

# 特異摂動理論とその応用

富山大学大学院理工学研究部

池田 榮雄

非線形数理 秋の学校

(2007年9月25日～27日)

## 1. はじめに

数理解物理学に現れる様々な問題に対して、とりわけ関数方程式等で表現された現象を記述する解を求めるのに、物理パラメータなどによる形式的に冪級数展開された形の解は構成可能であろうか。このような関心が解の漸近展開理論へと発展していったのであろう。このような方法は抽象的な関数空間における解の存在を保証するというよりも、解の具体的な形状を獲得できるといった応用的な側面からの支持があったものと思われる。ここでは特異摂動問題と呼ばれるタイプの問題に対して、境界層 (境界付近で解の値が急激に変化する現象) や内部遷移層 (領域内部で解の値が急激に変化する現象) を持つ解の表現方法、そしてその解の存在や安定性などを接合漸近展開法の考えをもとに考察する。ここでの内容は入門的なものに限って、接合漸近展開法の考え方を中心に解説する。空間多次元の問題などまだまだ未解決問題がたくさんあるので、皆さんのチャレンジを期待します。

まずは言葉の説明から始めよう。

**定義 1.1**  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  で定義された関数列  $\{\phi_n(\varepsilon)\}$  が  $\varepsilon \rightarrow 0$  のときの漸近級数 (asymptotic sequence) であるとは、任意の非負の整数  $n$  に対して

$$\phi_{n+1}(\varepsilon) = o(\phi_n(\varepsilon)) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

が成り立つときである。

漸近級数の例として良く利用されるものに、 $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ ,  $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^n (\log \varepsilon)^n$  などがある。

**定義 1.2** 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \phi_n(\varepsilon)$  が  $\varepsilon \rightarrow 0$  のときの  $f(\varepsilon)$  の漸近展開 (asymptotic expansion) であるとは、任意の非負の整数  $N$  に対して、

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N A_n \phi_n(\varepsilon) + o(\phi_N(\varepsilon)) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

が成り立つときである。このとき、

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \phi_n(\varepsilon) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

と書く。

例えば、漸近級数  $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$  に関する  $e^{-1/\varepsilon}$  の漸近展開は  $e^{-1/\varepsilon} \sim 0$  である。漸近展開

の係数  $A_m$  は

$$A_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n \phi_n(\varepsilon)}{\phi_m(\varepsilon)} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

と表されるので、漸近級数が指定されれば漸近展開は一意に決まる。

## 2. 発見的考察 (特異性の出現)

2つの例を挙げる。1つ目は通常の摂動問題であり、もう1つは特異性が現れる場合である。

**例 1** (正則) 摂動問題 (regular perturbation problem) 2点境界値問題 :

$$\begin{cases} u'' + u' + \varepsilon u = 0, & 0 < x < 1, \quad |\varepsilon| \ll 1, \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases} \quad (2.1)$$

の解は  $u(x; \varepsilon) = \frac{b - ae^{\lambda_-(\varepsilon)}}{e^{\lambda_+(\varepsilon)} - e^{\lambda_-(\varepsilon)}} e^{\lambda_+(\varepsilon)x} + \frac{ae^{\lambda_+(\varepsilon)} - b}{e^{\lambda_+(\varepsilon)} - e^{\lambda_-(\varepsilon)}} e^{\lambda_-(\varepsilon)x}$  と表される。但し  $\lambda_{\pm}(\varepsilon) = (-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2$ 。ここで、(2.1) において形式的に  $\varepsilon = 0$  として近似解  $U_0(x)$  を求めてみよう。

$$\begin{cases} U_0'' + U_0' = 0, & 0 < x < 1, \\ U_0(0) = a, U_0(1) = b. \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) の解  $U_0(x) = \frac{eb - a - e(b-a)e^{-x}}{e - 1}$  に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x; \varepsilon) = U_0(x) \quad \text{区間 } [0, 1] \text{ で一様収束}$$

が成り立ち、形式的に  $\varepsilon = 0$  とした (2.1) の解  $U_0(x)$  は十分小さな  $\varepsilon$  に対して良い一様近似解となっている。

**例 2** 特異摂動問題 (singular perturbation problem) 次の2点境界値問題 :

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + u' = 0, & 0 < x < 1, \quad |\varepsilon| \ll 1, \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases} \quad (2.3)$$

を考えよう。解は  $u(x; \varepsilon) = \frac{a[e^{(1-x)/\varepsilon} - 1]}{e^{1/\varepsilon} - 1} + \frac{b[1 - e^{-x/\varepsilon}]}{1 - e^{-1/\varepsilon}}$  と表されるが、 $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき、極限関数は存在しないことがわかる。実際、任意の自然数  $n$  に対して

$$\begin{cases} u(x; \varepsilon) = ae^{-x/\varepsilon} + b + O(\varepsilon^n), & 0 < x \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \rightarrow b, & 0 < x \leq 1, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow +0 \end{cases} \quad (2.4)_+$$

$$\begin{cases} u(x; \varepsilon) = a + be^{(1-x)/\varepsilon} + O(\varepsilon^n), & 0 \leq x < 1, \quad -1 \ll \varepsilon < 0, \\ \rightarrow a, & 0 \leq x < 1, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow -0 \end{cases} \quad (2.4)_-$$

が成り立つ。(2.3)において形式的に  $\varepsilon = 0$  としたとき、もはや2階の方程式ではなくなり(階数の低下が起こり)、1階の方程式  $u' = 0$  となるので、(2.3)における境界条件は1つ過剰となる。従って、 $u' = 0$  を解くと  $u = \text{定数}$  となるが、(2.4)<sub>+</sub> では境界条件  $u(1) = b$  が選ばれ、(2.4)<sub>-</sub> では  $u(0) = a$  が選ばれていることに注意しよう(実際どちらの境界条件が選ばれるかが問題となる)。さらに、 $\varepsilon > 0$  と固定しても、

$$u(x; \varepsilon) = ae^{-x/\varepsilon} + b(1 - e^{-x/\varepsilon}) + O(e^{-1/\varepsilon}), \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow +0, x \rightarrow +0$$

に注意すれば、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x; \varepsilon) = b \neq a = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} u(x; \varepsilon)$$

が成り立ち、真の解  $u(x; \varepsilon)$  は  $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき、 $[0, 1]$  において一様収束しないことがわかる。例1とはかなり状況が異なるようである。この原因をもう少し詳しく観察しよう。真の解  $u(x; \varepsilon)$  に対して、

$$u(0; \varepsilon) = a, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x; \varepsilon) = b \quad (x \neq 0), \quad u'(0; \varepsilon) = \frac{(b-a)}{\varepsilon} + O(e^{-1/\varepsilon})$$

が成り立つ。即ち、 $x = 0$  の  $O(\varepsilon)$  近傍で  $u(x; \varepsilon)$  の値は  $a$  から  $b$  に急激に変化し、その変化率は  $O(\frac{1}{\varepsilon})$  であることがわかる(図1参照)。このような狭い領域は**境界層**(boundary layer)と呼ばれている。

