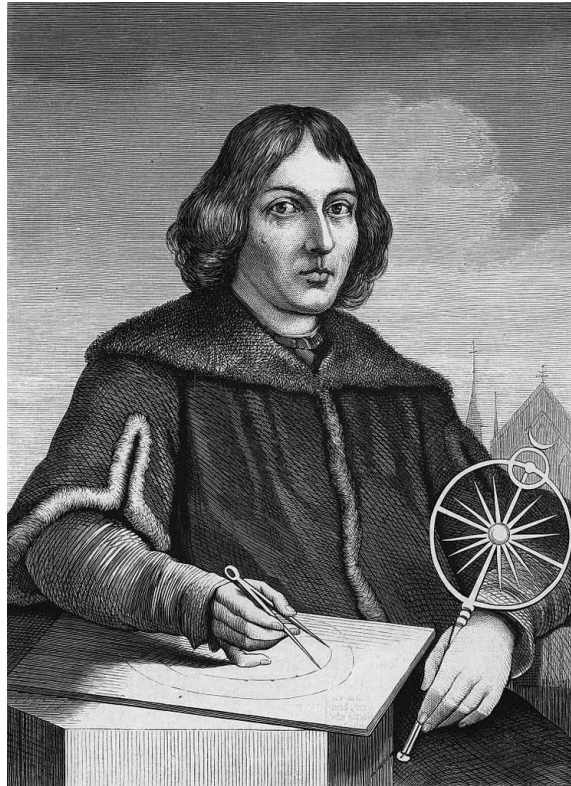


社会と数理科学

第四回

新居 俊作

コペルニクス



コペルニクス

コペルニクスは古代ギリシャのアリストタルコスの太陽中心主義を復活させて、太陽中心の地動説を唱えた。

コペルニクス

コペルニクスは古代ギリシャのアリスタルコスの太陽中心主義を復活させて、太陽中心の地動説を唱えた。
(地動説はコペルニクスが最初ではない)

コペルニクス

コペルニクスは古代ギリシャのアリスタルコスの太陽中心主義を復活させて、太陽中心の地動説を唱えた。

(地動説はコペルニクスが最初ではない)

⇒ 惑星の逆行現象の説明が容易になる。

コペルニクス

コペルニクスは古代ギリシャのアリストタルコスの太陽中心主義を復活させて、太陽中心の地動説を唱えた。
(地動説はコペルニクスが最初ではない)

⇒ 惑星の逆行現象の説明が容易になる。

惑星の逆行現象の例：授業資料「その2」65 ページ
(土星の見かけの軌跡)

コペルニクス

コペルニクスは古代ギリシャのアリストタルコスの太陽中心主義を復活させて、太陽中心の地動説を唱えた。
(地動説はコペルニクスが最初ではない)

⇒ 惑星の逆行現象の説明が容易になる。

惑星の逆行現象の例：授業資料「その2」65 ページ
(土星の見かけの軌跡)

