Γ 関数と B(ベータ)関数

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \qquad (s > 0)$$

を Γ 関数とよぶ。

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \qquad (s > 0)$$

を Γ 関数とよぶ。

[性質]

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \qquad (s > 0)$$

を Γ 関数とよぶ。

[性質]

- $\Gamma(1) = 1 \qquad \because \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \qquad (s > 0)$$

を Γ 関数とよぶ。

[性質]

- $\Gamma(1) = 1 \qquad \because \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 　　特に $\Gamma(n) = (n-1)!$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \qquad (s > 0)$$

を Γ 関数とよぶ。

[性質]

- $\Gamma(1) = 1 \qquad \because \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad$ 特に $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\because \Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} dx$$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \qquad (s > 0)$$

を Γ 関数とよぶ。

[性質]

- $\Gamma(1) = 1 \qquad \because \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$　　特に $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\because \Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} dx$$

$$= \left[-x^s e^{-x}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s)$$

Γ 関数と B 関数

[性質続き]

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

[性質続き]

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\because \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ において $x = t^2$ と置換すると

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

[性質続き]

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\because \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ において $x = t^2$ と置換すると

$$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

Γ 関数と B 関数

[性質続き]

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \text{ において } x = t^2 \text{ と置換すると}$$
$$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$
$$= \sqrt{\pi}$$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

[性質続き]

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \text{ において } x = t^2 \text{ と置換すると}$$
$$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$
$$= \sqrt{\pi}$$

[スターリングの公式]

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\mathit{\Gamma}(s+1)}{\sqrt{2\pi} s^{(s+1)/2} e^{-s}} = 1$$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p, q > 0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

- $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$ **(**$x = \cos^2\theta$ とおく。**)**

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

- $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$ ($x = \cos^2\theta$ とおく。)
- $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

- $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$ 　($x = \cos^2\theta$ とおく。)
- $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$\because$ $$\Gamma(s)=2\int_0^{\infty} e^{-t^2}t^{2s-1}dt$$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

- $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$ **(**$x=\cos^2\theta$ とおく。**)**
- $$B(p,q)=\frac{\mathit{\Gamma}(p)\mathit{\Gamma}(q)}{\mathit{\Gamma}(p+q)}$$

$\because \Gamma(s)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}dt \ \therefore \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

- $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$ 　　($x = \cos^2\theta$ とおく。)
- $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\because \Gamma(s)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}dt \ \therefore \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$$

$$=\int_0^\infty 2e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

Γ 関数と B 関数

[定義]

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

を B(ベータ) 関数とよぶ。

[性質]

- $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$ ($x=\cos^2\theta$ とおく。)
- $$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\because \Gamma(s)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}dt \ \therefore \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$$

$$=\int_0^\infty 2e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta=\Gamma(p+q)B(p,q)$$

Γ 関数と B 関数

[例題]

自然数 n について、定積分

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

Γ 関数と B 関数

[例題]

自然数 n について、定積分

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$$I(n) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

[例題]

自然数 n について、定積分

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

を $\mathit{\Gamma}$ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$$I(n) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathit{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\mathit{\Gamma}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Γ 関数と B 関数

これより

$$I(2n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + 1\right)}$$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

これより

$$I(2n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\mathit{\Gamma}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\mathit{\Gamma}\left(n+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}-(n-1)\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Γ 関数と B 関数

これより

$$I(2n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2} - (n-1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

Γ 関数と B 関数

これより

$$I(2n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2} - (n-1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

Γ 関数と B 関数

$$I(2n+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}$$

Γ 関数と B 関数

$$I(2n+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

$$I(2n+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\mathit{\Gamma}\left(n+1\right)}{\mathit{\Gamma}\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}-n\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}$$

Γ 関数と B 関数

$$
\begin{aligned}
I(2n+1) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1} \\
&= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}
$$

Γ 関数と B 関数

[練習問題 1]

自然数 n について、定積分

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

Γ 関数と B 関数

[練習問題 1]

自然数 n について、定積分

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$t = \dfrac{x+1}{2}$ と置換すると

Γ 関数と B 関数

[練習問題 1]

自然数 n について、定積分

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$t=\dfrac{x+1}{2}$ と置換すると

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2^{2n+1}\int_{0}^{1} t^n(1-t)^n dt$$

Γ 関数と B 関数

[練習問題 1]

自然数 n について、定積分

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$t=\dfrac{x+1}{2}$ と置換すると

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n dt$$

$$= 2^{2n+1}B(n+1,n+1)$$

$$= 2^{2n+1} \frac{\left(\Gamma\left(n+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(2n+2\right)}$$

Γ 関数と B 関数

$$= 2^{2n+1} \frac{\left(\Gamma\left(n+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(2n+2\right)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(2^n n!\right)^2}{\left(2n+1\right)!}$$

Γ 関数と B 関数

$$= 2^{2n+1} \frac{\left(\Gamma\left(n+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(2n+2\right)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(2n(2n-2)\cdots 2\right)^2}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)\cdots 2\cdot 1}$$

$\mathit{\Gamma}$ 関数と B 関数

$$= 2^{2n+1}\frac{\left(\mathit{\Gamma}\left(n+1\right)\right)^2}{\mathit{\Gamma}\left(2n+2\right)}$$

$$= 2\cdot\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= 2\cdot\frac{(2n(2n-2)\cdots 2)^2}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)\cdots 2\cdot 1}$$

$$= 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Γ 関数と B 関数

[練習問題２]

自然数 m, n で $m < 2n-1$ を満たすものについて、広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n} dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

Γ 関数と B 関数

[練習問題２]

自然数 m, n で $m < 2n - 1$ を満たすものについて、広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n} dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$x = \tan\theta$ と置換すると

Γ 関数と B 関数

[練習問題２]

自然数 m, n で $m < 2n - 1$ を満たすものについて、広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n} dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$x = \tan\theta$ と置換すると

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-m-2}\theta \sin^m \theta d\theta$$

Γ 関数と B 関数

[練習問題２]

自然数 m, n で $m < 2n-1$ を満たすものについて、広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n} dx$$

を Γ 関数を使って表し、値を求めよ。

[解答例]

$x = \tan\theta$ と置換すると

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-m-2}\theta \sin^m \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{2n-m-1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

Γ 関数と B 関数

$m = 2m'$ のとき

$$= \frac{\pi}{2^n} \cdot \frac{(2n-2m'-3)!!(2m'-1)!!}{(n-1)!}$$

Γ 関数と B 関数

$m = 2m'$ のとき

$$= \frac{\pi}{2^n} \cdot \frac{(2n-2m'-3)!!(2m'-1)!!}{(n-1)!}$$

$m = 2m'+1$ のとき

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{(2n-2m'-4)!!(2m')!!}{(n-1)!}$$

誤差関数

[定義]

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

を誤差関数 (error function) とよぶ。

誤差関数

[定義]

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

を誤差関数 (error function) とよぶ。

練習問題より $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ ($x = t^2$ とおく)

なので $\mathrm{erf}(+\infty) = 1$

宿題

一年生の時の微分積分の教科書の該当箇所の練習問題。