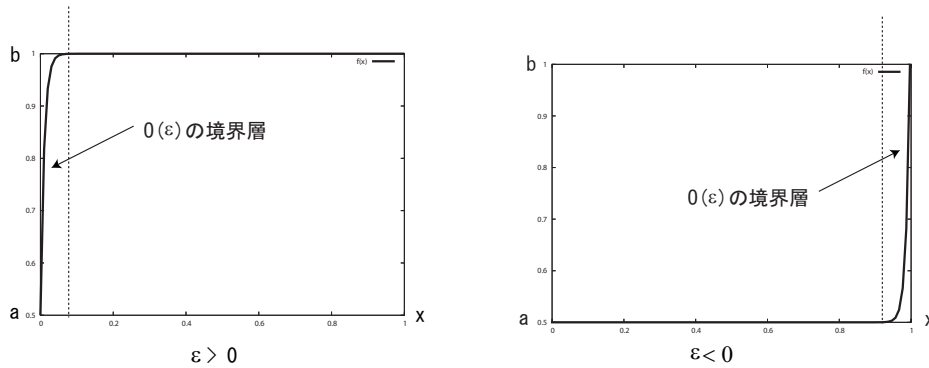


図 1:  $u(x; \varepsilon)$  の挙動

### 3. 特異摂動法入門

これまで、真の解が得られていたので、その解を利用して境界層の出現を見たが、通常はそうはいかない。真の解は勿論未知であるので、区間  $[0, 1]$  全体でそれを上手く近似する近似解の構成方法が要求される。この問題に答えてくれるのが**特異摂動法**(singular perturbation method)と言われる方法である。例2を用いてその方法を概観してみよう。

例 2 の続き  $0 < \varepsilon \ll 1$  とする。

$$U(x; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x) \quad (3.1)$$

を (2.3) の第 1 式に代入し,  $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の係数を等値すると,

$$U'_0 = 0, U''_0 + U'_1 = 0, \dots, U''_k + U'_{k+1} = 0, \dots \implies U'_0 = 0, U'_1 = 0, \dots, U'_k = 0, \dots$$

となり, これを解いて  $U_k(x) = a_k$  (定数) ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )。この解は境界層の外側ではよい近似解となっているので, **外部解** (outer solution) と呼ばれている。外部解は (2.3) の第 2 式を同時に満たすことが出来ないが, どちらか一方だけなら満たすことが出来る。(実際, どちらも満たさないとするとこの形の解は構成できない。) ここで, 2 つの場合に分ける。

(i) 外部解 (3.1) が  $u(1) = b$  を満たすとき,  $a_0 = b, a_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) となる。しかし, 境界条件  $u(0) = a$  は満たされないので,  $x = 0$  の近傍に境界層が存在していると考えることが出来る。この領域は  $\varepsilon$  に依存した狭い領域であるので, **拡大変数** (stretched variable)  $\xi = x/\varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) を用いて拡大する。すなわち, (2.3) を  $\xi$  変数で書き換えると,  $\bar{u}(\xi; \varepsilon) (= u(\varepsilon^\alpha \xi; \varepsilon))$  は

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \bar{u}'' + \varepsilon^{-\alpha} \bar{u}' = 0 \implies \varepsilon^{1-\alpha} \bar{u}'' + \bar{u}' = 0$$

をみたす。ここで,  $\alpha = 1$  とすると,

$$\bar{u}'' + \bar{u}' = 0 \quad (3.2)$$

となる。 $(\alpha = 1$  とする理由は後述) (3.2) の解の  $\varepsilon$  に関する漸近展開を求めよう。

$$\bar{u}(\xi; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(\xi) \quad (3.3)$$

を (3.2) に代入し,  $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の係数を等値すると,

$$\bar{u}''_k + \bar{u}'_k = 0, \xi \in (0, \infty) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となり, 境界条件  $\bar{u}(0, \varepsilon) = a$  を考慮すると, 解  $\bar{u}_k(\xi)$  は

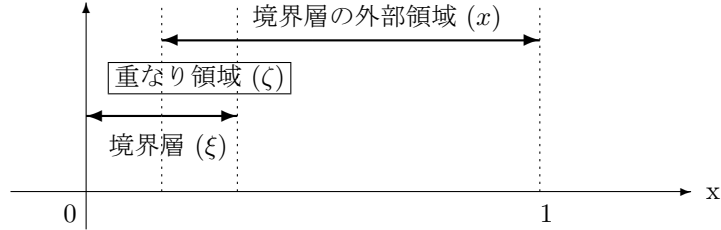
$$\begin{aligned} \bar{u}_0(\xi) &= \bar{a}_0 + (a - \bar{a}_0)e^{-\xi} = ae^{-\xi} + \bar{a}_0(1 - e^{-\xi}), \\ \bar{u}_k(\xi) &= \bar{a}_k(1 - e^{-\xi}) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

と求まる。但し,  $\bar{a}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) は未決定な任意定数である。

解 (3.3) は境界層内部の近似解であるので, **内部解** (inner solution), あるいは**境界層解** (boundary layer solution) と呼ばれていて,  $x = 0$  の  $O(\varepsilon)$  近傍の領域で急激に変化する様子を記述している。しかし, 内部解は一意には定まっていないことに注意しよう。

これまで, 2 つの領域 (境界層の外部と境界層の内部) で別々に近似解を構成してきた。お互いに都合のよい片側の境界条件だけを使ってきたが, 区間全体で整合していなければ (2.3)

の解にはなり得ない。そのためには、外部解と内部解が共に成り立つ適当な  $x$  の領域（これを**重なり領域** (overlap domain) という）で両者は一致しなければならない。この過程を**接合** (matching) という。



境界層の外部領域は  $x$  変数で記述され、境界層の領域では  $\xi = x/\varepsilon$  で記述されている。接合を行うために、両方の領域の重なり領域として、 $\zeta = x/\alpha(\varepsilon)$  で記述される領域を考える。但し  $\alpha(\varepsilon)$  は  $\varepsilon$  の連続関数で、

$$\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \infty, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow +0 \quad (3.4)$$

満たすものとする。すなわち、 $\zeta$  変数は  $x$  と  $\xi$  の中間のスケールを表示しており、重なり領域に対応するものである。そこで  $\zeta$  を任意に固定し、この  $\zeta$  を用いて外部解、内部解の両方の解を表示し直すと、

- ・外部解の  $\zeta$  による表現 :  $U(\zeta) = U(\alpha(\varepsilon)\zeta; \varepsilon) = b,$
- ・内部解の  $\zeta$  による表現 :  $\bar{u}(\zeta) = \bar{u}(\alpha(\varepsilon)\zeta/\varepsilon; \varepsilon) = ae^{-\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{a}_k (1 - e^{-\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\zeta}).$

この両者が  $\varepsilon$  に関する漸近展開として等しくなければならないので、両者を比較すると

$$\bar{a}_0 = b, \quad \bar{a}_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる。この接合により、内部解も一意な漸近展開として決定される。

$$\bar{u}(\xi; \varepsilon) = ae^{-\xi} + b(1 - e^{-\xi}).$$

したがって、これらの解を足し合わせて、2つの領域に共通に含まれる項がだぶらないように引くと、 $x$  の領域  $[0, 1]$  区間にわたって一様に成り立つ (2.3) の近似解の漸近展開が得られる。

$$u_c(x; \varepsilon) = U(x; \varepsilon) + \bar{u}(\xi, \varepsilon) - u(\zeta) = b + ae^{-\frac{x}{\varepsilon}} + b(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) - b = b + (a - b)e^{-\frac{x}{\varepsilon}}. \quad (3.5)$$

この  $u_c(x; \varepsilon)$  を**合成解** (composite solution) という。

以上述べた方法が**接合漸近展開法** (method of matched asymptotic expansions) と呼ばれる

方法である。

**注意 3.1** 今の解説で、内部解を得るために拡大変数  $\xi = x/\varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) を導入し、 $\alpha = 1$  とおいた。それは、 $\alpha \neq 1$  でも内部解の構成は可能であるが、接合が出来ない(重なり領域が存在しない)ことによる。