地動説による説明：授業資料「その2」72 ページ

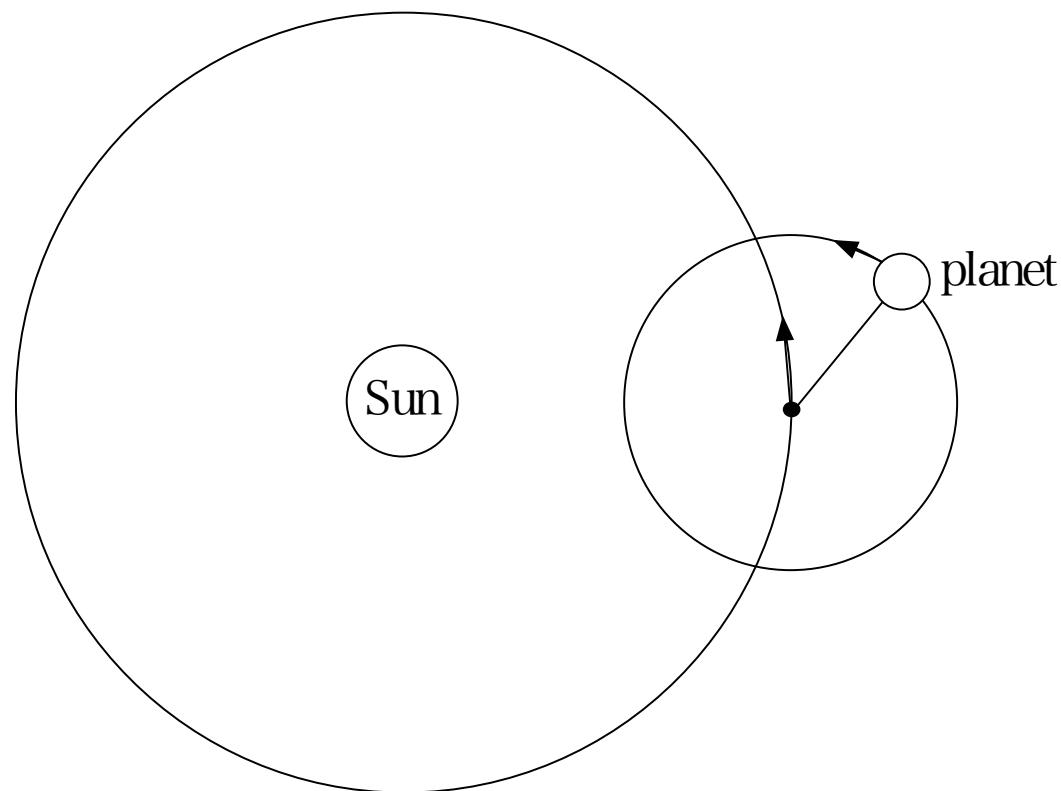
コペルニクス

コペルニクス

コペルニクスは惑星の軌道が楕円であると考えすることは出来ず、(プトレマイオス流に) 円運動の組み合わせとして表現した。

コペルニクス

コペルニクスは惑星の軌道が楕円であると考えすることは出来ず、(プトレマイオス流に) 円運動の組み合わせとして表現した。



ブラーエ

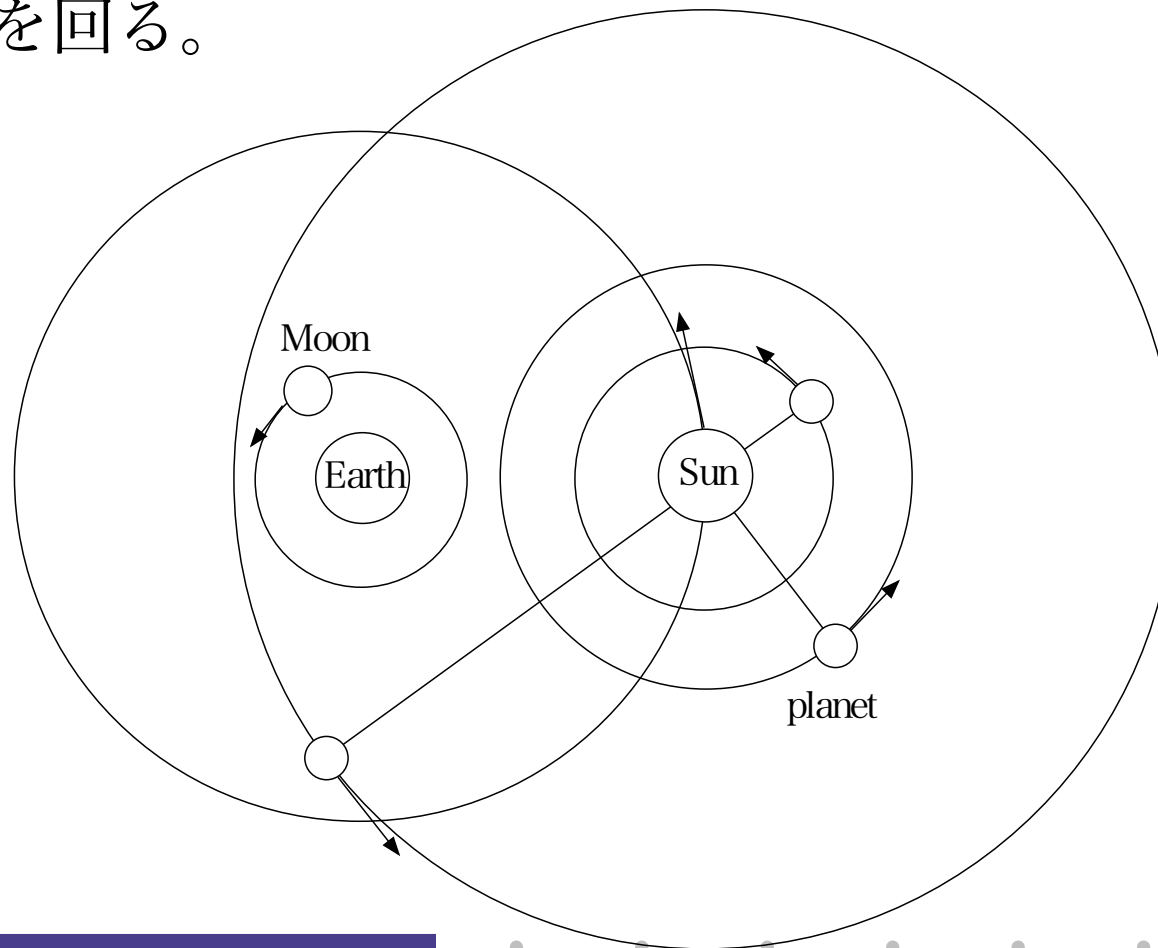


ブラーエ

観測データと天動説を合わせる為の、過渡期の宇宙観：

ブラーエ

観測データと天動説を合わせる為の、過渡期の宇宙観：
太陽は地球の周りを回り、惑星は太陽の周りを回りながら地球の周りを回る。



ケプラー



ケプラー

ケプラーの法則

ケプラー

ケプラーの法則

- 惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を運動する。

ケプラー

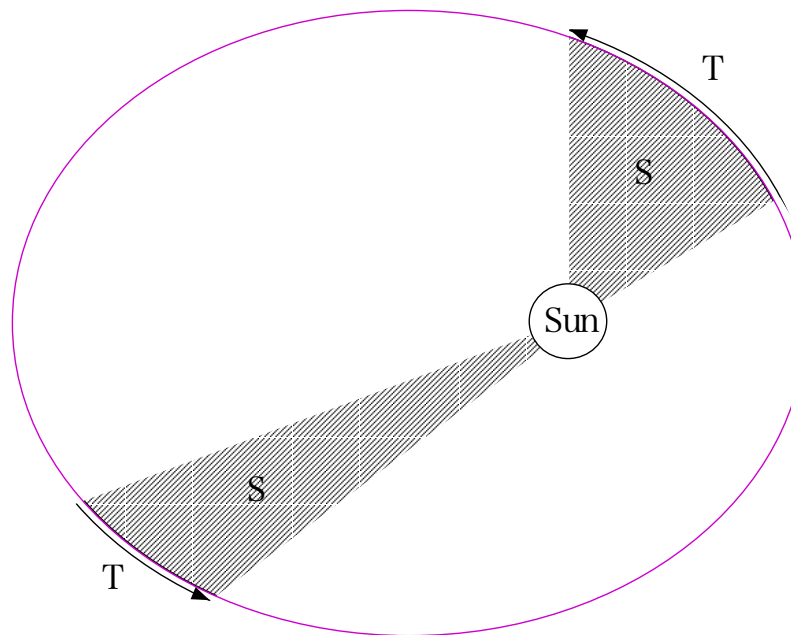
ケプラーの法則

- 惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を運動する。
- 惑星が一定の時間にはく面積 (面積速度) は一定である。

ケプラー

ケプラーの法則

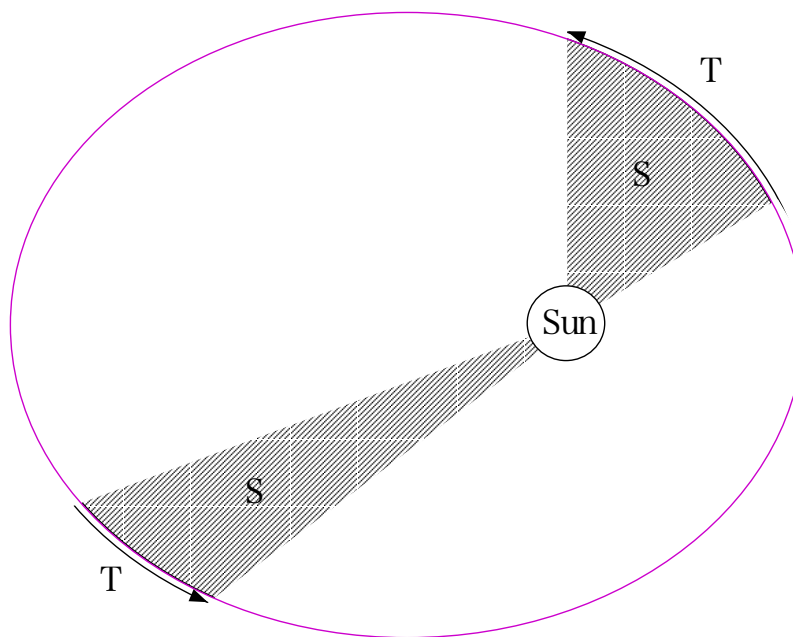
- 惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を運動する。
- 惑星が一定の時間にはく面積 (面積速度) は一定である。



ケプラー

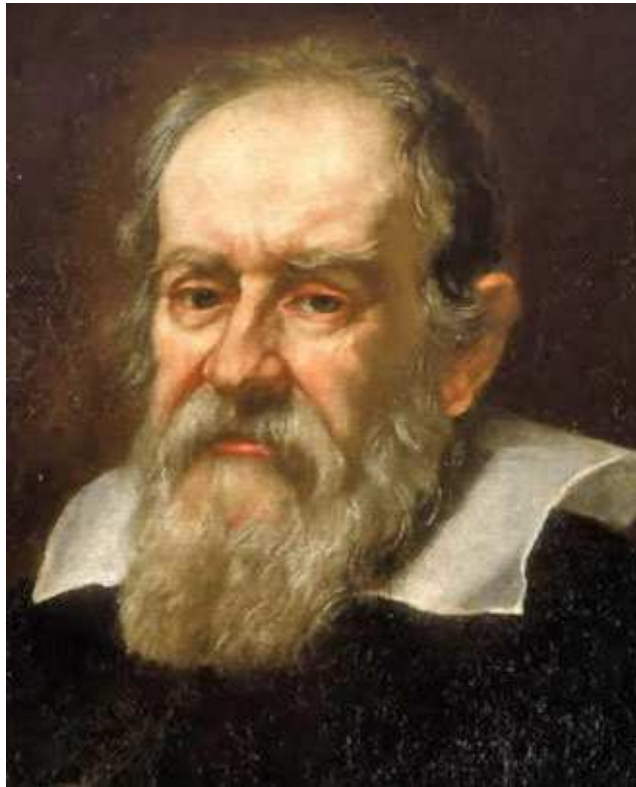
ケプラーの法則

- 惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を運動する。
- 惑星が一定の時間にはく面積 (面積速度) は一定である。



