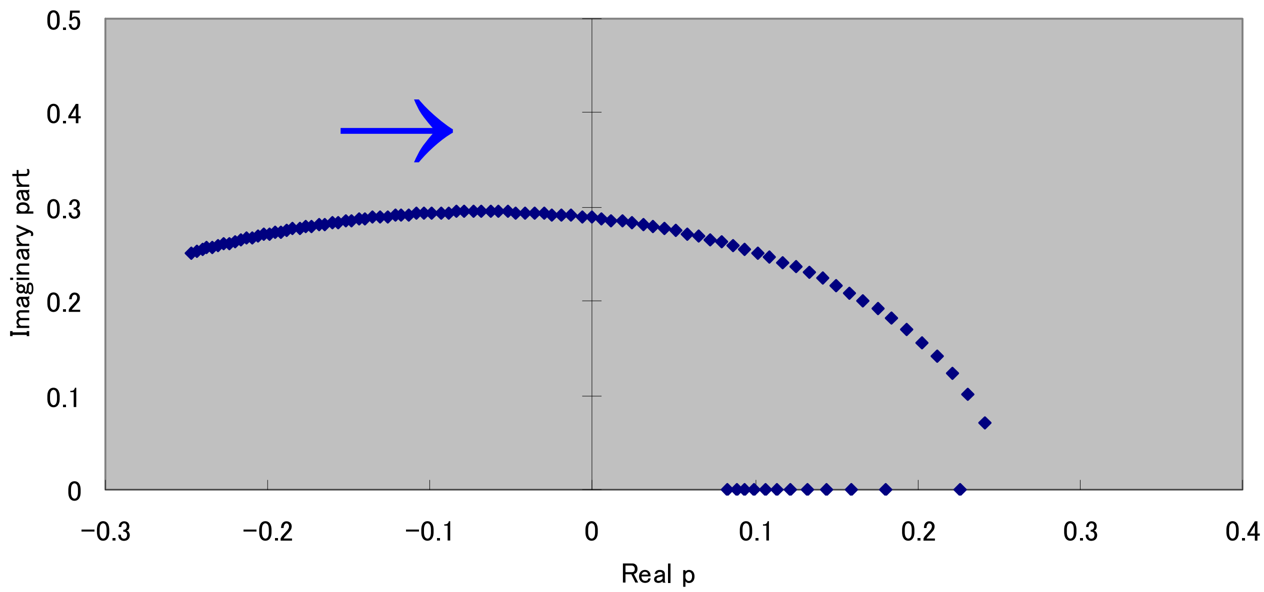
複素共役な固有値のペア,

自明な 0 固有値 ⇔ 進行波の平行移動に関する自由度

複素共役な固有値の実部は, u_{ig} が小さいときは負であるが，u_{ig} とともに増加し，$u_{ig} = u^{\mathrm{Hopf}}(0)$ のとき

虚軸を横断的に横切る.

Movement of eigenvalue (k = 0)