**注意 3.2** (ii) 外部解 (3.1) が  $u(0) = a$  を満たすときはどうなるであろうか。この場合は  $a_0 = a$ ,  $a_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) となる。(i) の場合と全く同様に計算することが出来る。読者自ら確かめて頂きたい。(ヒント) この場合は境界条件  $u(1) = b$  を満たさないで、 $x = 1$  の近傍に境界層が存在している。拡大変数として  $\xi = (1-x)/\varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) を用いる。すると、内部解  $\tilde{u}(\xi; \varepsilon)$  は  $\varepsilon^{1-\alpha} \ddot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}} = 0$  を満たす。前と同じ理由で  $\alpha = 1$  とする。 $\tilde{u}(\xi; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{u}_k(\xi)$  を代入して、 $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の係数を等値すると、 $\ddot{\tilde{u}}_k - \dot{\tilde{u}}_k = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) となり、境界条件  $\tilde{u}(0, \varepsilon) = b$  を考慮すると、解  $\tilde{u}_k(\xi)$  は

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(\xi) &= \tilde{a}_0 + (b - \tilde{a}_0)e^\xi = be^\xi + \tilde{a}_0(1 - e^\xi), \\ \tilde{u}_k(\xi) &= \tilde{a}_k(1 - e^\xi) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

と求まる。但し、 $\tilde{a}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) は未決定な任意定数である。(3.4) を満たす  $\alpha(\varepsilon)$  に対して、中間のスケールを表す変数  $\zeta = x/\alpha(\varepsilon)$  を導入する。任意に固定された  $\zeta$  に対して両方の解の表現を求めると

- ・外部解の  $\zeta$  による表現 :  $U(\zeta) = U(\alpha(\varepsilon)\zeta; \varepsilon) = a$ ,
- ・内部解の  $\zeta$  による表現 :  $\tilde{u}(\zeta) = \tilde{u}(\alpha(\varepsilon)\zeta/\varepsilon; \varepsilon) = be^{\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{a}_k(1 - e^{\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\zeta})$

となるが、 $e^{\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\zeta} \rightarrow \infty$  as  $\varepsilon \rightarrow +0$  となり接合出来ない。すなわち、重なり領域が存在しなくなり、(ii) の場合の漸近展開は構成できない。これは  $\varepsilon > 0$  のときは、境界層は  $x = 0$  の近傍にのみ存在し、 $x = 1$  の近傍には存在しないことを主張している。

**注意 3.3**  $\varepsilon < 0$  のときも全く同様に (2.3) の漸近展開を求めることが出来るが、この場合は境界層は  $x = 1$  の近傍に存在することになる。

#### 4. 非線形問題

線形問題の場合は特異摂動法で求めた漸近展開が真の解に収束していることは明らかであるが、非線形問題の場合は状況が異なる。ここでは、特異摂動法で求めた漸近展開を持つ真の解が存在することを保障する(すなわち、漸近展開の正当性を与える)必要がある。簡単な例を用いて説明しよう。

**例 3** 非線形特異摂動問題 (nonlinear singular perturbation problem) 次の2点境界値問題 :

$$\begin{cases} P_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ u(0) = a, \quad u'(1) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

を考えよう。但し、 $0 < a < 1$ ,  $f(x, u) = u(1 - u)(u - a(x))$  で  $a(x) \in C^\infty[0, 1]$ ,  $0 < a(x) < 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ 。簡単の為にさらに、 $a(0) = 1/2$  と仮定する (この仮定は本質ではない)。3 節の復習を兼ねて、外部解の漸近展開を考えよう。 $U(x; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x)$  を (4.1) の第 1 式に代入し、 $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の係数を等値すると

$$f(x, U_0) = 0, \quad f_u(x, U_0)U_1 = 0, \quad f_u(x, U_0)U_k + U_{k-2}'' = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

が得られる。 $f(x, U_0) = 0$  より、 $U_0 = 0, 1, a(x)$  のいずれでもよい。ここでは簡単の為に、 $U_0 = 0$  としよう。すると、 $f_u(x, U_0) < 0$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ) となり、 $U_k = 0$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) となる。 $(U_0 = 1$  としても状況は同じである) 非常に簡単になったが、外部解の漸近展開は

$$U(x; \varepsilon) = 0$$

と求められた。3 節の考え方だと、この解は (4.1) の 2 番目の境界条件は満たしているが、 $x = 0$  での条件  $u(0) = a$  は満たしていない。したがって、 $x = 0$  の近傍で拡大変数を導入し、内部解の漸近展開を計算する。その後、重なり領域で接合して合成解を得る。しかし、ここではこの方法を少し修正しよう。(3.5) の合成解は外部解+内部解—重なり領域での解と表現されているが、これを次のように考える。(3.5) の合成解は外部解+外部解の修正解。但し外部解の修正解=内部解—重なり領域での解。3 節での考察から、外部解の修正解は境界層から離れれば 0 となる。これを指導原理として、外部解の修正解の漸近展開を考えよう。修正が必要なのは満たされていない境界条件を満たすように修正することであるから、内部解の時と同様に、 $x = 0$  の近傍で拡大変数  $\xi = x/\varepsilon^\alpha$  を導入し、外部解の修正解を  $\hat{u}(\xi; \varepsilon)$  とし、 $u(x; \varepsilon) = U(x; \varepsilon) + \hat{u}(\xi; \varepsilon) = 0 + \hat{u}(\xi; \varepsilon)$  を (4.1) に代入する。その結果

$$\varepsilon^{2-2\alpha} \hat{u}'' + f(\varepsilon^\alpha \xi, \hat{u}) = 0$$

を得る。 $x = 0$  では境界条件  $u(0) = a$  を満たさなければならないので、 $\hat{u}(0; \varepsilon) = a$  となる。ここで注意しなければならないのは接合条件の代わりに次の整合条件  $\hat{u}(\infty; \varepsilon) = 0$  を課すことである。従って、

$$\begin{cases} \varepsilon^{2-2\alpha} \hat{u}'' + f(\varepsilon^\alpha \xi, \hat{u}) = 0, & 0 < \xi < \infty, \\ \hat{u}(0; \varepsilon) = a, \quad \hat{u}(\infty; \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

を満たす。3 節と同様の理由で、 $\alpha = 1$  とする。外部解の修正解の漸近展開  $\hat{u}(\xi; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{u}_k(\xi)$  を計算する。(4.2) に代入して、 $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の係数を等値すると

$$\begin{cases} \hat{u}_0'' + f(0, \hat{u}_0) = 0, & 0 < \xi < \infty, \\ \hat{u}_0(0) = a, \quad \hat{u}_0(\infty) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \hat{u}_k'' + f_u(0, \hat{u}_0) \hat{u}_k = F_k(\xi), & 0 < \xi < \infty, \\ \hat{u}_k(0) = 0, \quad \hat{u}_k(\infty) = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.4)$$

但し、 $F_k(\xi)$  は  $\hat{u}_i$ , ( $0 \leq i \leq k-1$ ) のみに依存する。

微分方程式 (4.3) の第 1 式の解軌道は図 2 のようになることから、(4.3) は単調減少な解  $\hat{u}(\xi)$

を持ち、 $\xi \rightarrow \infty$  では指数関数的に 0 に減衰することがわかる。これらの性質を利用すれば (4.4) も逐次、解  $\hat{u}_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) を持ち、 $\xi \rightarrow \infty$  では指数関数的に 0 に減衰することがわかる。以上で、外部解と外部解の修正解の漸近展開が得られた。正確には次のことが言え