- 惑星の軌道の長半径の三乗は公転周期の二乗に比例する。

ガリレオ



ガリレオ

自作の望遠鏡を用いて木星や金星等を観測

ガリレオ

自作の望遠鏡を用いて木星や金星等を観測

⇒ 木星の衛星を4つ発見。

ガリレオ

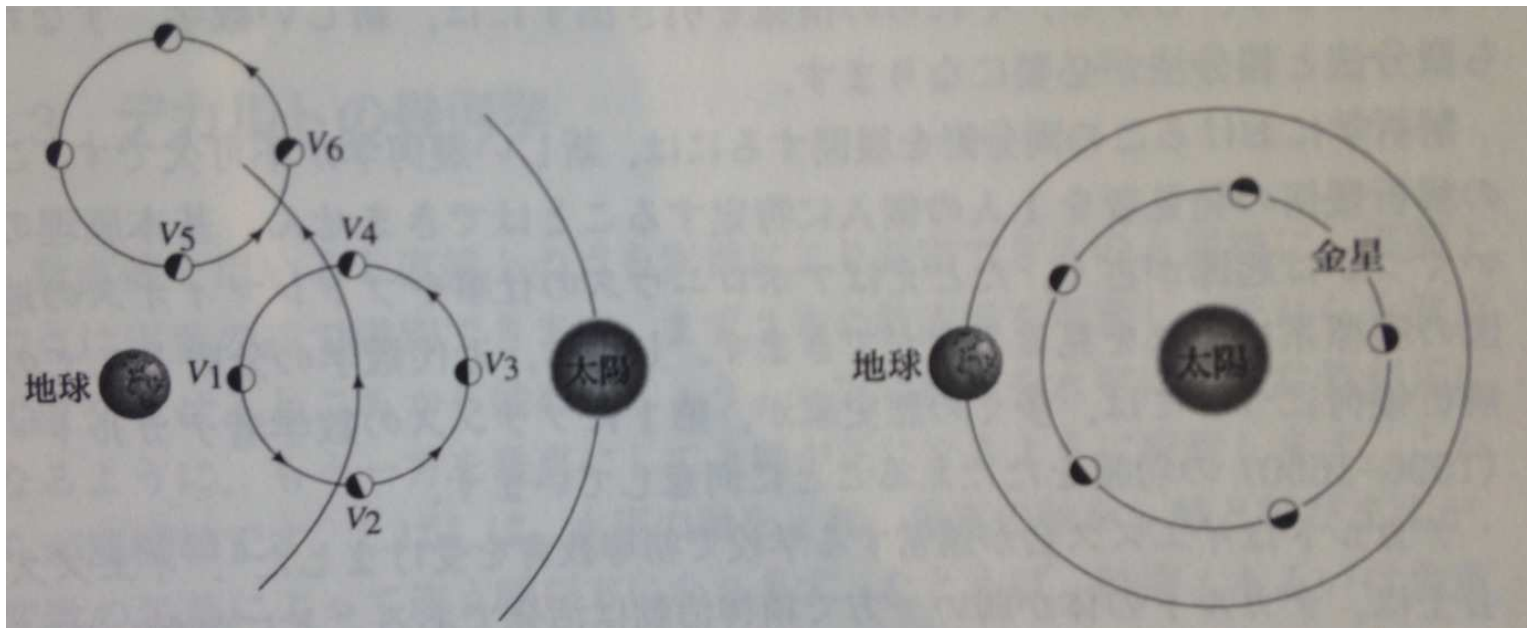
自作の望遠鏡を用いて木星や金星等を観測

⇒ 木星の衛星を4つ発見。地球中心の運動はしていない。

ガリレオ

自作の望遠鏡を用いて木星や金星等を観測

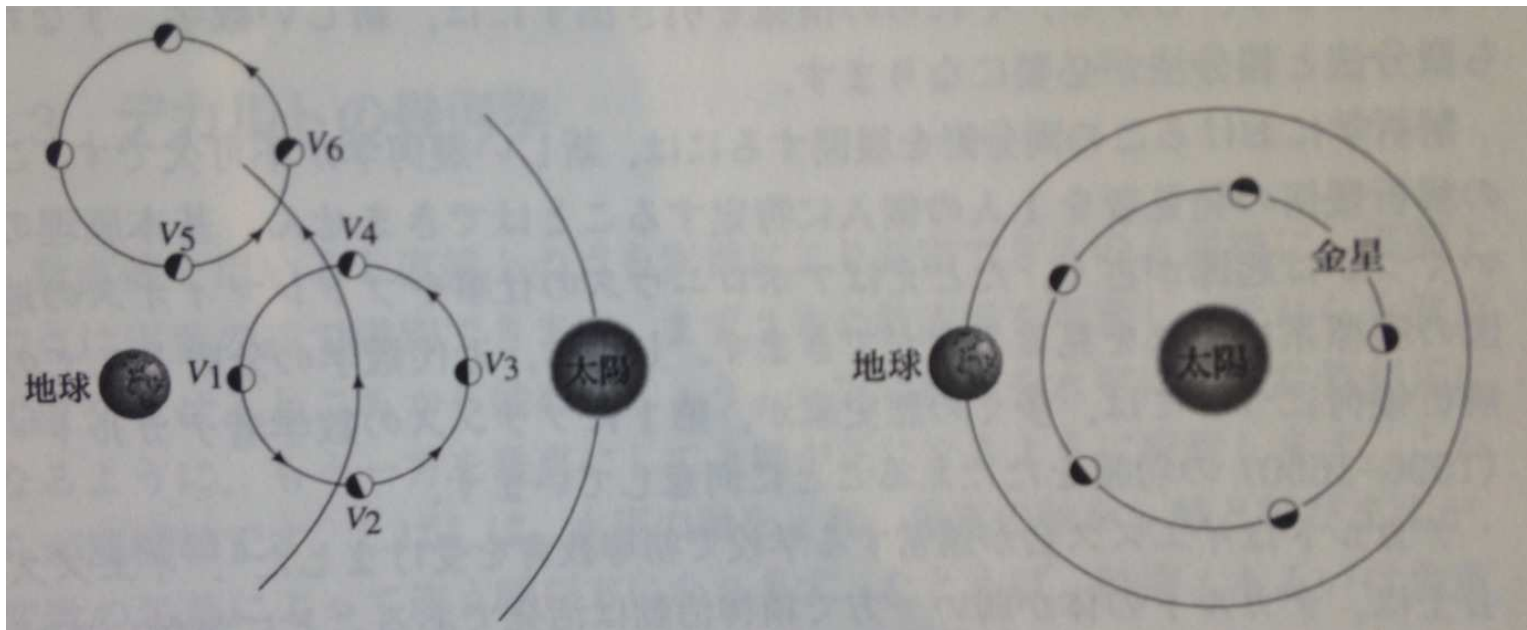
⇒ 木星の衛星を4つ発見。 地球中心の運動はしていない。
金星の満ち欠けは、天動説とは辻褃が合わない。



ガリレオ

自作の望遠鏡を用いて木星や金星等を観測

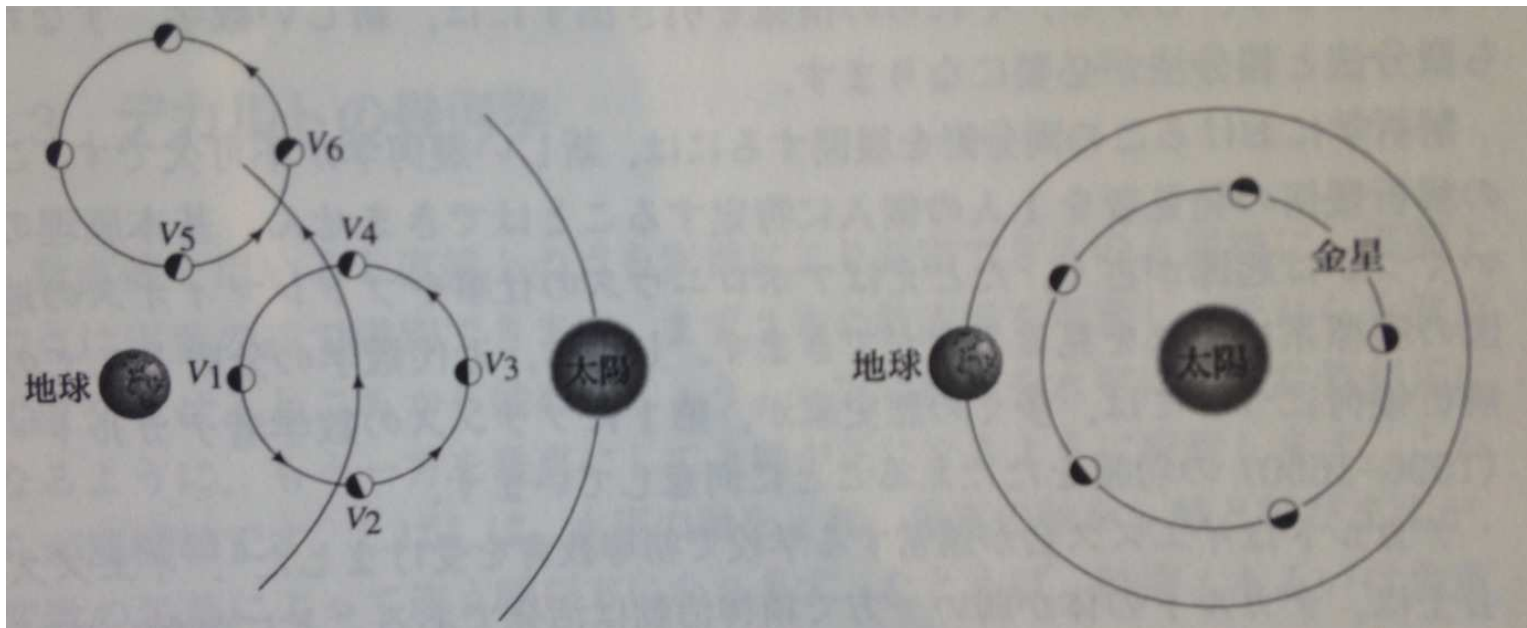
⇒ 木星の衛星を4つ発見。 地球中心の運動はしていない。
金星の満ち欠けは、天動説とは辻褃が合わない。