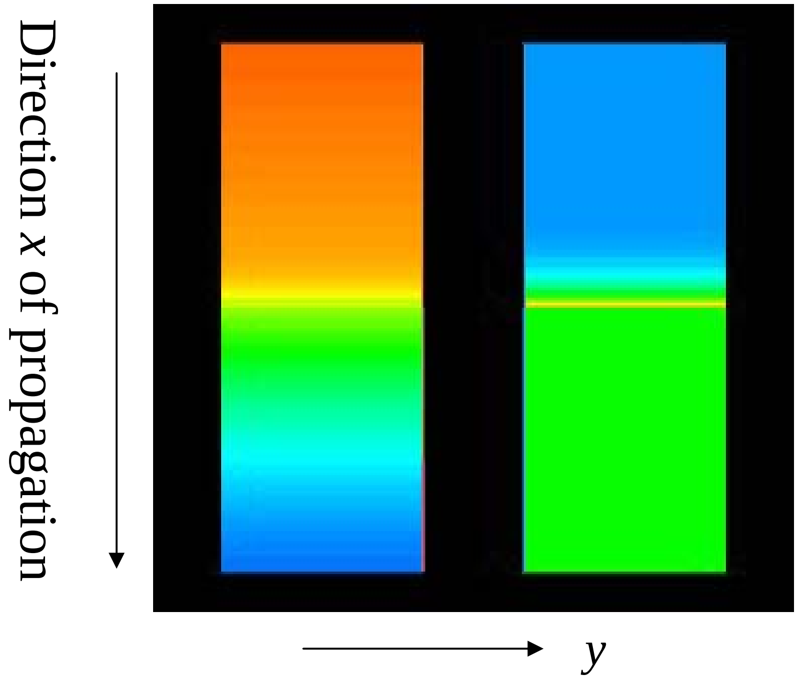


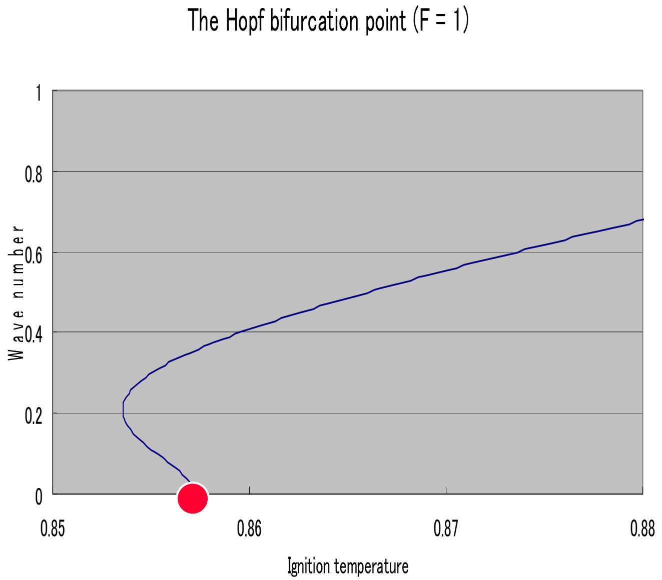
脈動進行波の発生

どんな振動解があらわれるのか？（$k = 0$）

(進行波解) + (線形化方程式の解)

Distribution of
$u(t, x, y)$ (left) and $v(t, x, y)$ (right)
(moving coordinate)





$k = 0$

重要な固有値(その2)

２． 摂動の波数 $k>0$ とする. このときも， ３つの重要な固有値が存在する：

複素共役な固有値のペア,

自明な 0 固有値 $\Leftrightarrow$ 進行波の平行移動に関する自由度

複素共役な固有値の実部は, u_{ig} が小さいときは負であるが， u_{ig} とともに増加し, $u_{\mathrm{ig}}=u^{\mathrm{Hopf}}(k)$ のとき虚軸を横断的に横切る.