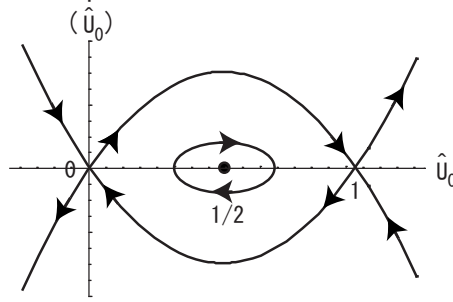


図 2: 相平面図

た。cutoff 関数  $\theta(x) \in C^\infty[0, 1]$  を次のように定義する。 $\theta(x) = 1$ ,  $x \in [0, 1/4]$ ;  $\theta(x) = 0$ ,  $x \in [1/2, 1]$ ;  $0 \leq \theta(x) \leq 1$ ,  $x \in (1/4, 1/2)$ 。任意の自然数  $m$  に対して、外部解  $U(x; \varepsilon)$ 、外部解の修正解  $\hat{u}(\xi; \varepsilon)$  の  $\varepsilon^m$  までの部分和を  $U^m(x; \varepsilon)$ 、 $\hat{u}^m(\xi; \varepsilon)$  と書き、合成解を

$$u_c^m(x; \varepsilon) = U^m(x; \varepsilon) + \theta(x)\hat{u}^m(x/\varepsilon; \varepsilon)$$

とおくとき、

$$\begin{cases} P_\varepsilon u_c^m = O(\varepsilon^{m+1}), & 0 \leq x \leq 1, \\ u_c^m(0) = a, (u_c^m)'(1) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

が成り立つ。ここで、cutoff 関数を用いた理由は境界条件が厳密に満たされるように考慮したためである。これが接合漸近展開法による (4.1) の近似解の候補であるが、この近似の意味は (4.5) を満たすことのみであり、(4.1) の解が存在して、 $u_c^m(x; \varepsilon)$  がその一様近似である正当性は何も保障されていない。(でもこのことは非常に重要である。)

正当性の証明を与えるために、幾つかの準備を行う。まず、関数空間を設定しよう。

$$\begin{aligned} C_\varepsilon^2[a, b] &= \left\{ u \in C^2[a, b] \mid \sum_{k=0}^2 \max_{a \leq x \leq b} \left| \left( \varepsilon \frac{d}{dx} \right)^k u(x) \right| < \infty \right\}, \\ C_{\varepsilon, a}^2[a, b] &= \{ u \in C_\varepsilon^2[a, b] \mid u'(a) = 0, u(b) = 0 \}, \\ C_{\varepsilon, b}^2[a, b] &= \{ u \in C_\varepsilon^2[a, b] \mid u(a) = 0, u'(b) = 0 \}. \end{aligned}$$

真の解  $u(x; \varepsilon)$  を以下の形で求めよう。

$$u(x; \varepsilon) = u_c^m(x; \varepsilon) + \varepsilon^m r(x; \varepsilon)$$

これを (4.1) 式に代入して  $r$  に関して整頓すると

$$\begin{cases} \varepsilon^2 r'' + \varepsilon^{-m} f(x, u_c^m + \varepsilon^m r) + \varepsilon^2 (u_c^m)'' = 0, & 0 < x < 1, \\ r(0) = 0, r'(1) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$



(4.6) を簡単に  $T(r; \varepsilon) = 0$  と表すと,  $T$  は  $C_{\varepsilon,1}^2[0, 1]$  から  $C[0, 1]$  への滑らかな写像となる。次の陰関数定理は重要である。

**定理 4.1**(陰関数定理)  $T(r; \varepsilon)$  は任意の  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  に対して, 定数  $K > 0$  が存在して

$$(i) \quad \|T(0, \varepsilon)\|_{C[0,1]} = O(\varepsilon) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0;$$

(ii) 任意の  $r_1, r_2 \in C_{\varepsilon,1}^2[0, 1]$  に対して

$$\left\| \frac{\partial T}{\partial r}(r_1; \varepsilon) - \frac{\partial T}{\partial r}(r_2; \varepsilon) \right\|_{C_{\varepsilon,1}^2[0,1] \rightarrow C[0,1]} \leq K \|r_1 - r_2\|_{C_{\varepsilon,1}^2[0,1]};$$

$$(iii) \quad \left\| \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^{-1}(0; \varepsilon) \right\|_{C[0,1] \rightarrow C_{\varepsilon,1}^2[0,1]} \leq K$$

が成り立つとき,  $\varepsilon_1 > 0$  が存在して, 任意の  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  に対して  $T(r(x; \varepsilon); \varepsilon) = 0$  を満たす解  $r(x; \varepsilon) \in C_{\varepsilon,1}^2[0, 1]$  が存在して  $\|r(x; \varepsilon)\|_{C_{\varepsilon,1}^2[0,1]} = O(\varepsilon)$  を満たす。

(4.6) の方程式に対して, 定理の仮定 (i) - (iii) をチェックすればよい。(i) は (4.5) そのものである。これで, 接合漸近展開法の重要性が理解して頂けたと思う。(ii), (iii) に関しても成り立つが, これは読者の演習とする。

以上のことから,

**定理 4.2**(正当性) 任意の  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  に対して, (4.1) の解  $u(x; \varepsilon) \in C_{\varepsilon,1}^2[0, 1]$  が存在し, 任意の自然数  $m$  に対して,  $u(x; \varepsilon) = u_c^m(x; \varepsilon) + \varepsilon^m r(x; \varepsilon)$  と表される。但し,  $r(x; \varepsilon) = O(\varepsilon) \in C_{\varepsilon,1}^2[0, 1]$  である。

これで接合漸近展開法で得た形式解の正当性が示された。

**注意 4.1** 外部解の構成のとき,  $U_0 = 0$  としたが,  $U_0 = 1$  としても同様の結果が得られる (図 3 参照)。

**注意 4.2** ここでは不動点定理を基礎とする陰関数定理を用いて解の存在を証明したが, 証明方法は他にも存在する。この問題のように比較定理が成り立つような問題に対しては, 接合漸近展開法で得た近似解を利用して sub-solution, super-solution を構成し, 解の存在, 及び解の  $\varepsilon$  に関する評価を示すことが出来る ([12])。また, 勾配系のようなエネルギーが存在する場合にもこの近似解を利用して解の存在を示すことが出来る ([3])。さらに, 接合漸近展開法とは異なる方法 (幾何学的な特異摂動法) も適用可能である ([1],[7],[22])。

## 5. 内部遷移層の問題

これまでは境界で急激な状態の遷移を持つ場合 (境界層) を見てきたが, 同じような現象が

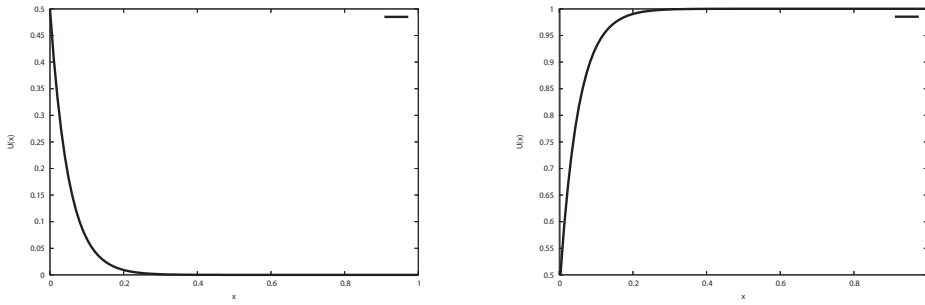


図 3:  $u(x; \varepsilon)$  の挙動 (左図)  $U_0 = 0, a = 0.5$  (右図)  $U_0 = 1, a = 0.5$