ガリレオ

自作の望遠鏡を用いて木星や金星等を観測

⇒ 木星の衛星を4つ発見。 地球中心の運動はしていない。
金星の満ち欠けは、天動説とは辻褃が合わない。



⇒ 地動説を支持。

思考実験

思考実験

思考実験

思考実験

思考実験

実際に実験器具を用いて測定を行うことなく、ある状況で理論から導かれる現象或はその整合性等を、思考のみによって検証することを、思考実験とよぶ。

思考実験

思考実験

実際に実験器具を用いて測定を行うことなく、ある状況で理論から導かれる現象或はその整合性等を、思考のみによって検証することを、思考実験とよぶ。

ガリレオの思考実験

思考実験

思考実験

実際に実験器具を用いて測定を行うことなく、ある状況で理論から導かれる現象或はその整合性等を、思考のみによって検証することを、思考実験とよぶ。

ガリレオの思考実験

図のように、鉄球とそれを二つに割った物の落下を考察することにより、「重いもの程速く落下する」と考えるのは不合理であると考えた。



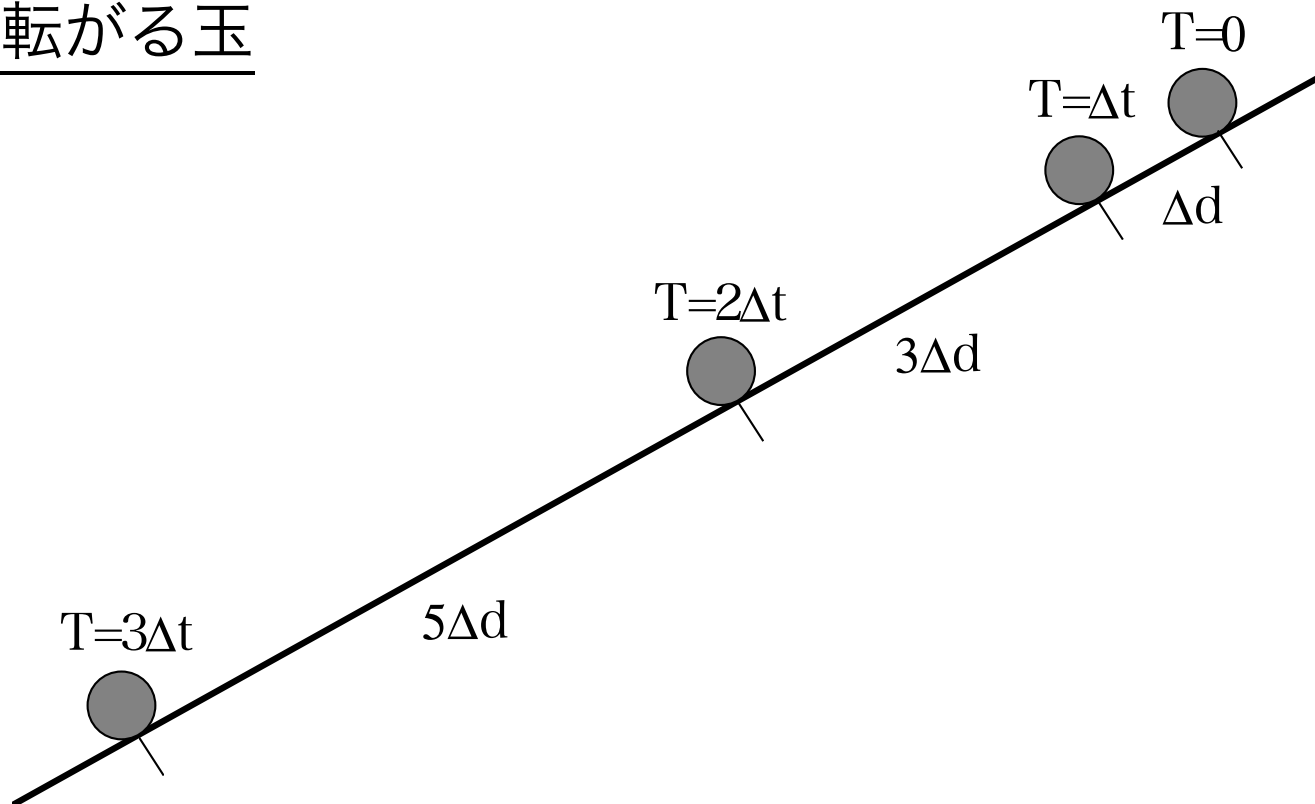
ガリレオの力学

ガリレオの力学

斜面を転がる玉

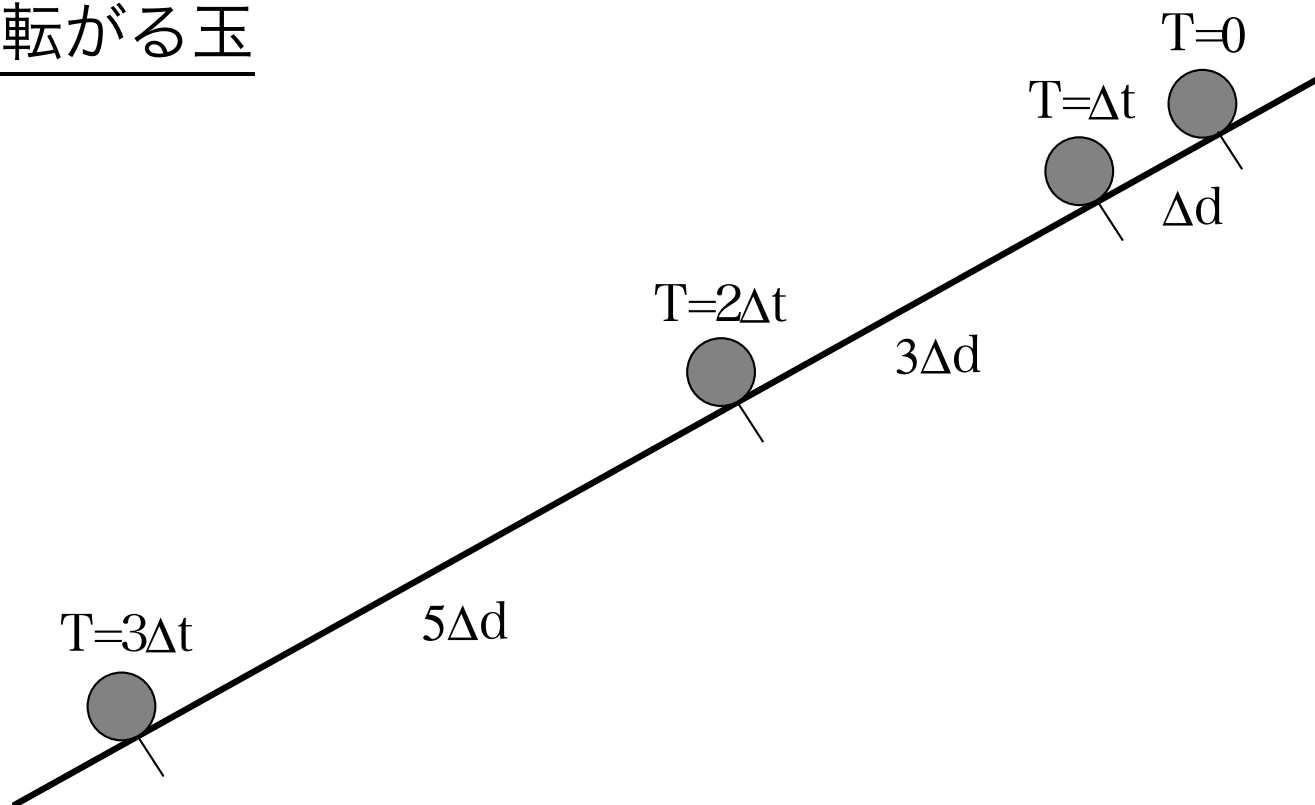
ガリレオの力学

斜面を転がる玉



ガリレオの力学

斜面を転がる玉



$T = k\Delta t$ から $T = (k+1)\Delta t$ までの間に距離 d だけ玉が転がるならば、その間の平均速度は $v((k + \frac{1}{2})\Delta t) = \frac{d}{\Delta t}$
(上の例では $(2k + 1)\frac{\Delta d}{\Delta t}$)

ガリレオの力学

このとき、平均加速度

$$\frac{v(T) - v(T')}{T - T'}$$

は T, T' によらずに一定 (斜面の傾きで決まる) であることを実験で確かめた。

ガリレオの力学

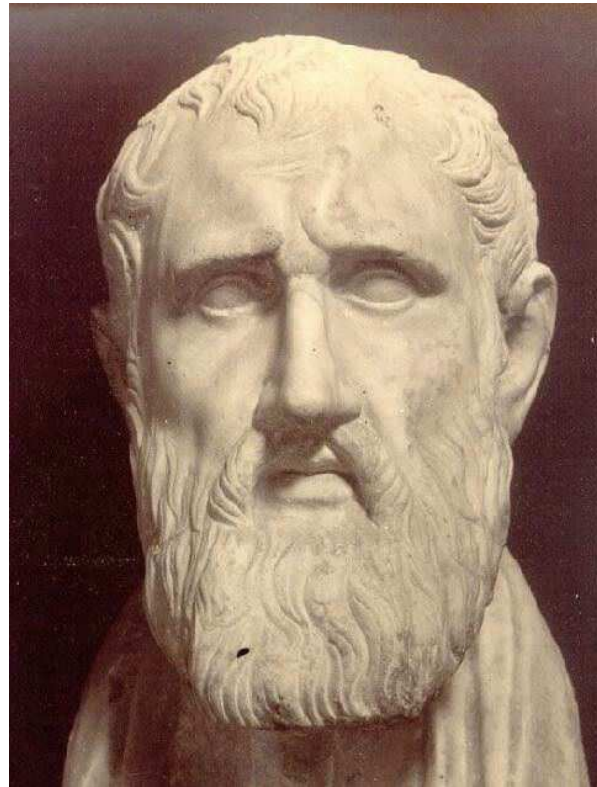
このとき、平均加速度

$$\frac{v(T) - v(T')}{T - T'}$$

は T, T' によらずに一定 (斜面の傾きで決まる) であることを実験で確かめた。

つまり、斜面を転がる玉 (斜面が垂直のときは落下する玉) については加速度は一定である。

ゼノンのパラドックスと速度の概念



ゼノンのパラドックスと速度の概念

ゼノンのパラドックス (飛ぶ矢は飛ばない)

If everything when it occupies an equal space is at rest,
and if that which is in locomotion is always occupying such
a space at any moment, the flying arrow is therefore
motionless.

ゼノンのパラドックスと速度の概念

ゼノンのパラドックス (飛ぶ矢は飛ばない)

If everything when it occupies an equal space is at rest, and if that which is in locomotion is always occupying such a space at any moment, the flying arrow is therefore motionless.

つまり、「ある時点である場所にある」という情報だけでは、物体が運動しているか静止しているかを区別することはできない。

ゼノンのパラドックスと速度の概念

ゼノンのパラドックス (飛ぶ矢は飛ばない)

If everything when it occupies an equal space is at rest, and if that which is in locomotion is always occupying such a space at any moment, the flying arrow is therefore motionless.