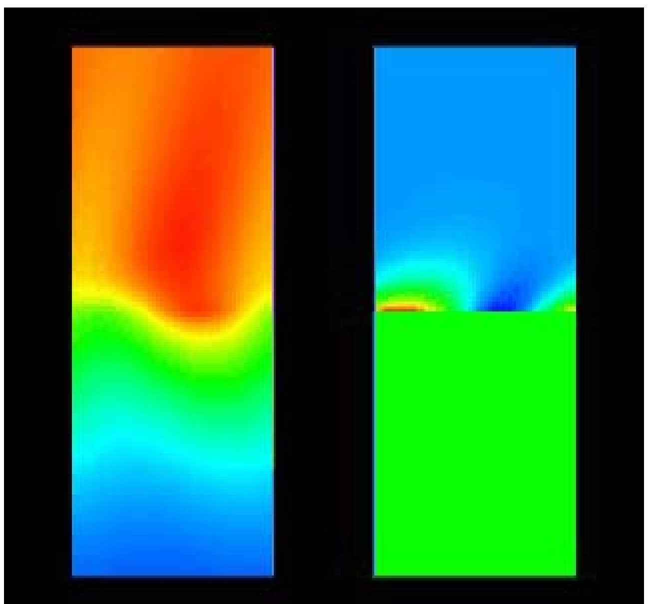
振動解の発生　　しかし，分岐してくる振動解はどのように振動するの？

どんな振動解があらわれるのか？（$k > 0$）

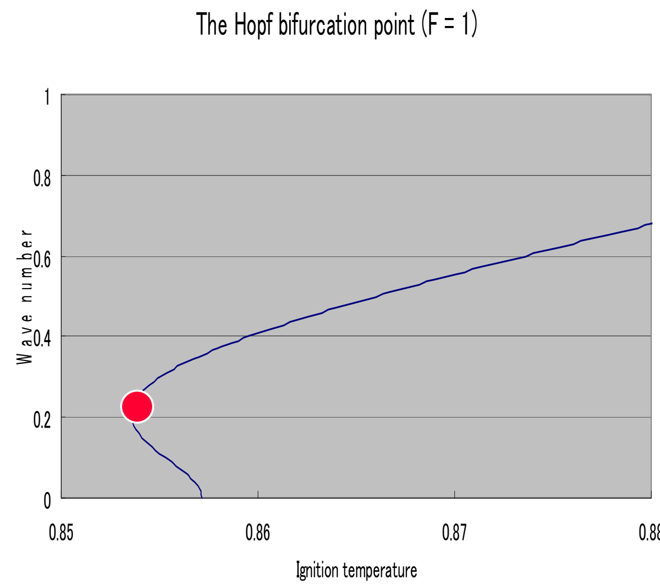
(進行波解) + (線形化方程式の解)

Distribution of
$u(t, x, y)$ (left) and $v(t, x, y)$ (right)
(moving coordinate)