内部で起こる例が多数存在する。ここでは、最も簡単な例を紹介しよう。

**例 4** 非線形特異摂動問題 (nonlinear singular perturbation problem) 次の 2 点境界値問題：

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & -1 < x < 1, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ u'(-1) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

を考えよう。 $f(x, u) = u(1-u)(u-a(x))$ ,  $a(x) \in C^\infty[-1, 1]$ ,  $0 < a(x) < 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ 。さらに,  $a(0) = 1/2$ ,  $a'(0) \neq 0$ ,  $a(x) \neq 1/2 (x \neq 0)$  と仮定する (今度の仮定は本質である)。これは 4 節で考えた例 3 と同じ問題であるが, 境界条件だけが異なっている。この問題の数値解は図 4 のようになる。

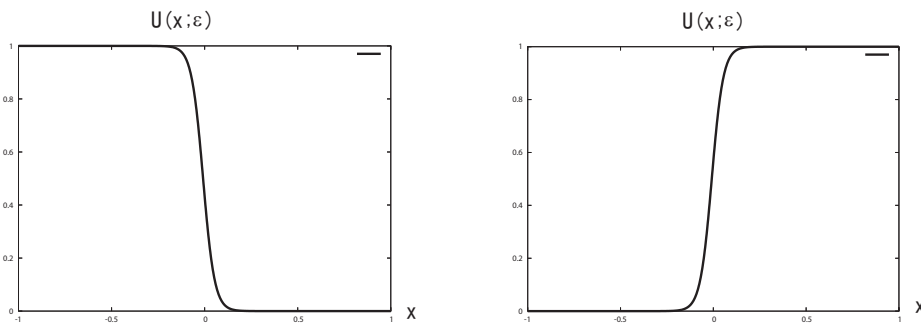


図 4:  $u(x; \varepsilon)$  の挙動 (内部遷移層)  $a(x) = x/4 + 1/2, \varepsilon = 0.1$

図 4 によると,  $x = 0$  の近傍で急激な変化が起こっているように見える。しかし, その正確な位置が不明なので,  $u(\ell(\varepsilon); \varepsilon) = 1/2$  で  $\ell(\varepsilon)$  を定義し, それを遷移層の位置と考える。そして, (5.1) を 2 つの問題：

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & -1 < x < \ell(\varepsilon), \\ u'(-1) = 0, u(\ell(\varepsilon)) = 1/2, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + f(x, u) = 0, & \ell(\varepsilon) < x < 1, \\ u(\ell(\varepsilon)) = 1/2, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

と分割する。すると, (5.2), (5.3) はそれぞれ,  $x = \ell(\varepsilon)$  に境界層を持つ問題と考えることが出来る。これは4節で取り扱った問題と同じである。しかし,  $\ell(\varepsilon)$  は未知であることに注意しよう。そこで, (5.2), (5.3) に対して, 4節の方法で得た解を  $u^-(x; \varepsilon; \ell(\varepsilon)), u^+(x; \varepsilon; \ell(\varepsilon))$  とする。これを利用して (5.1) の解を得るには

$$\frac{d}{dx} u^-(\ell(\varepsilon); \varepsilon; \ell(\varepsilon)) = \frac{d}{dx} u^+(\ell(\varepsilon); \varepsilon; \ell(\varepsilon)) \quad (5.4)$$

が成り立てばよい。この (5.4) が  $\ell(\varepsilon)$  を特徴づける関係式である。実際, (5.2), (5.3) を解くときは, 境界の一端が  $\varepsilon$  の未知関数であるので, 変数変換して, 境界を既知の値に変換してから行う。具体的には, (5.2), (5.3) において, それぞれ  $y = (x - \ell(\varepsilon))/(1 + \ell(\varepsilon))$ ,  $y = (x - \ell(\varepsilon))/(1 - \ell(\varepsilon))$  と変数変換して,

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{yy} + (1 + \ell(\varepsilon))^2 f((1 + \ell(\varepsilon))y + \ell(\varepsilon), u) = 0, & -1 < y < 0, \\ u_y(-1) = 0, u(0) = 1/2, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{yy} + (1 - \ell(\varepsilon))^2 f((1 - \ell(\varepsilon))y + \ell(\varepsilon), u) = 0, & 0 < y < 1, \\ u(0) = 1/2, u_y(1) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

と書き換える。 $\ell(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \ell_k$  と漸近展開出来ていると仮定して, 4節の方法により接合漸近展開法を適用し, その近似解に対して陰関数定理を利用して真の解  $u^-(y; \varepsilon; \ell(\varepsilon)), u^+(y; \varepsilon; \ell(\varepsilon))$  を求める。上記の変数変換により, (5.4) は

$$(1 - \ell(\varepsilon)) \frac{d}{dy} u^-(0; \varepsilon; \ell(\varepsilon)) = (1 + \ell(\varepsilon)) \frac{d}{dy} u^+(0; \varepsilon; \ell(\varepsilon)) \quad (5.7)$$

となるので, この関係式を利用して  $\ell(\varepsilon)$  を決定する。(5.5), (5.6) の外部解は  $U_0^-(y; \varepsilon) = 1$ ,  $U_0^+(y; \varepsilon) = 0$  となり, 外部解の修正解を  $\hat{u}^-(\xi; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{u}_k^-(\xi)$ ,  $\hat{u}^+(\xi; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{u}_k^+(\xi)$  (但し,  $\xi = y/\varepsilon$ ) とおくと,  $\hat{u}_k^-(\xi)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) は

$$\begin{cases} \ddot{\hat{u}}_0^- + (1 + \ell_0)^2 f(\ell_0, 1 + \hat{u}_0^-) = 0, & -\infty < \xi < 0, \\ \hat{u}_0^-(0) = -1/2, \hat{u}_0^-(-\infty) = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \ddot{\hat{u}}_k^- + (1 + \ell_0)^2 f_u(\ell_0, 1 + \hat{u}_0^-) \hat{u}_k^- = -2(1 + \ell_0) f(\ell_0, 1 + \hat{u}_0^-) \ell_k \\ \quad - (1 + \ell_0)^2 f_x(\ell_0, 1 + \hat{u}_0^-) \ell_k + F_k^-(\xi), & -\infty < \xi < 0, \\ \hat{u}_k^-(0) = 0, \hat{u}_k^-(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

を満たす関数であり,  $\hat{u}_k^+(\xi)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) は

$$\begin{cases} \ddot{\hat{u}}_0^+ + (1 - \ell_0)^2 f(\ell_0, \hat{u}_0^+) = 0, & 0 < \xi < \infty, \\ \hat{u}_0^+(0) = 1/2, \hat{u}_0^+(\infty) = 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_k^+ + (1 - \ell_0)^2 f_u(\ell_0, \hat{u}_0^+) \hat{u}_k^+ = 2(1 - \ell_0) f(\ell_0, \hat{u}_0^+) \ell_k \\ \quad - (1 - \ell_0)^2 f_x(\ell_0, \hat{u}_0^+) \ell_k + F_k^+(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \\ \hat{u}_k^+(0) = 0, \quad \hat{u}_k^+(\infty) = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

を満たす関数であり,  $F_k^\pm(\xi)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) は  $\hat{u}_0^\pm, \hat{u}_2^\pm, \dots, \hat{u}_{k-1}^\pm$ ;  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{k-1}$  にのみ依存する関数で  $\xi \rightarrow \pm\infty$  のとき指数関数的に 0 に減衰する。