つまり、「ある時点である場所にある」という情報だけでは、物体が運動しているか静止しているかを区別することはできない。

⇒ 速度の概念が必要。

ゼノンのパラドックスと速度の概念

ゼノンのパラドックス (飛ぶ矢は飛ばない)

If everything when it occupies an equal space is at rest, and if that which is in locomotion is always occupying such a space at any moment, the flying arrow is therefore motionless.

つまり、「ある時点である場所にある」という情報だけでは、物体が運動しているか静止しているかを区別することはできない。

⇒ 速度の概念が必要性。

与えられた時刻における位置と速度によって運動の状態は決定される

ゼノンのパラドックスと速度の概念

ゼノンのパラドックス (飛ぶ矢は飛ばない)

If everything when it occupies an equal space is at rest, and if that which is in locomotion is always occupying such a space at any moment, the flying arrow is therefore motionless.

つまり、「ある時点である場所にある」という情報だけでは、物体が運動しているか静止しているかを区別することはできない。

⇒ 速度の概念が必要性。

与えられた時刻における位置と速度によって運動の状態は決定される ⇐ ニュートン力学の前提。

アキレスは亀に追いつかない、の誤り

注意

もう一つのゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追いつけない」の誤り。

アキレスは亀に追いつかない、の誤り

注意

もう一つのゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追いつけない」の誤り。

「アキレスは亀に追いつけない」の前提

アキレスは亀に追いつかない、の誤り

注意

もう一つのゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追いつけない」の誤り。

「アキレスは亀に追いつけない」の前提

一回の操作にかかる時間を T_n とすると T_n 全て正なら、無限回の操作を行うのに必要な時間 $T_1 + T_2 + \cdots + T_n + \cdots$ は必ず無限大になる。

アキレスは亀に追いつかない、の誤り

注意

もう一つのゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追いつけない」の誤り。

「アキレスは亀に追いつけない」の前提

一回の操作にかかる時間を T_n とすると T_n 全て正なら、無限回の操作を行うのに必要な時間 $T_1 + T_2 + \cdots + T_n + \cdots$ は必ず無限大になる。

反例

アキレスは亀に追いつかない、の誤り

注意

もう一つのゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追いつけない」の誤り。

「アキレスは亀に追いつけない」の前提

一回の操作にかかる時間を T_n とすると T_n 全て正なら、無限回の操作を行うのに必要な時間 $T_1 + T_2 + \cdots + T_n + \cdots$ は必ず無限大になる。

反例

$$T_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ならば} \quad T_1 + T_2 + \cdots + T_n < \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1$$

アキレスは亀に追いつかない、の誤り

注意

もう一つのゼノンのパラドックス「アキレスは亀に追いつけない」の誤り。

「アキレスは亀に追いつけない」の前提

一回の操作にかかる時間を T_n とすると T_n 全て正なら、無限回の操作を行うのに必要な時間 $T_1 + T_2 + \cdots + T_n + \cdots$ は必ず無限大になる。

反例

$$T_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ならば} \quad T_1 + T_2 + \cdots + T_n < \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1$$

よって、この場合は無限回の操作を行っても、かかる時間の合計は 1 以下である。

ガリレオの力学(続き)

アリストテレスの力学

外から力が加わり続けなければ、運動している物体は静止する。

ガリレオの力学(続き)

アリストテレスの力学

外から力が加わり続けなければ、運動している物体は静止する。

ガリレオの思考実験

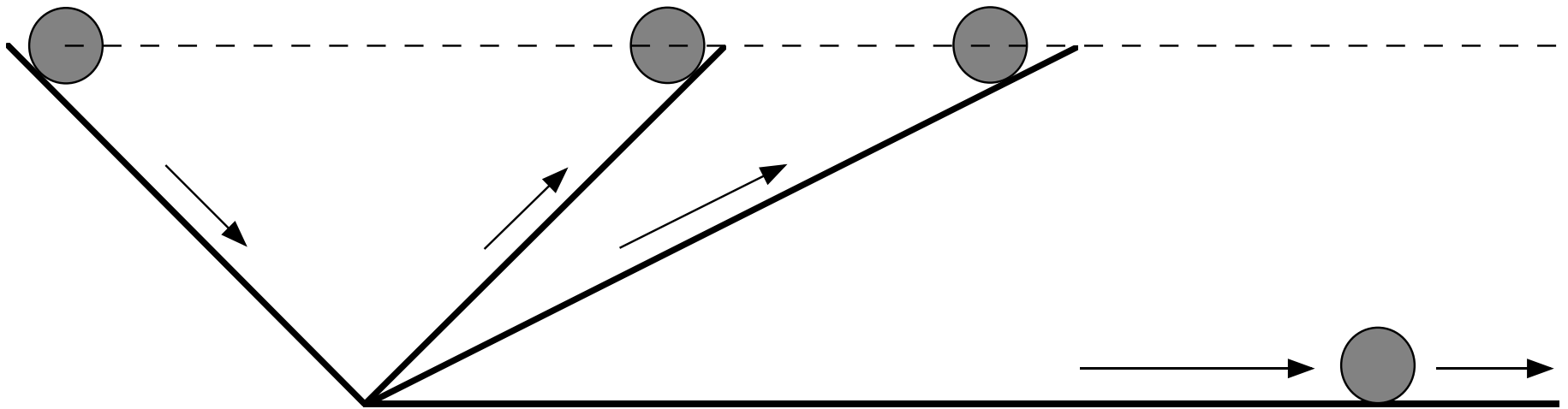
ガリレオの力学(続き)

アリストテレスの力学

外から力が加わり続けなければ、運動している物体は静止する。

ガリレオの思考実験

斜面で玉を放すと反対側の斜面を登り元と同じ高さで止まる



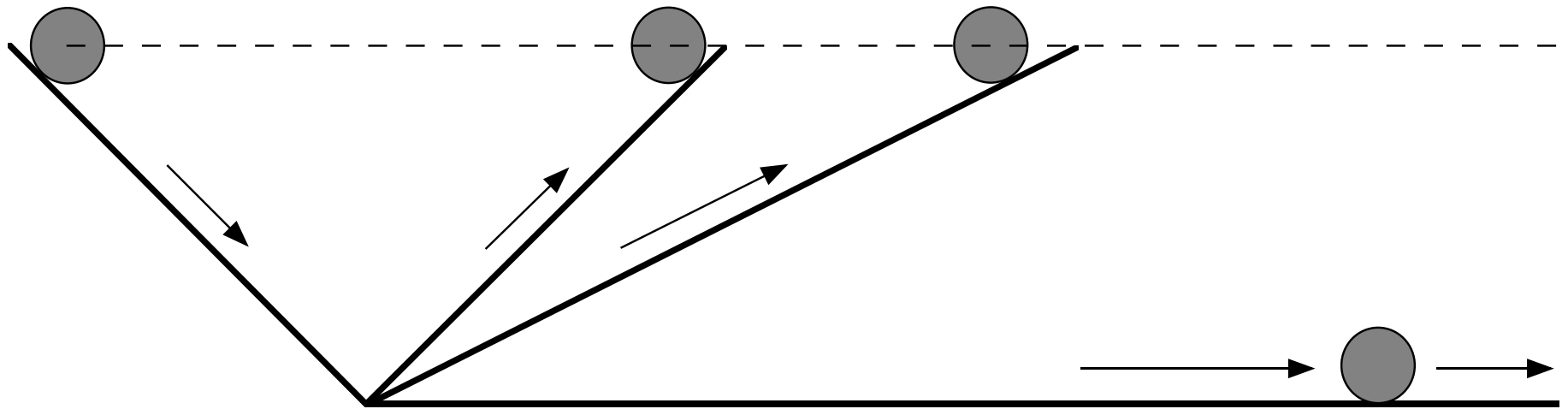
ガリレオの力学(続き)

アリストテレスの力学

外から力が加わり続けなければ、運動している物体は静止する。

ガリレオの思考実験

斜面で玉を放すと反対側の斜面を登り元と同じ高さで止まる



⇒ 反対側が平らなら玉は無限に転がり続ける。(慣性の法則)

