

三重接合点を持つ定常解の分岐 — 割鶏焉用牛刀 —

新居 俊作 (九州大学 数理学研究院)

1 問題設定

本講演では曲率流方程式の三重接合点を持つ定常解の分岐問題を考える。即ち、 Ω を \mathbb{R}^2 の有界領域とし Ω 内の点 $m(t)$ で三重接合点をもつ曲線 $\Gamma_i(t) := \{\gamma_i(s, t) \in \mathbb{R}^2\}$, $i = 1, 2, 3$ (但し s は $m(t)$ を始点とする弧長パラメタ) で以下の法則に従うものについて、その定常解を扱う。

M1: Γ_i の各点での法線方向の速度はその点での Γ_i の符号付曲率に等しい *i.e.* N_i を Γ_i への接ベクトル $\frac{\partial \gamma_i}{\partial s}$ に対し左側向きの単位法線ベクトルとすると $V_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} \cdot N_i$, $\kappa_i = \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial s^2} \cdot N_i$ について $V_i = \kappa_i$

M2: $m(t)$ で三曲線が交わる各度を θ_k , $k = 1, 2, 3$ (但し Γ_i と Γ_j が交わる角を θ_k , $k \neq i, j$ とする) とするとこれは Young の法則に従う *i.e.* ある正定数 σ_k , $k = 1, 2, 3$ について $\frac{\sin \theta_1}{\sigma_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sigma_2} = \frac{\sin \theta_3}{\sigma_3}$ が常に成り立つ。

M3: Γ_i は $m(t)$ と反対側の端点において $\partial\Omega$ に直角に交わる。

(このような問題は、金属を冷却した際の相分離現象等に現れる。)

この問題の定常解は各 Γ_i が直線するときであり (図1参照)、その安定性については井古田-柳田 [1] によって以下のことが示されている。

Theorem (井古田-柳田) Γ_i が $\partial\Omega$ に交わる点での $\partial\Omega$ の符号付曲率を h_i (但し Ω がその点の近傍で凸であるとき $h_i < 0$ とする)、 Γ_i の長さを L_i とするとき、 $D := h_1 h_2 h_3 \sum_{i=1}^3 \sigma_i L_i + \sigma_1 h_2 h_3 + \sigma_2 h_1 h_3 + \sigma_3 h_1 h_2$ として **M1** ~ **M3** の定常解における線形化固有値問題について以下が成り立つ。

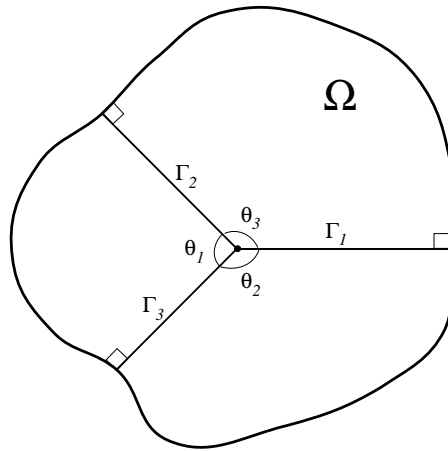


図 1: 三重接合点を持った定常解。

- (1) h_1, h_2, h_3 の全てが正の場合は零以上の固有値は存在しない。
 - (2) h_1, h_2, h_3 の一つが零以下で他は正の場合
 - $D > 0$: 零以上の固有値は存在しない。
 - $D = 0$: 零固有値が一つあり、正の固有値は存在しない。
 - $D < 0$: 正の固有値が一つあり、零固有値は存在しない。
 - (3) h_1, h_2, h_3 の二つが零以下でそのうち一つが負の場合は正の固有値が存在する。
- (h_1, h_2, h_3 のうちの二つ以上が零の場合は省略。)

この結果により、 h_1, h_2, h_3 の一つが零以下で他は正の場合について $\partial\Omega$ を変形して D の符号を変化させた場合に固有値が原点を横切ることが分かる。従って定常解が何らかの分岐を起こすことが期待される。即ち、 $h_i > 0, i = 1, 2, 3$ の安定な常解を一つ固定して、そこから例えば Γ_1 が $\partial\Omega$ と交わる点の近傍で $\partial\Omega$ を変形することによって $h_1 < 0$ とし、更に $D < 0$ となるまで連続に h_1 を変えていくときに、当然この定常解の分岐現象が観察されるはずである。