(5.8), (5.10) が共に解を持つためには,  $a(\ell_0) = 0$  でなければならない (図 2 参照)。したがって,  $a(\ell_0) = 0$  を仮定すると (5.8), (5.10), (5.9), (5.11) ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) は一意解を持つ。 $a(x)$  に対する仮定より, まず,  $\ell_0 = 0$  となる。以上で, (5.5), (5.6) の合成解は構成出来た。

$$u_c^-(y, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{u}_k^-(\xi), \quad u_c^+(y, \varepsilon) = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{u}_k^+(\xi). \quad (5.12)$$

これを利用すれば, (5.5), (5.6) が真の解  $u^\pm(y; \varepsilon)$  を持つことが証明でき, その漸近展開は (5.12) で与えられる。最後に, (5.7) を用いて  $\ell(\varepsilon)$  を決定しよう。まず,  $\hat{u}_k^\pm$  は  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_k$  にのみ依存していることに注意しよう。 $u^\pm(y; \varepsilon)$  の漸近展開  $u_c^\pm(y, \varepsilon)$  を (5.7) に代入して,  $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の係数を等値する。 $\ell_0 = 0$  は既に決まっているので,  $k = 0$  のとき,  $\hat{u}_0^-(0) = \hat{u}_0^+(0)$  となるが, (5.8), (5.10) より

$$\hat{u}_0^-(0) = -\sqrt{2 \int_{1/2}^1 f(0, s) ds}, \quad \hat{u}_0^+(0) = -\sqrt{2 \int_{1/2}^0 f(0, s) ds}$$

と表され, 仮定  $a(0) = 1/2$  より自動的に成り立つ。任意の自然数  $s$  に対して,  $k = 0, 1, 2, \dots, s-1$  まで  $\varepsilon^k$  の係数を等値することにより,  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{s-1}$  が決定されたと仮定する。 $\varepsilon^s$  の係数を等値すると,

$$\hat{u}_s^+(0) - \hat{u}_s^-(0) = p_1 \quad (5.13)$$

となる。但し,  $p_1$  は既知の定数。(5.9), (5.11) より

$$\begin{cases} \hat{u}_s^-(0) &= -\int_{-\infty}^0 \hat{u}_0^-(\eta) [-2\ell_s f(0, 1 + \hat{u}_0^-) - \ell_s f_x(0, 1 + \hat{u}_0^-) + F_s^-(\eta)] d\eta, \\ &= 2\ell_s \int_{1/2}^1 f(0, s) ds / \hat{u}_0^-(0) + \ell_s \int_{1/2}^1 f_x(0, s) ds / \hat{u}_0^-(0) + p_2, \\ \hat{u}_s^+(0) &= -\int_0^{\infty} \hat{u}_0^+(\eta) [2\ell_s f(0, \hat{u}_0^+) - \ell_s f_x(0, \hat{u}_0^+) + F_s^+(\eta)] d\eta / \hat{u}_0^+(0), \\ &= -2\ell_s \int_{1/2}^0 f(0, s) ds / \hat{u}_0^+(0) + \ell_s \int_{1/2}^0 f_x(0, s) ds / \hat{u}_0^+(0) + p_3. \end{cases}$$

但し,  $p_2, p_3$  は定数。これを (5.13) に代入すると,

$$\ell_s \int_0^1 f_x(0, s) ds / \hat{u}_0^-(0) = p_4. \quad (5.14)$$

となる。但し,  $p_4$  は定数。一方,

$$\int_0^1 f_x(0, s) ds = -a'(0) \int_0^1 s(1-s) ds = -a'(0)/6 \neq 0 \quad (5.15)$$

より, (5.14) を満たす  $l_s$  は一意に決まる。以上より,  $l_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) は逐次決定される。 $l(\varepsilon)$  の正当性を示すには, 任意の自然数  $m > 1$  に対して

$$l(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k l_k + \varepsilon^m \tilde{l}$$

とおき, (5.7) に代入する。その式を

$$\Phi(\tilde{l}; \varepsilon) \equiv \varepsilon^{-m} \left\{ (1 + l(\varepsilon)) \frac{d}{dy} u^+(0; \varepsilon; l(\varepsilon)) - (1 - l(\varepsilon)) \frac{d}{dy} u^-(0; \varepsilon; l(\varepsilon)) \right\} = 0$$

と書くとき,

$$\Phi(l_m; \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{l}}(l_m; 0) = \int_0^1 f_x(0, s) ds / \dot{u}_0^-(0)$$

が成り立つ。ここで, インデックス  $\mathbf{I}$  を

$$\mathbf{I} = \text{sign} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{l}}(l_m; 0) \right\} = \text{sign} \left\{ -\frac{a'(0)}{\dot{u}_0^-(0)} \right\}$$

で定義する。但し,

$$\text{sign}\{x\} = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x = 0, \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

である。 $\mathbf{I} \neq 0$  のとき, 陰関数定理より,  $\Phi(\tilde{l}(\varepsilon); \varepsilon) = 0$  を満たす  $\tilde{l}(\varepsilon) = l_m + O(\varepsilon)$  が一意に存在する。以上より次の結果をえる。

**定理 5.1** 任意の  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  に対して, (4.1) の解  $u(x; \varepsilon) \in \dot{C}_{\varepsilon,1}^2[-1, 1] \equiv \{u \in C_\varepsilon^2[-1, 1] \mid u'(-1) = 0 = u'(1)\}$  が存在し, 任意の自然数  $m$  に対して,  $u(x; \varepsilon) = u_c^m(x; \varepsilon) + \varepsilon^m r(x; \varepsilon)$  と表される。但し,

$$u_c^m(x; \varepsilon) = \begin{cases} 1 + \theta \left( \frac{-(x-l(\varepsilon))}{1+l(\varepsilon)} \right) \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \hat{u}_k^- \left( \frac{-(x-l(\varepsilon))}{\varepsilon(1+l(\varepsilon))} \right) & \text{for } -1 \leq x \leq l(\varepsilon), \\ 0 + \theta \left( \frac{x-l(\varepsilon)}{1-l(\varepsilon)} \right) \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \hat{u}_k^+ \left( \frac{x-l(\varepsilon)}{\varepsilon(1-l(\varepsilon))} \right) & \text{for } l(\varepsilon) \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$l(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k l_k + \varepsilon^m \tilde{l}(\varepsilon)$ ,  $r(x; \varepsilon) = O(\varepsilon) \in \dot{C}_{\varepsilon,1}^2[-1, 1]$  である。

定理 5.1 の  $u(x; \varepsilon)$  のように領域の内部  $x = l(\varepsilon)$  で急激な状態遷移を表す現象を**内部遷移層** (interior transition layer) という。

**注意 5.1** (5.1) の解の存在のためには, インデックス  $\mathbf{I} \neq 0$  が重要であるが, 解の安定性には  $\mathbf{I} = 1$  あるいは  $\mathbf{I} = -1$  が重要な情報を与える (6 章参照)。

**注意 5.2** (5.1) は別の形の解 (図 4 の右図) を持つことが同様に証明出来る。

## 6. 安定性解析

$u^\varepsilon = u(x; \varepsilon)$  を 5 節で構成した解とすると,  $u^\varepsilon$  は次の方程式

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x, u), & t > 0, -1 < x < 1, \\ u_x(t, -1) = 0, u_x(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

の定常解である。ここでは,  $u^\varepsilon$  の安定性を考えよう。 $u^\varepsilon$  での線形化固有値問題は

$$\mathcal{L}^\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} u + f_u(x, u^\varepsilon) u = \lambda u, \quad -1 < x < 1 \quad (6.2)$$

と表される。

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}^\varepsilon) = \dot{C}_\varepsilon^2[-1, 1] \subset C[-1, 1], \quad \dot{C}_\varepsilon^2[-1, 1] = \{u \in C_\varepsilon^2[-1, 1] \mid u'(-1) = 0 = u'(1)\}$$