科学の方法論

理想化

科学の方法論

理想化

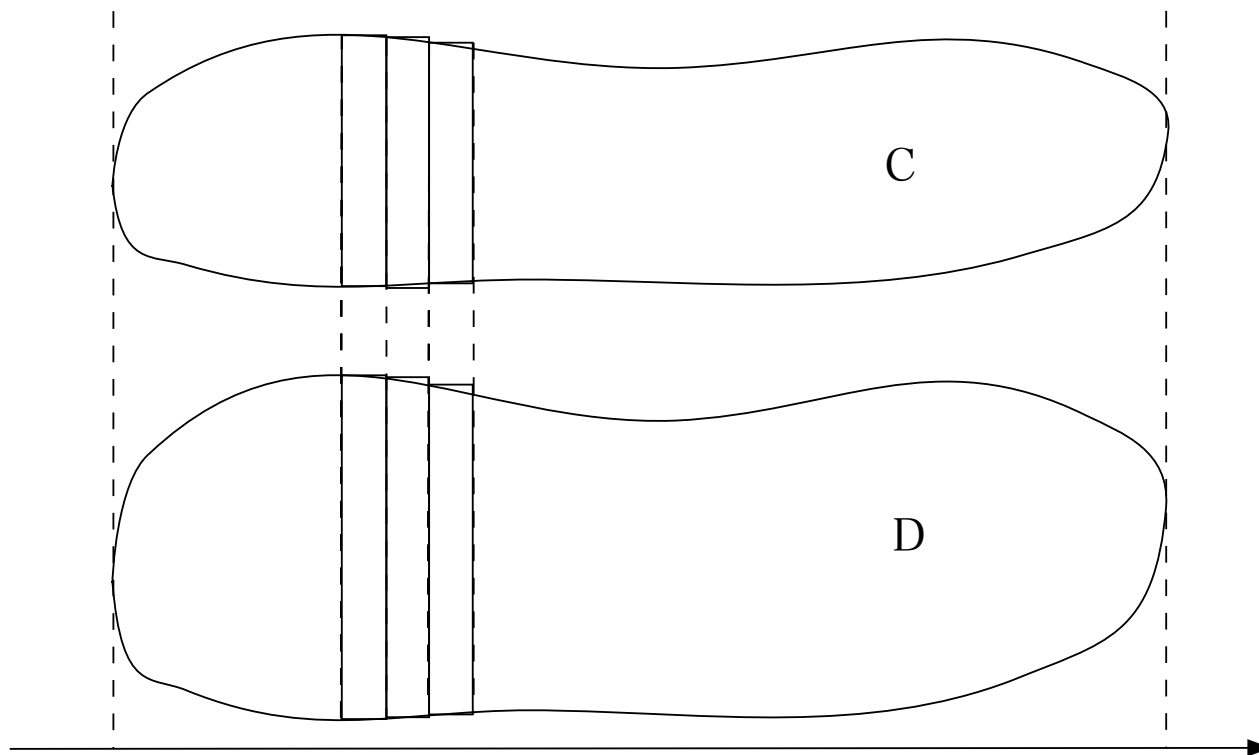
単純化

カバリエリの原理



カバリエリの原理

x 軸の上に置かれた二つの図形を、図のように細い短冊に切ってそれぞれの短冊の面積を比較する。



カバリエリの原理

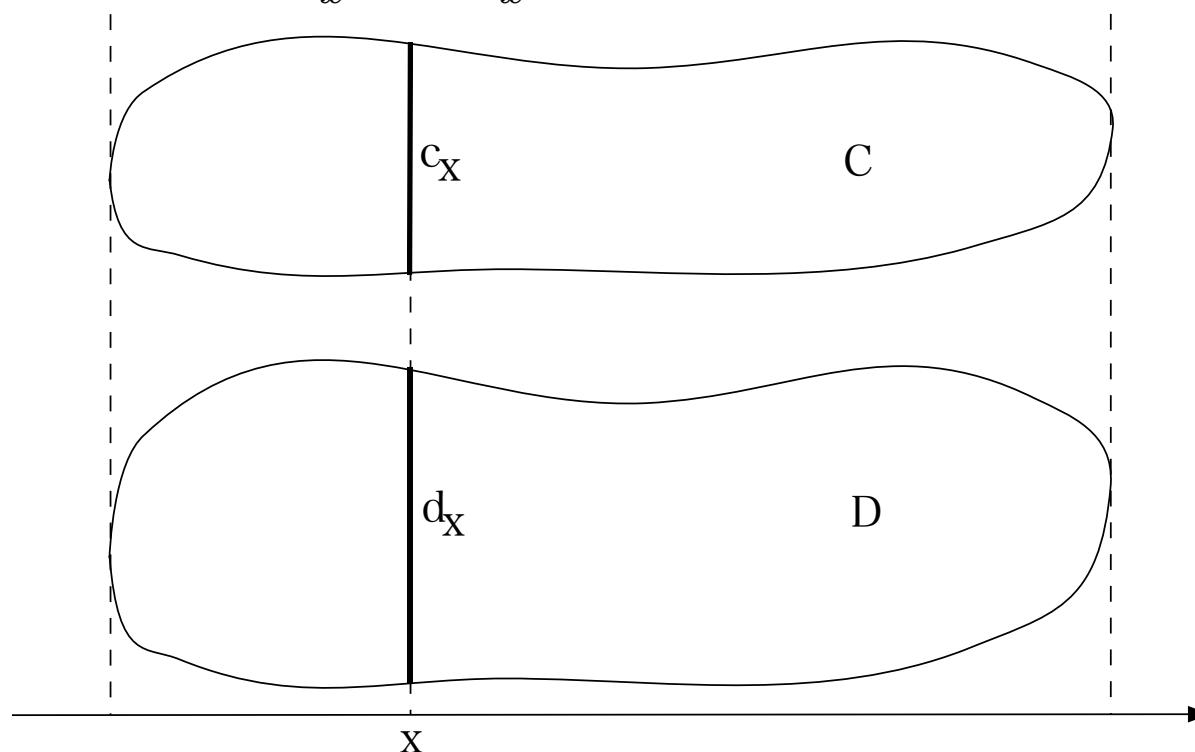
短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