Direction x of propagation



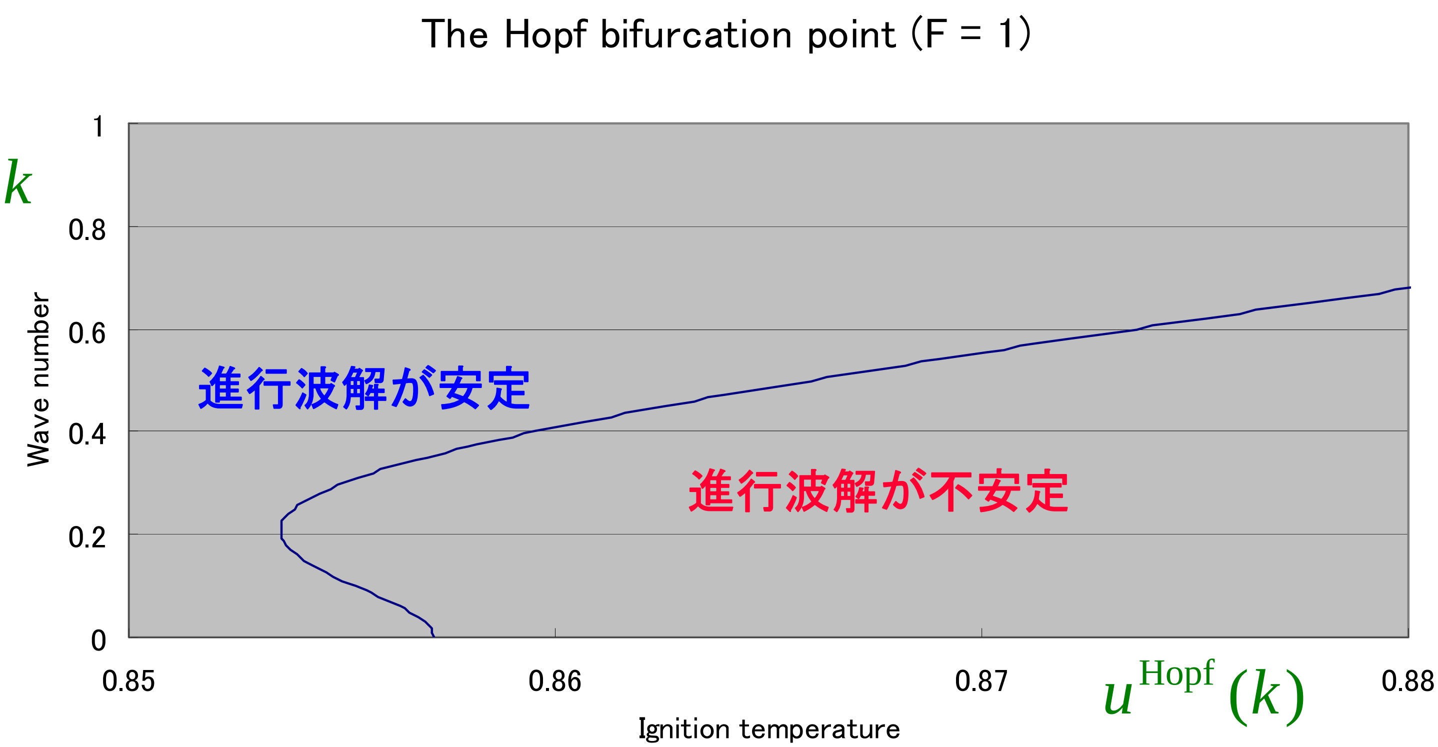
y



$k > 0$

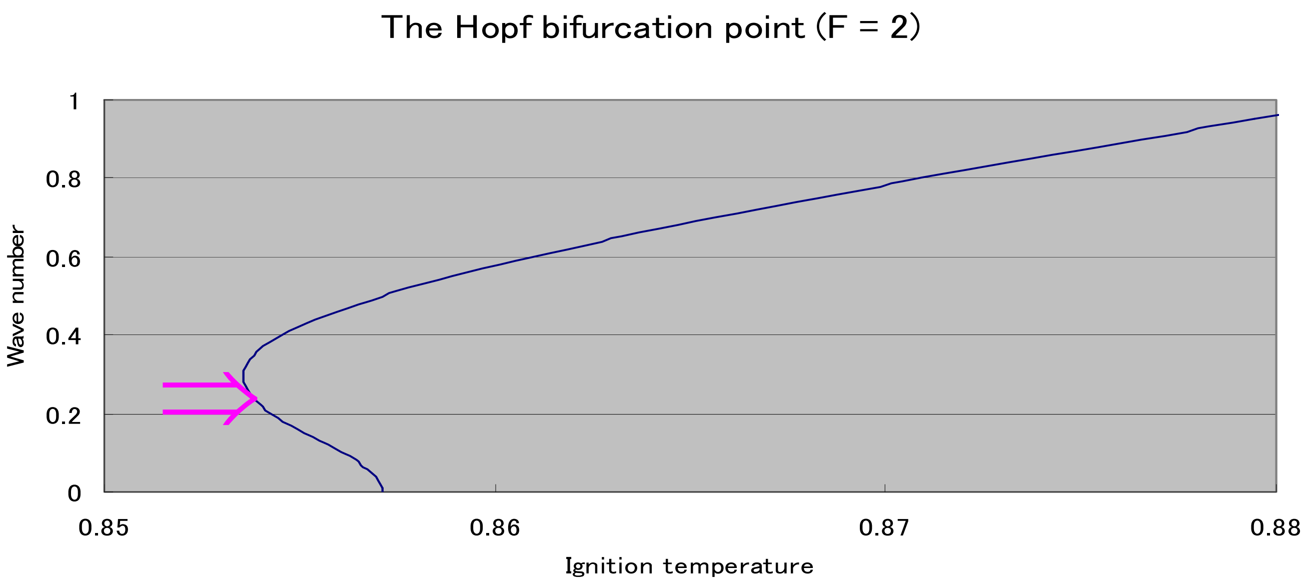
Hopf 分岐点の振る舞い(これが大事)

$u^{\mathrm{Hopf}}(k)$ はその最小値をある $k>0$ でとる.