本講演では上記の状況下で $\partial\Omega$ を適切に変形することにより、標準的な分岐、即ち saddle-node 型、transcritical 型、pitchfork 型の全てのタイプの分岐を起こさせることが出来ることを紹介する。

2 定常解の分岐とは

$$u_t = F(u; \lambda)$$

の形の常 or 偏微分方程式がパラメタ $\lambda = \lambda_0$ で定常解 u_0 を持つ場合に、 u_0 での方程式の線形化

$$v_t = F_u(u_0; \lambda_0)v$$

を考える。

今 $F_u(u_0; \lambda_0)$ が零固有値を一つ持ちその他には実部零以上の固有値を持たないとすると、 λ を λ_0 の近傍で動かした時に、一定の条件の下に所謂分岐現象が見られる。

この節では、「分岐現象」は「非線形現象」であるという「誤解」に対する注意を喚起する。

2.1 saddle node 分岐

\mathbb{R}^n で定義された常微分方程式でパラメタ $\mu \in \mathbb{R}$ に依存するものを考える：

$$\dot{x} = F(x; \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}$$

この方程式が以下の条件を満たすとする：

- (1) $F(0; 0) = 0$ 。
- (2) $DF(0; 0)$ は 0 を重複度一の固有値とし、他の固有値の実部は零ではない。
- (3) $DF(0; 0)$ の零固有値に属する左固有ベクトルを w とすると $w \cdot (F_\mu(0; 0)) \neq 0$ 。

このとき $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 内の $(x; \mu) = (0; 0)$ の近くで定義された曲線で、その上では $F(x; \mu) = 0$ かつ $(x; \mu) = (0; 0)$ のまわりでは $F(x; \mu) = 0$ となるのはこの曲線上のみであるものが存在する。これが所謂 saddle-node 分岐である。

さてここでもしこの系がアファイン、即ち

$$F(x; \mu) = A(\mu)x + v(\mu)$$

と行列 $A(\mu)$ 及びベクトル $v(\mu)$ で書けるとする。このとき $v(0) = 0$ で $A(0)$ が重複度一の零固有値をもち他に実部零の固有値をもたないとする。と上記 (1)(2) は満たされ、(3) の条件 $w \cdot v_\mu(0) \neq 0$ を仮定すると $\mu = 0$ 以外では $F(x; \mu)$ は零点を持たないことになる。従って、 $F(x; \mu) = 0$ の解は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 内で $(x; \mu) = (0; 0)$ を通る $DF(0; 0)$ の零固有空間に一致する。

即ち、saddle-node 分岐とは上記のアフライン系で見られる現象が系の非線形性により多少歪んで起こっているものである。

2.2 transcritical 分岐と pitchfork 分岐

やはり \mathbb{R}^n で定義された常微分方程式でパラメタ $\mu \in \mathbb{R}$ に依存するものを考える：

$$\dot{x} = F(x; \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}$$

この方程式が以下の条件を満たすとする：

- (1) $F(0; \mu) = 0$ が $\mu = 0$ の近くで常に成り立つ。
- (2) $DF(0; 0)$ は 0 を重複度一の固有値とし、他の固有値の実部は零ではない。
- (3) $DF(0; 0)$ の零固有値に属する左固有ベクトルを w 右固有ベクトルを v とすると $w \cdot DF_\mu(0; 0)v \neq 0$ 。

このとき $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 内の $(x; \mu) = (0; 0)$ の近くで定義された $(0; 0)$ を通る曲線で、その上では $F(x; \mu) = 0$ かつ $(x; \mu) = (0; 0)$ のまわりでは $F(x; \mu) = 0$ となるのは $(0; \mu)$ とこの曲線上のみであるものが存在する。これが所謂 transcritical 分岐と pitchfork 分岐である。

さてここでもしこの系が線形、即ち

$$F(x; \mu) = A(\mu)x$$

と行列 $A(\mu)$ で書けるとする。このとき $A(0)$ が重複度一の零固有値をもち他に実部零の固有値をもたないとする。と上記 (1)(2) は満たされ、(3) の条件 $w \cdot A(0)v \neq 0$ を仮定すると $\mu = 0$ 以外では $F(x; \mu)$ は零以外の零点を持たないことになる。従って、 $F(x; \mu) = 0$ の解は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 内で $(0; \mu)$ と $(x; \mu) = (0; 0)$ を通る $DF(0; 0)$ の零固有空間に一致する。