全ての x について $d_x = kc_x$ ならば $D = kC$ である。

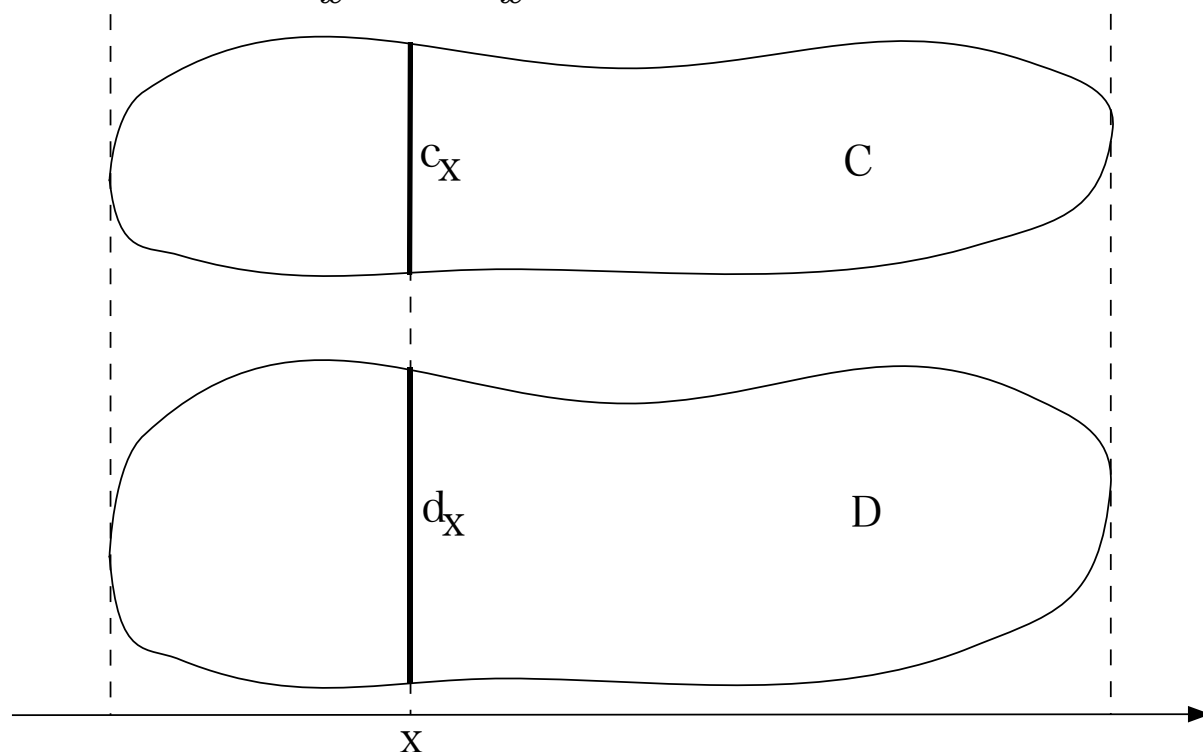


カバリエリの原理

短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

全ての x について $d_x = kc_x$ ならば $D = kC$ である。



注意：この考え方を進めると積分の概念が得られる。

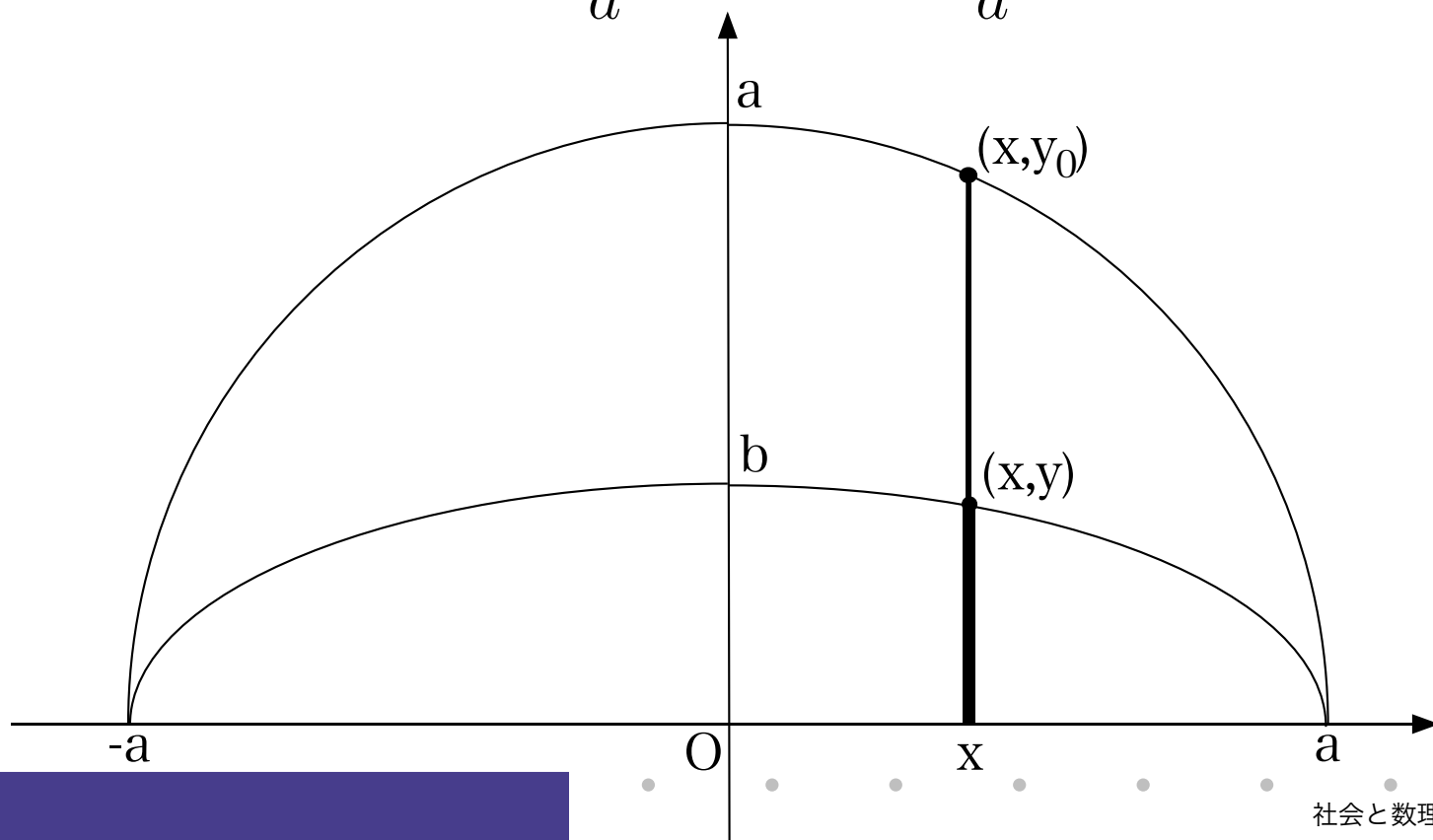
カバリエリの原理

カバリエリの原理を楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に適用すると、面積は πab となる。

カバリエリの原理

カバリエリの原理を楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に適用すると、面積は πab となる。

$$\therefore \text{全ての } x \text{ について } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} y_0$$



惑星軌道の解析

惑星軌道の解析

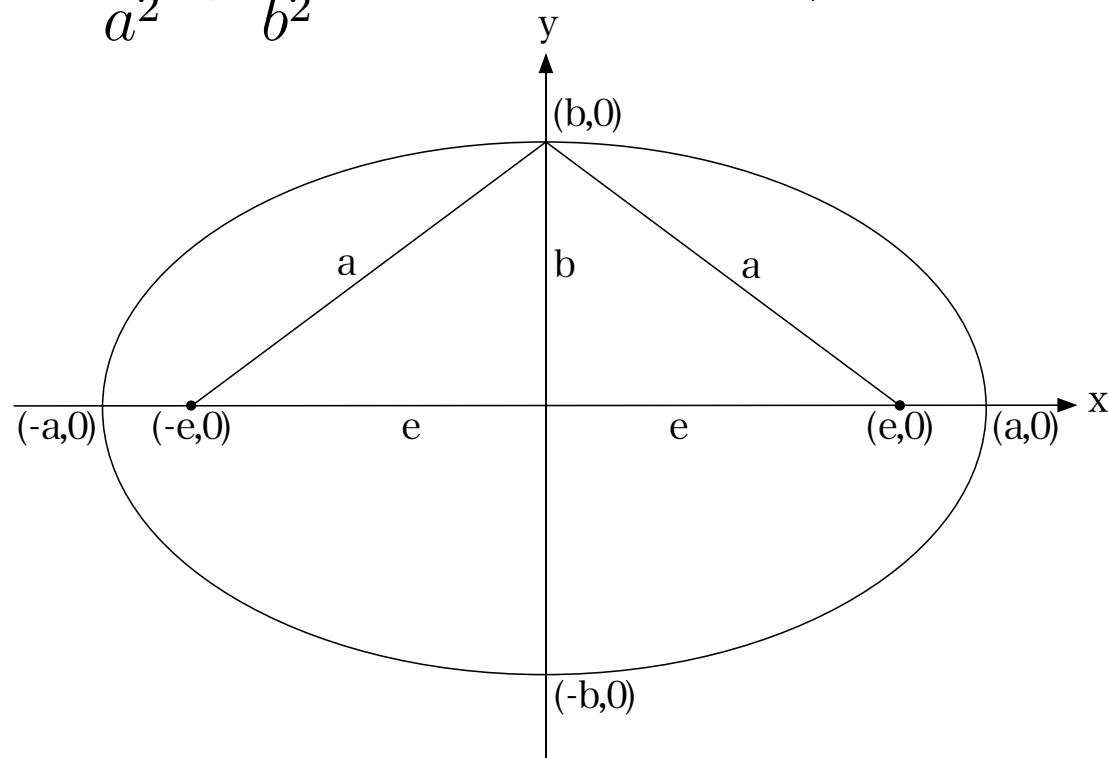
座標平面上で $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようなになる：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

惑星軌道の解析

座標平面上で $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようなになる：

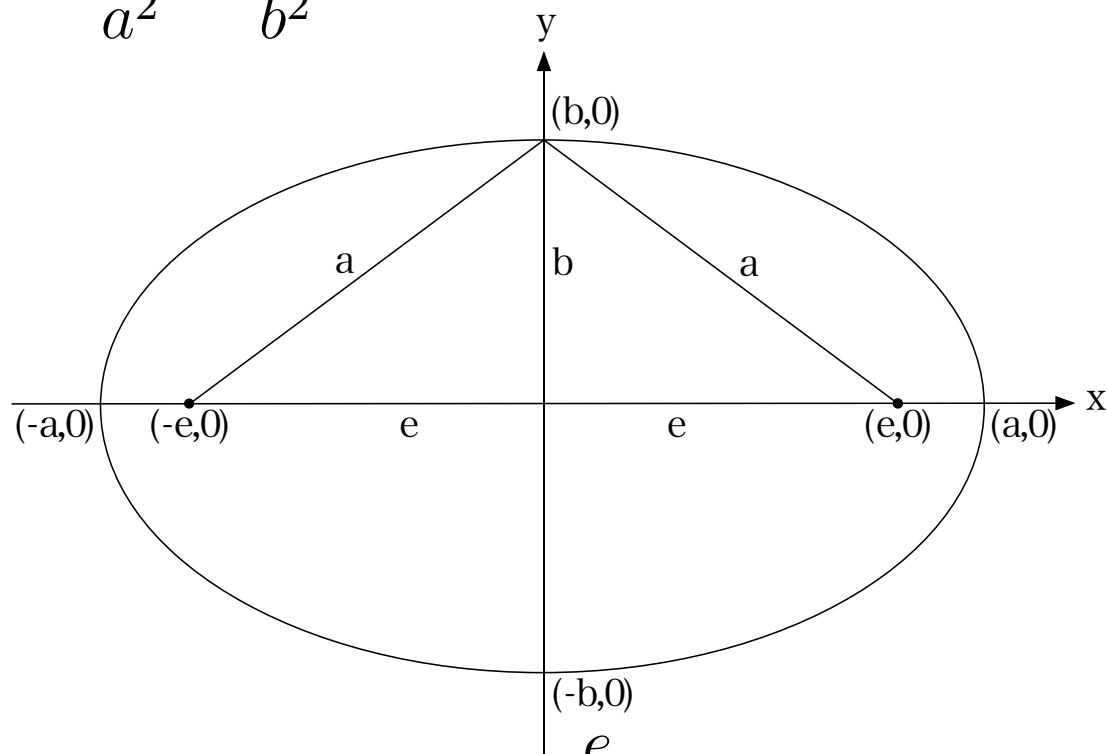
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