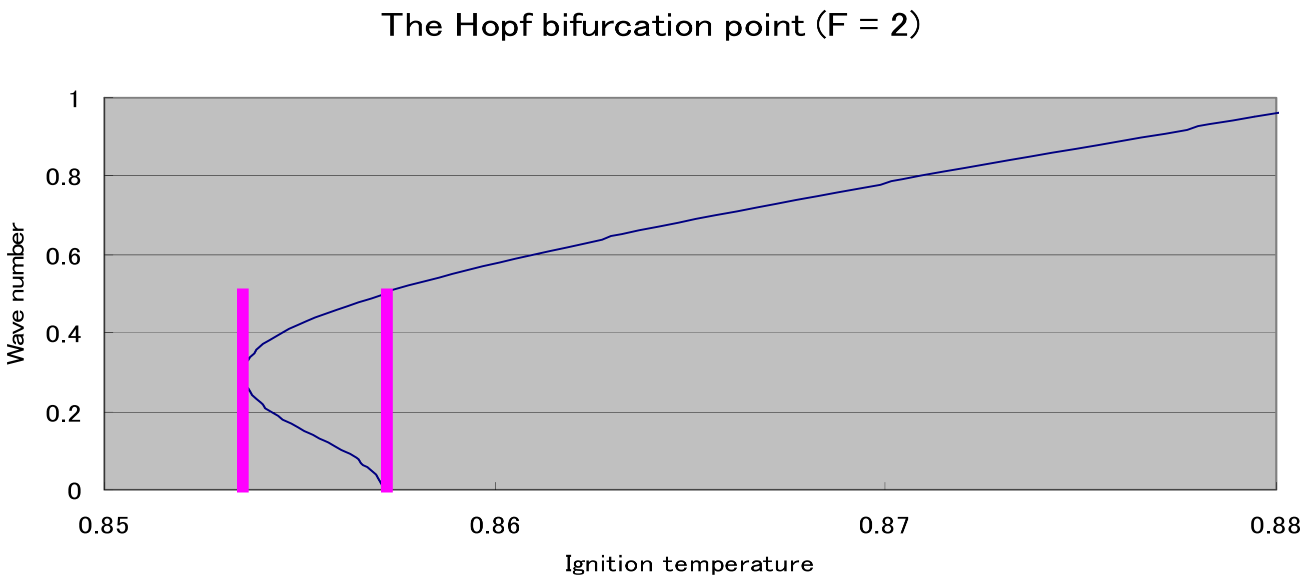
Wave bifurcation（小川知之先生）の典型例

結論



1. 安定なヘリカル波が進行波から直接分岐し得る.

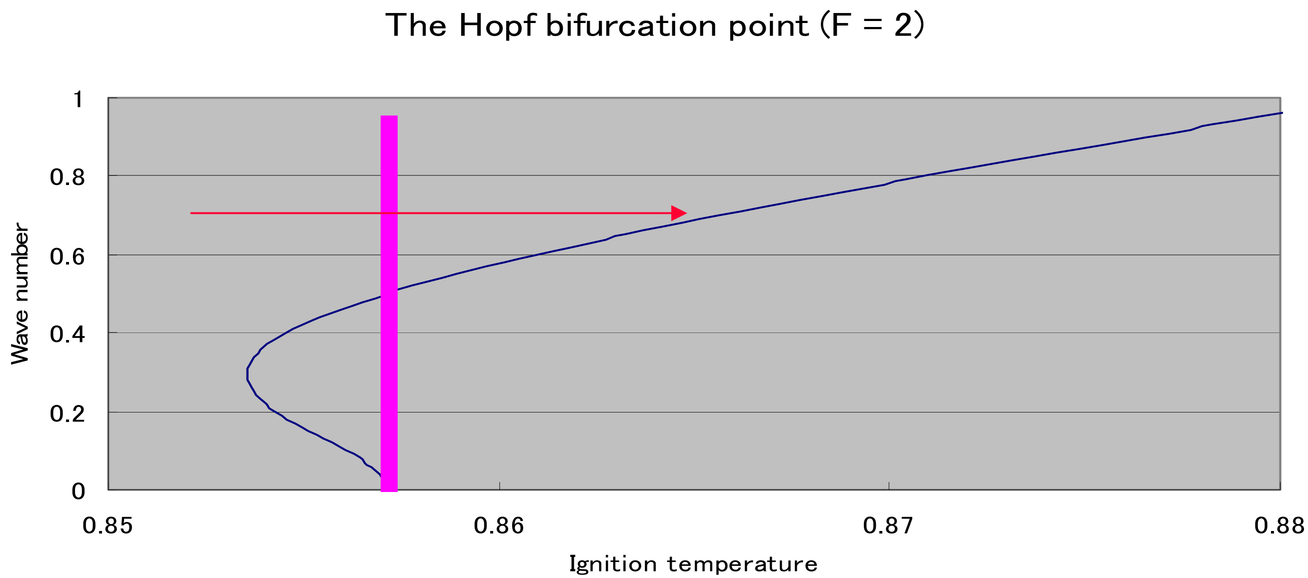
結論



１. 安定なヘリカル波が進行波から直接分岐し得る.