$\mathcal{L}^\varepsilon$  は自己共役なコンパクト作用素であるので, 安定性を調べるためには実固有値の分布だけを調べれば十分である。まず, 固有値問題 (6.2) を次のような 1 階の方程式に書き換える。

$$\begin{cases} \varepsilon p_x = q, \\ \varepsilon q_x = \{\lambda - f_u(x, u^\varepsilon)\} p \end{cases} \quad -1 < x < 1, \quad (6.3)$$

と

$$q(-1) = 0, q(1) = 0. \quad (6.4)$$

任意の  $\lambda \in \mathbf{R}$  に対して, 初期条件

$$\begin{bmatrix} p_1(-1) \\ q_1(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_2(-1) \\ q_2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満たす (6.3) の解をそれぞれ

$$\mathbf{V}_1(x; \varepsilon; \lambda) = \begin{bmatrix} p_1(x; \varepsilon; \lambda) \\ q_1(x; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2(x; \varepsilon; \lambda) = \begin{bmatrix} p_2(x; \varepsilon; \lambda) \\ q_2(x; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix},$$

初期条件

$$\begin{bmatrix} p_3(1) \\ q_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_4(1) \\ q_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満たす (6.3) の解をそれぞれ

$$\mathbf{V}_3(x; \varepsilon; \lambda) = \begin{bmatrix} p_3(x; \varepsilon; \lambda) \\ q_3(x; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_4(x; \varepsilon; \lambda) = \begin{bmatrix} p_4(x; \varepsilon; \lambda) \\ q_4(x; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix}$$

とする。このとき,  $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$  と  $\{\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4\}$  は共に線形独立な (6.3) の解である。従って, (6.3) の任意の解は  $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$  あるいは  $\{\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4\}$  の線形結合で表されるので,  $q(-1) = 0$  を満たす

(6.3) の任意の解は  $\mathbf{V}_1$  の定数倍で表され、 $q(1) = 0$  を満たす (6.3) の任意の解は  $\mathbf{V}_3$  の定数倍で表される。

固有値  $\lambda$  に対する (6.3), (6.4) の非自明な解  $\mathbf{V}(x; \varepsilon; \lambda) = (p(x; \varepsilon; \lambda), q(x; \varepsilon; \lambda))^t$  は非零な定数  $\alpha, \beta$  が存在して

$$\mathbf{V}(x; \varepsilon; \lambda) = \alpha \mathbf{V}_1(x; \varepsilon; \lambda) = \beta \mathbf{V}_3(x; \varepsilon; \lambda)$$

と表される。このことは  $\lambda$  が  $\mathcal{L}^\varepsilon$  の固有値であることと  $\mathbf{V}_1(x; \varepsilon; \lambda)$  と  $\mathbf{V}_3(x; \varepsilon; \lambda)$  が線形従属であることは同値であることを意味している。 $G(x; \varepsilon; \lambda)$  を

$$G(x; \varepsilon; \lambda) = [\mathbf{V}_1(x; \varepsilon; \lambda), \mathbf{V}_3(x; \varepsilon; \lambda)] = \begin{bmatrix} p_1(x; \varepsilon; \lambda) & p_3(x; \varepsilon; \lambda) \\ q_1(x; \varepsilon; \lambda) & q_3(x; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix}$$

と定義すると、 $G(x; \varepsilon; \lambda)$  は次の行列微分方程式

$$\varepsilon \frac{d}{dx} G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f_u(x, u^\varepsilon) & 0 \end{bmatrix} G$$

を満たすので、任意の  $-1 \leq x \leq 1$  に対して、正定数  $C$  が存在して、次の関係式を得る。

$$\det G(x; \varepsilon; \lambda) = C \cdot \det G(\ell(\varepsilon); \varepsilon; \lambda).$$

さらに、

$$g(\varepsilon; \lambda) = \det G(\ell(\varepsilon); \varepsilon; \lambda)$$

とおくと、 $g(\varepsilon; \lambda)$  は  $\lambda \in \mathbf{R}$  の滑らかな関数であり、任意の  $-1 \leq x \leq 1$  に対して  $\det G(x; \varepsilon; \lambda) = 0$  であることは  $g(\varepsilon; \lambda) = 0$  と同値である。

**補題 6.1**  $\lambda \in \mathbf{R}$  が  $\mathcal{L}^\varepsilon$  の固有値であることは  $g(\varepsilon; \lambda) = 0$  の解であることと同値である。

さて、次の特異摂動問題を考えよう。 $p^\pm(x; \varepsilon; \lambda)$  を

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon p^- = \lambda p^-, & -1 < x < \ell(\varepsilon), \\ p_x^-(-1) = 0, p^-(\ell(\varepsilon)) = 1, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon p^+ = \lambda p^+, & \ell(\varepsilon) < x < 1, \\ p^+(\ell(\varepsilon)) = 1, p^+(1) = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

の解とする。このとき、

$$\mathbf{V}_1(x; \varepsilon; \lambda) = \begin{bmatrix} p^-(x; \varepsilon; \lambda)/p^-(-1; \varepsilon; \lambda) \\ p_x^-(x; \varepsilon; \lambda)/p_x^-(-1; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix}, \quad -1 \leq x \leq \ell(\varepsilon),$$

$$\mathbf{V}_3(x; \varepsilon; \lambda) = \begin{bmatrix} p^+(x; \varepsilon; \lambda)/p^+(1; \varepsilon; \lambda) \\ p_x^+(x; \varepsilon; \lambda)/p_x^+(1; \varepsilon; \lambda) \end{bmatrix}, \quad \ell(\varepsilon) \leq x \leq 1$$

はそれぞれの初期条件を満たしていることに注意しよう。4, 5 節と同じ方法 (接合漸近展開法) で, 任意の  $\lambda \geq 0$  に対して, (6.5),(6.6) の解を構成的に求めることが出来る。

**注意 6.1** パラメータ  $\varepsilon$  に関する接合漸近展開法で (6.5),(6.6) の解を構成するとき,  $\lambda$  の  $\varepsilon$  依存性を考えなければならない。実際 (i)  $\lambda = O(\varepsilon)$ , (ii)  $\lambda/\varepsilon \rightarrow \infty, as \varepsilon \rightarrow 0$  の 2 つの場合に分ける必要がある。詳しくは [15] を参照。

(6.5),(6.6) の解を利用して  $g(\varepsilon; \lambda)$  を計算し, その零点を見つけることが出来る。

**定理 6.2** 十分大きな  $l > 0$  に対して,  $\varepsilon_2 > 0$  が存在し, 任意の  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$  に対して,  $g(\varepsilon; \lambda) = 0$  は  $\lambda \geq -\varepsilon l$  において, ただ 1 つの解

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \text{sign}\{\dot{u}_0^-(0)\} \frac{a'(0)}{6\{\int_{-\infty}^0 (\dot{u}_0^-(\xi))^2 d\xi + \int_0^{\infty} (\dot{u}_0^+(\xi))^2 d\xi\}} + o(\varepsilon), \quad as \varepsilon \rightarrow 0$$

を持つ。

**定理 6.3** (6.1) の定常解  $u(x; \varepsilon)$  のインデックスが  $\mathbf{I} = +1$  のとき, その定常解は安定であり, インデックスが  $\mathbf{I} = -1$  のとき, その定常解は不安定である。さらに, 不安定解の不安定多様体の次元は 1 である。

**系 6.4** Jump-up 型 (図 4 の右図) の内部遷移層を持つ解  $u(x; \varepsilon)$  は  $a'(0) < 0$  のとき安定であり,  $a'(0) > 0$  のとき不安定である。逆に, Jump-down 型 (図 4 の左図) の内部遷移層を持つ解  $u(x; \varepsilon)$  は  $a'(0) > 0$  のとき安定であり,  $a'(0) < 0$  のとき不安定である。