即ち、transcritical 分岐及び pitchfork 分岐とは上記の線形系で見られる現象が系の非線形性により多少歪んで起こっているものである。

3 三重結節点の定常問題における「線形」分岐

前節の内容を念頭に置くと、三重結節点をもつ定常解の分岐問題を考えるには、まず「線形」分岐問題に対応する問題を特定しなければならない。

今対象にしているのは領域の曲率が零でない境界の変形であるので、これは単なる線形問題 (境界を直線とする領域での問題?) では当然ない。ここで考えるべきことは、零固有空間に対応する定常解の族を持つような、零固有値を持つ線形常微分方程式に対応する領域の形状を特定することである。

結論から述べると、定常解 $\{\Gamma_i^0\}$ の端点の回りでの境界の形が図2の様になっているとき、「円周角の定理」により三重結合点 m で Γ_i 達が交わる角度と Γ_i の端点 B_i での境界条件を保った定常解の族が存在する。

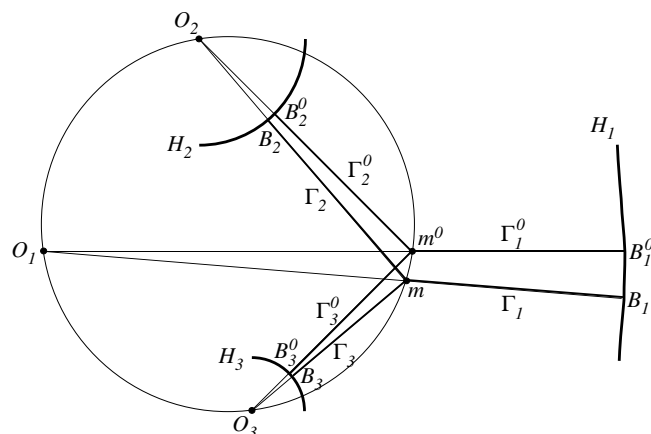


図 2: H_i を各々 O_i を中心とする円弧の一部とすると、 H_i 達を $\partial\Omega$ の一部とする Ω に対し O_i 達を通る円周上に三重接合点をもつ定常解の族が存在する。

つまりこの状況が、零固有値を持つ線形常微分方程式に対応するのである。あとは、この系の境界つまり H_i にどのような摂動を加えると、常微分方程式の平衡点の標準的な分岐に対応する分岐現象が得られるかを考えれば良いのである。

Remark 井古田-柳田の定理において、 H_i が全て内側に凸の場合は零以上の固有値は存在せず定常解は安定である。図2の状態が丁度原点に一つ固有値があり、正の固有値が存在しない状況に対応している。

4 具体的な分岐

以下の議論では全て H_2, H_3 が O_2, O_3 を中心とする円弧であることを仮定するが、その下で得られる描像は H_2, H_3 に対する小さな摂動の下でも当然存続することから一般的な結論が得られる。

4.1 saddle node 分岐

先ずこの節では、図2の状況から Ω の境界に適切な摂動を加えることによって saddle node 型の分岐を起こすことが出来ることを示す。

図3の様に H_2, H_3 を O_2, O_3 を中心とする円弧に保ったまま、 H_1 の曲率が B_1^0 の周りで単調に変化するという「非退化」条件を仮定する。但し、 H_1 は B_1^0 で O_1 を中心とする円弧 C に接しそこでの曲率は C のそれと一致するとする。

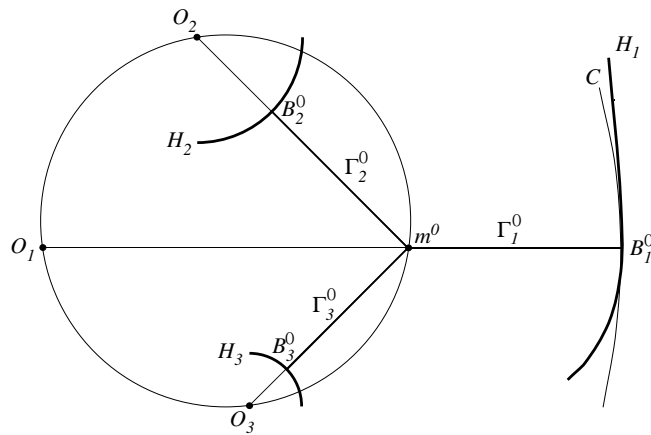


図3: B_1^0 で H_1 は O_1 を中心とする円弧 C に接するとし、またその B_1^0 での曲率は C のそれと等しいとする。

この設定の下で図4の様に H_1 を傾けることを考える。 H_1 を図4の方向に傾けた場合、 $\theta \neq 0$ ならば円周上 m_0 の近くのどの m についても Γ_1 は端点で H_1 と直角には交わらず、 Γ_1^0 は消滅する。 $(H_2$ と H_3 が境界条件を満たし、M2(Young の法則) が成り立つならば三重結節点は O_1, O_2, O_3 を通る円周上に在る。)