２． 進行波がたとえ空間１次元問題で安定であっても，対応する平面進行波は空間２次元や空間３次元において不安定かも知れない.

結論

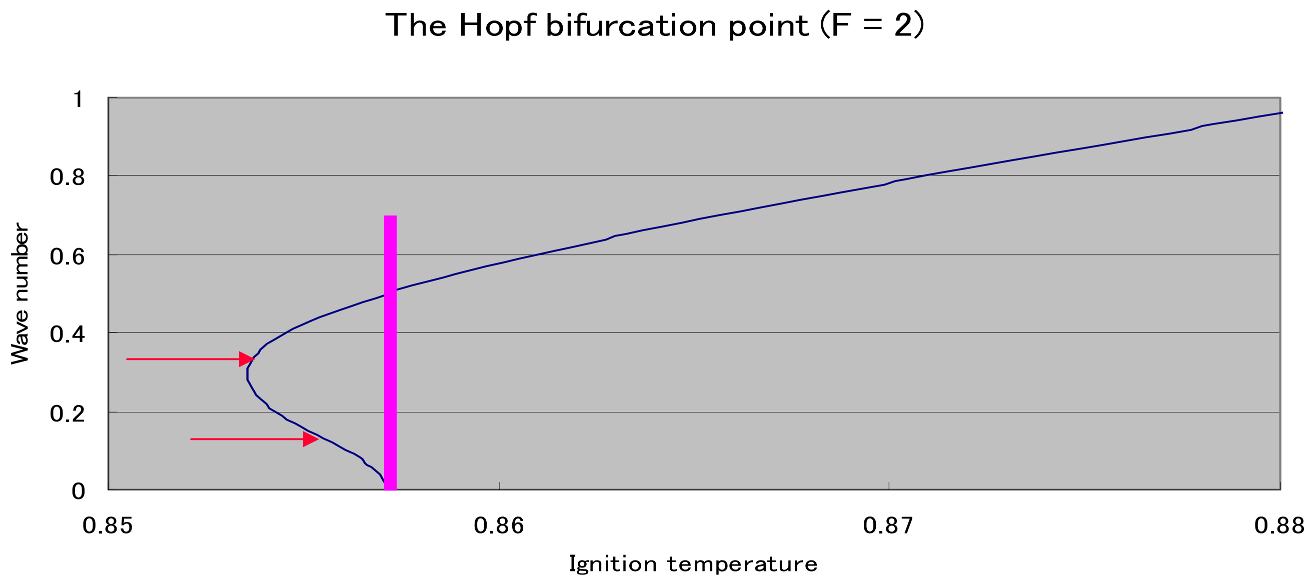


１. 安定なヘリカル波が進行波から直接分岐し得る.

２． 進行波がたとえ空間１次元問題で安定であっても，対応する
平面進行波は空間２次元や空間３次元において不安定かも知れない.

３． 帯幅 L が小さいとき（空間２次元問題）や円柱の半径 R が小さいとき
（空間３次元問題）は k が大きくなるので安定なヘリカル波は存在しない.

結論



1．安定なヘリカル波が進行波から直接分岐し得る．

2．進行波がたとえ空間１次元問題で安定であっても，対応する平面進行波は空間２次元や空間３次元において不安定かも知れない．

3．帯幅 L が小さいとき（空間２次元問題）や円柱の半径 R が小さいとき（空間３次元問題）は k が大きくなるので安定なヘリカル波は存在しない．

4．異なる数の反応点を持つ安定なヘリカル波が共存し得る．

Thank you for your attention.

大雪山銀泉台からの雲海（2003年8月）