**注意 6.3** 安定性の証明に関しては, 様々な方法がある。上記以外には Lyapunov-Schmidt 法 ([9]), SLEP 法 ([26]), 変分法的方法 ([3]), 幾何学的方法 ([8], [24]) などがある。

## 7. 反応拡散系と空間多次元問題

化学反応論や数理生物学における様々な問題, 燃焼問題, 凝固問題などにおけるパターン形成の解明において, 内部遷移層現象を初めとする様々な特異摂動問題が提起され, それらの遷移層を持つ解の存在や安定性, 解の分岐現象の解析に接合漸近展開法の考え方は威力を発揮している。局所分岐理論で扱える多くの場合は自明解からの近傍に限定され, 分岐点から離れた大域的な解, すなわち, 大振幅を持つ解を捕らえることの出来る方法が, ここで述べた特異摂動法である。特に 2 変数反応拡散系に関しては, ここ 20 年の間に様々な角度から膨大な研究が行われた。これらについて述べる紙面もないので, 参考文献を挙げるに留める。

- ・ 定常解の存在と安定性に関する文献 : [4],[20],[23],[26], [31], [27].
- ・ 進行波解の存在と安定性に関する文献 : [6],[19], [28], [10], [17], [18], [16].



空間多次元の問題では Allen-Cahn 等のスカラー方程式に関しては幾つかの結果は提出されているが、システムになると急激に難しさが増大する。それは、外部問題での第 0 近似解を求める問題は内部遷移層に対応する内部境界を同時に求めるといった自由境界問題となり、幾何学における曲面の運動と密接に関係していて、これからの研究が期待される ([5], [14], [32],[34],[29], [13], [33])。

## 8. 終わりに

この講演では、接合漸近展開法の基本的な考え方を中心に簡単な例のみを上げ解説したが、他にも日本語の優れた解説があるので、是非参考にして頂きたい ([21], [11], [25] 等)。特に [25] には、基本的な考え方から研究の第一線までのトピックスが網羅されており、パターン形成の数理に対する研究姿勢が伺える文献である。解析的特異摂動法の一般的な解説書としては、[30], [2] などがあり、幾何学的特異摂動法の解説書としては、[22] などが適当と思われる。

最後に、本講演の機会を与えて下さいました組織委員の皆様へ深く感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] G.A. Carpenter, A Geometric Approach to Singular Perturbation Problems with Application to Nerve Impulse Equations, *J. Diff. Eqs.*, **23**(1977), 335-367.
- [2] W. Eckhaus, *Asymptotic Analysis of Singular Perturbation*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [3] S.-I. Ei, M. Kuwamura and Y. Morita, A variational approach to singular perturbation problems in reaction-diffusion systems, *Phys. D*, **207**(2005), 171-219.
- [4] P.C. Fife, Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second order equations, *J. Math. Anal.*, **54**(1976), 497-521.
- [5] P.C. Fife, *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **53**, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [6] P.C. Fife and J.B. MacLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **65**(1977), 335-361.
- [7] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.*, **31**(1979), 53-98.
- [8] R. Gardner and C.K.R.T. Jones, A stability index for steady state solutions of boundary value problems for parabolic systems, *J. Diff. Eqs.*, **91**(1991), 181-203.

- [9] J. Hale and K. Sakamoto, Existence and stability of transition layers, *Japan. J. Appl. Math.*, **5**(1988), 367-405.
- [10] Y. Hosono, Travelling waves for some biological systems with density dependent diffusion, *Japan J. Appl. Math.*, **4**(1987), 297-359.
- [11] 細野雄三, 特異摂動法 –境界層と内部遷移層の解析–, 京都産業大学計算機科学研究所報, 6 卷 (1989), 19-50.
- [12] F.A. Howes, *Boundary-interior layer interactions in nonlinear singular perturbation theory*, Memoirs of Amer. Math. Soc., **203**(1978).
- [13] T. Iibun and K. Sakamoto, Internal layers intersecting the boundary of domain in the Allen-Cahn equations, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **18**(2001), 29-42.
- [14] H. Ikeda, On the asymptotic solutions for a weakly coupled elliptic boundary value problem with a small parameter, *Hiroshima Math. J.*, **16**(1986), 227-250.
- [15] H. Ikeda, Stability Characteristics of Transition Layer Solutions, *J. Dyna. Diff. Eqs.*, **5**(1993), 625-671.
- [16] H. Ikeda, Existence and stability of pulse waves bifurcated from front and back waves in bistable reaction-diffusion systems, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **15**(1998), 163-231.
- [17] H. Ikeda and T. Ikeda, Bifurcation phenomena from standing pulse solutions in some reaction-diffusion systems, *J. Dyna. Diff. Eqs.*, **12**(2000), 117-167.
- [18] T. Ikeda, H. Ikeda and M. Mimura, Hopf bifurcation of travelling pulses in some bistable reaction-diffusion systems, *Meth. Appl. Anal.*, **7**(2000), 165-193.
- [19] H. Ikeda, M. Mimura and Y. Nishiura, Global bifurcation phenomena of traveling wave solutions for some bistable reaction-diffusion systems, *Nonlinear Anal. TMA*, **13**(1989), 507-526.
- [20] M. Ito, A remarks on singular perturbation methods, *Hiroshima Math. J.*, **14**(1985), 619-629.
- [21] 伊藤正幸, 特異摂動論における漸近展開法, 数学 (岩波書店), **38**(1988), 150-164.
- [22] C.K.R.T. Jones, *Geometric Singular Perturbation Theory*, Lecture Notes in Math., **1609**(1995), 44-118.
- [23] M. Mimura, M. Tabata and Y. Hosono, Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, *SIAM J. Math. Anal.*, **11**(1980), 613-631.

- [24] S. Nii, An extension of the stability index for travelling-wave solutions and its application to bifurcations, *SIAM J. Math. Anal.*, **28**(1997), 402-433.
- [25] 西浦廉政, 非線形問題 1(パターン形成の数理), 岩波書店, 1999.
- [26] Y. Nishiura and H. Fujii, Stability of singularly perturbed solutions of reaction-diffusion equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **18**(1987), 1726-1770.
- [27] Y. Nishiura and M. Mimura, Layer oscillations in reaction-diffusion systems, *SIAM J. Appl. Math.*, **49**(1989), 481-514.
- [28] Y. Nishiura, M. Mimura, H. Ikeda and H. Fujii, Singular limit analysis of stability of travelling wave solutions in bistable reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **21**(1990), 85-122.
- [29] Y. Nishiura and H. Suzuki, Nonexistence of higher dimensional stable Turing patterns in the singular limit, *SIAM J. Math. Anal.*, **29**(1998), 1087-1105.
- [30] R.E. O'Malley, Jr, *Introduction to singular perturbations*, Academic Press, New York, 1974.
- [31] K. Sakamoto, Construction and stability analysis of transition layer solution in reaction-diffusion systems, *Tohoku Math. J.*, **42**(1990), 17-44.
- [32] K. Sakamoto, Internal layers in high-dimensional domains, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **128**(1998), 359-401.
- [33] K. Sakamoto, Existence and stability of three-dimensional boundary-interior layers for the Allen-Cahn equation, *Taiwnese J. Math.*, **9**(2005), 331-358.
- [34] H. Suzuki, Asymptotic characterization of stationary interfacial patterns for reaction diffusion systems, *Hokkaido Math. J.*, **26**(1997), 631-667.