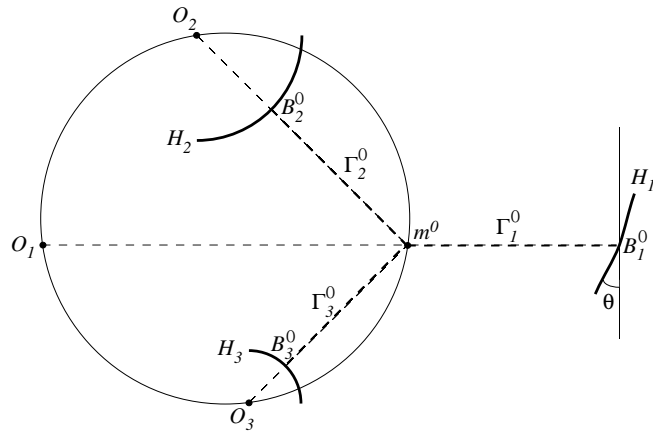


図 4: H_1 を傾ける。

H_1 を逆向きに傾けた場合もやはり Γ_1^0 は消滅するが図5の様に二つの定常解が現れ、そのうち一方は端点での H_1 の曲率の絶対値が O_1 を中心とする円より大きいので不安定であり、もう一方は曲率の絶対値が小さく安定である。

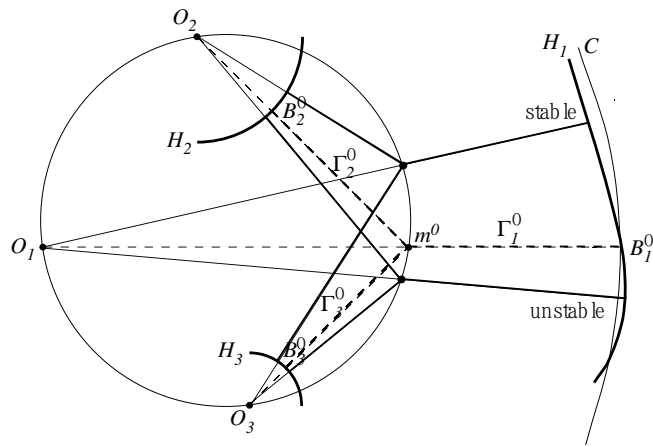


図 5: H_1 を逆向きに傾けると、安定な定常解と不安定な定常解の対が現れる。

即ち、 H_1 の角度を変化させると saddle node 型の分岐が起こるのである。

4.2 transcritical 分岐

次に H_1 の曲率の絶対値を全体に小さくした場合は、図6の様に Γ_1^0 は安定化して存在し続けるがそれと同時に不安定な定常解が現れる。

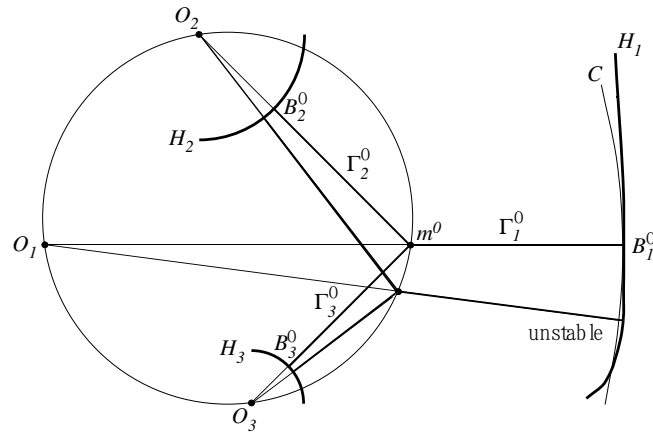


図 6: Γ_1^0 は安定化して存続し、不安定なもう一つの解が現れる。

逆に H_1 の曲率の絶対値を全体に大きくした場合は、図7の様に Γ_1^0 は今度は不安定化して存在し続け同時に安定な定常解が現れる。

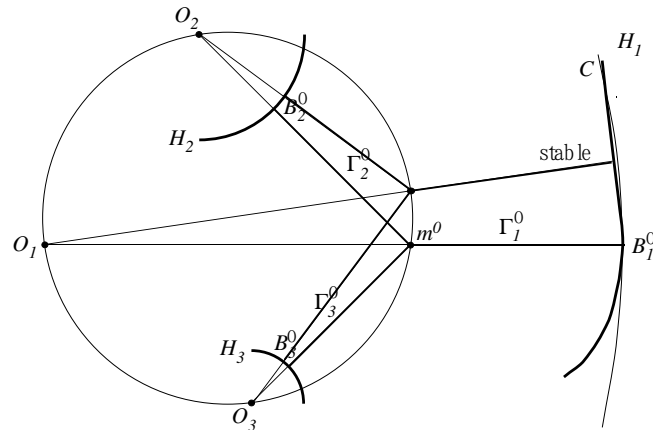


図 7: Γ_1^0 は不安定化して存続し、安定なもう一つの解が現れる。

つまり、 H_1 の曲率を全体として変化させた場合には transcritical 型の分岐が起こる。

4.3 pitchfork 分岐

さて今度は H_1 が上下に対称性を持つ場合を考える。この場合 B_1^0 では曲率が最小又は最大である。

曲率が最小の場合は、対称性を保ったまま H_1 の曲率の絶対値を全体に大きくすると、図 8 の様に Γ_1^0 は不安定化しその両側に安定な定常解が出現する。 H_1 曲率の絶対値を全体に小さくした場合は、明らかに Γ_1^0 は安定化しその近くには他には定常解は現れない。

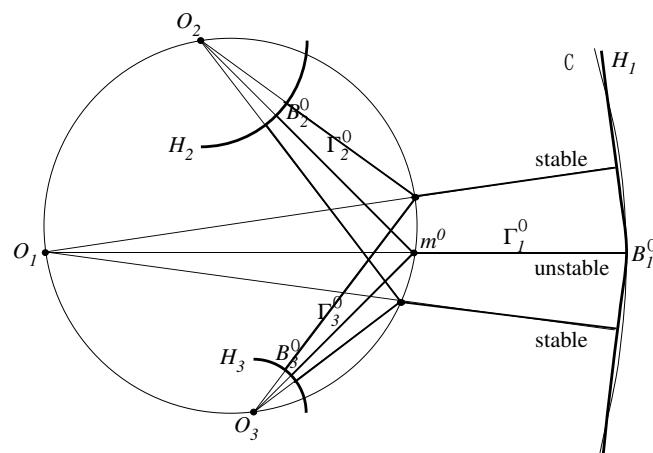


図 8: Γ_1^0 は不安定化しその両側に安定な定常解が出現する。

つまりこの場合は supercritical な pitchfork 型の分岐が起きているのである。

同様にして曲率が最大の場合は、対称性を保ったまま H_1 曲率の絶対値を全体に小さくすると、subcritical な pitchfork 型の分岐が起きる。

5 後書き — 割鶏焉用牛刀 —

本稿で扱った内容を、なにも考えずに通常の力学系のアプローチを適用して解析しようとする、「無限次元陰関数定理」「Lapunov-Schmit reduction」「Center manifold」等の“高度な”理論を使ってスタンダードな分岐解析に持ち込もうと考えることになるだろう。しかしその場合、“領域とその上の関数の組の空間”を扱うことになり殆んど解析が不可能になってしまう。(この方法で出来る人も居るかも知れないが。)

ここで冷静になって、分岐現象とは“問題に分岐理論を適用して得られる結果である”という思い込みを捨て、“問題の本質は何であり何が知りたい現象であるか”を考えれば実は“分岐理論は必ずしも使う必要が無く”実は非常に簡単な方法(ここでは円周角の定理+ α)で結論を得ることが出来ることに気が付くのである。

この講演内容を“必ずしも難しい理論を使いこなすことが高級なわけではなく、問題の本質をとらえれば非常に簡単な方法で欲しい結論を得ることが出来ることもある”こと、言い替えれば“研究とは高度な理論の練習問題を解くことではなく、適切な方法で知りたいことを分析することである”ということの再確認の機会として頂ければ幸いである。

参考文献

- [1] R.Ikota and E.Yanagida *A stability criterion for stationary curves to the curvature-driven motion with a triple junction*, Differential and Integral Equations, **16** (2003), pp.707-726