惑星軌道の解析

座標平面上で $(e, 0)$ 、 $(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下ようになる：

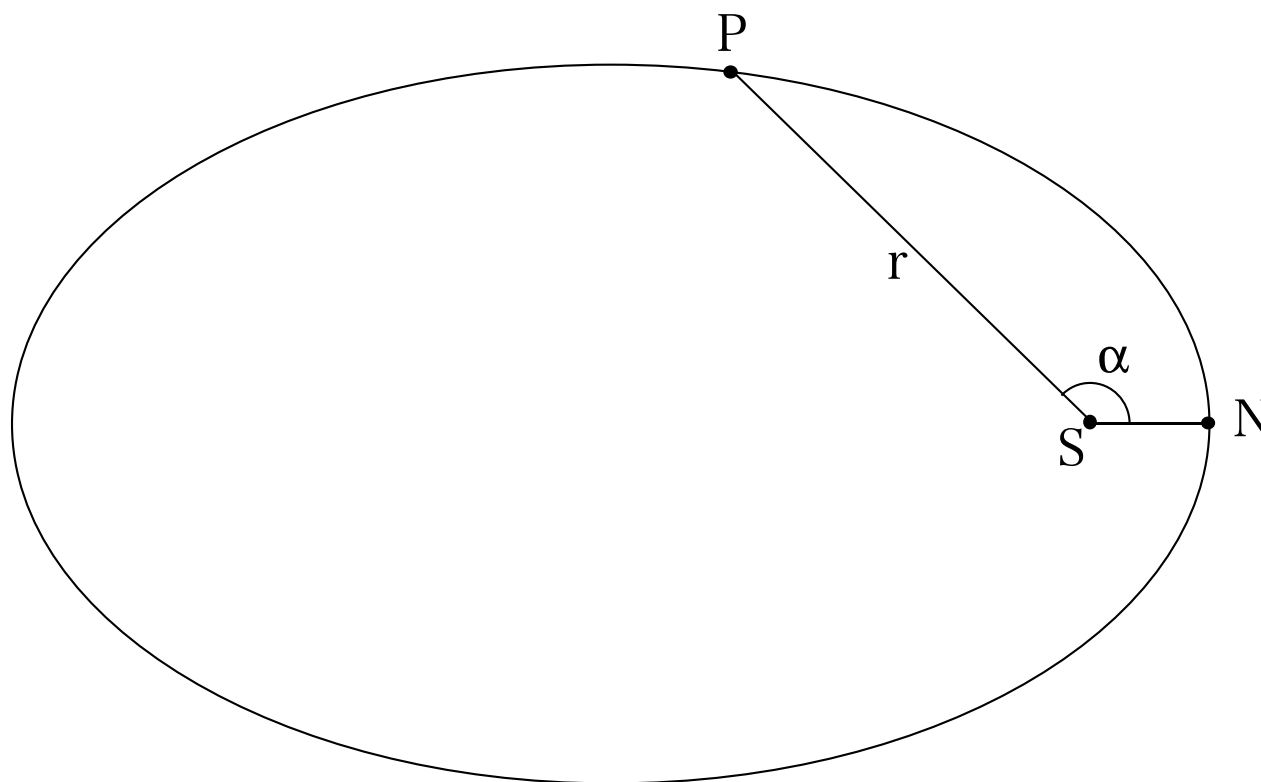
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



a を長半径、 b を短半径、 $\varepsilon = \frac{e}{a}$ を離心率と呼ぶ。

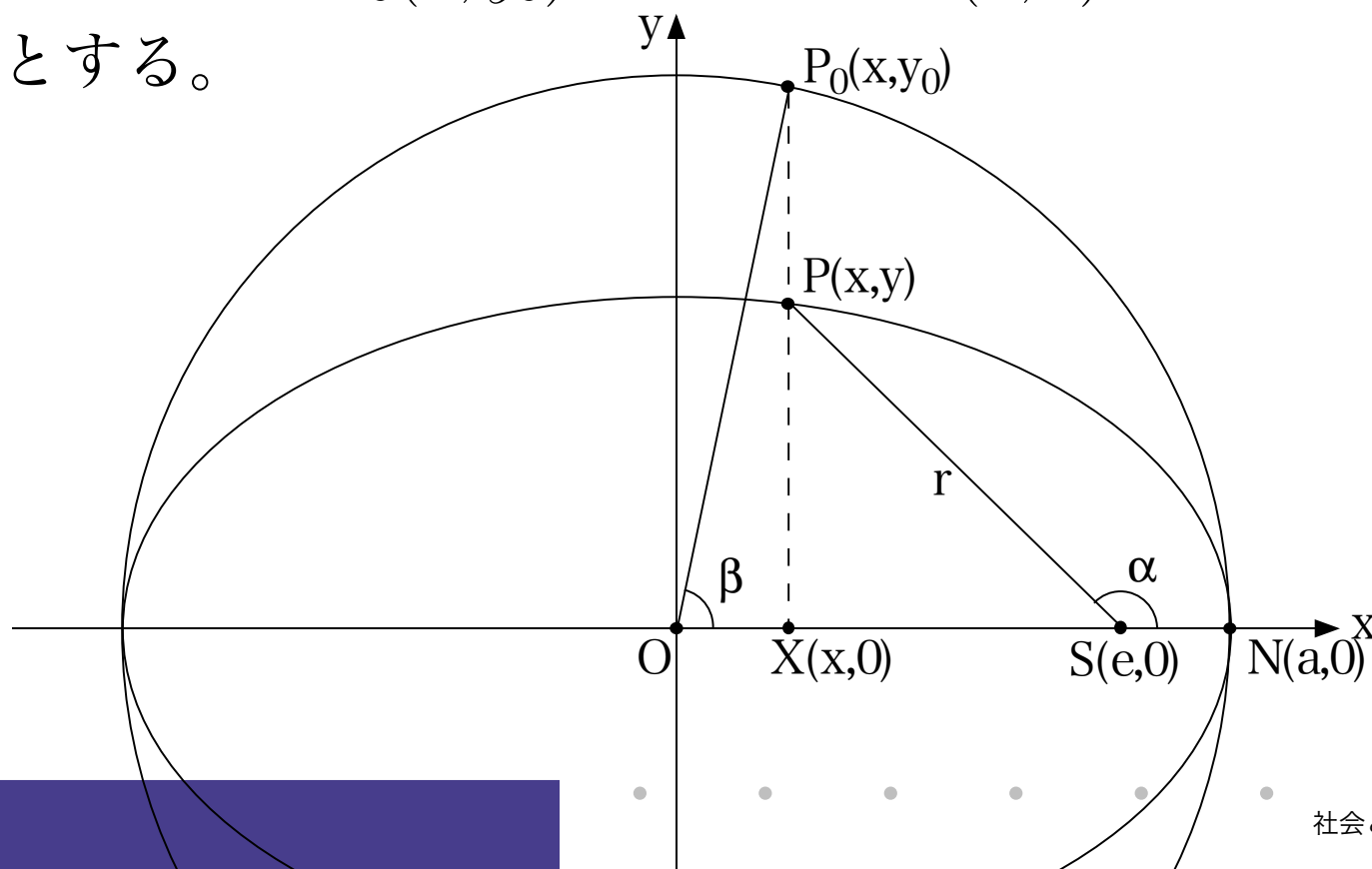
惑星軌道の解析

惑星が時刻 0 で近日点 N に居たとするとき、時刻 t における惑星の位置 P について、太陽 S からの距離 r と SN と SP の間の角 α を求めることを考える：



惑星軌道の解析

惑星軌道の中心を原点とし、太陽の位置 S を片方の焦点 $(e, 0)$ とする座標系をとる。この楕円の長半径を a 、短半径を $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ 、 P の座標を (x, y) とする。更に、原点中心半径 a の円周上に $P_0(x, y_0)$ 、 x 軸上に $X(x, 0)$ をとり $\angle P_0ON$ を β とする。



惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

- r と α を β で表す。

惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

- r と α を β で表す。
- β と t の関係式を求める。

惑星軌道の解析

以下の手順で P の位置を解析する：

- r と α を β で表す。
- β と t の関係式を求める。
- 上の関係式を解き、 β を t で表す。

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。
 $\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$r^2 = y^2 + (e - x)^2$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$r^2 = y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

従って、 $a > e$ より

$$r = a - e \cos \beta$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

従って、 $a > e$ より

$$r = a - e \cos \beta = a \left(1 - \frac{e}{a} \cos \beta \right)$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

先ず $x = a \cos \beta$ 。 また、 $y_0 = a \sin \beta$ より $y = \frac{b}{a} y_0 = b \sin \beta$ 。

$\triangle SPX$ に三平方の定理を用いると：

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (e - x)^2 = b^2 \sin^2 \beta + (e - a \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= (a^2 - e^2) \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta + e^2 \\ &= a^2 + e^2(1 - \sin^2 \beta) - 2ae \cos \beta \\ &= a^2 + e^2 \cos^2 \beta - 2ae \cos \beta \\ &= (a - e \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

従って、 $a > e$ より

$$\begin{aligned} r &= a - e \cos \beta = a \left(1 - \frac{e}{a} \cos \beta \right) \\ &= a(1 - \varepsilon \cos \beta) \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha)$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x} \\ &= \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta - e}\end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x} \\ &= \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta - e} = \frac{b \sin \beta}{a(\cos \beta - \varepsilon)}\end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (r と α を β で表す)

再び $\triangle SPX$ について

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{e - x} \\ &= \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta - e} = \frac{b \sin \beta}{a(\cos \beta - \varepsilon)}\end{aligned}$$

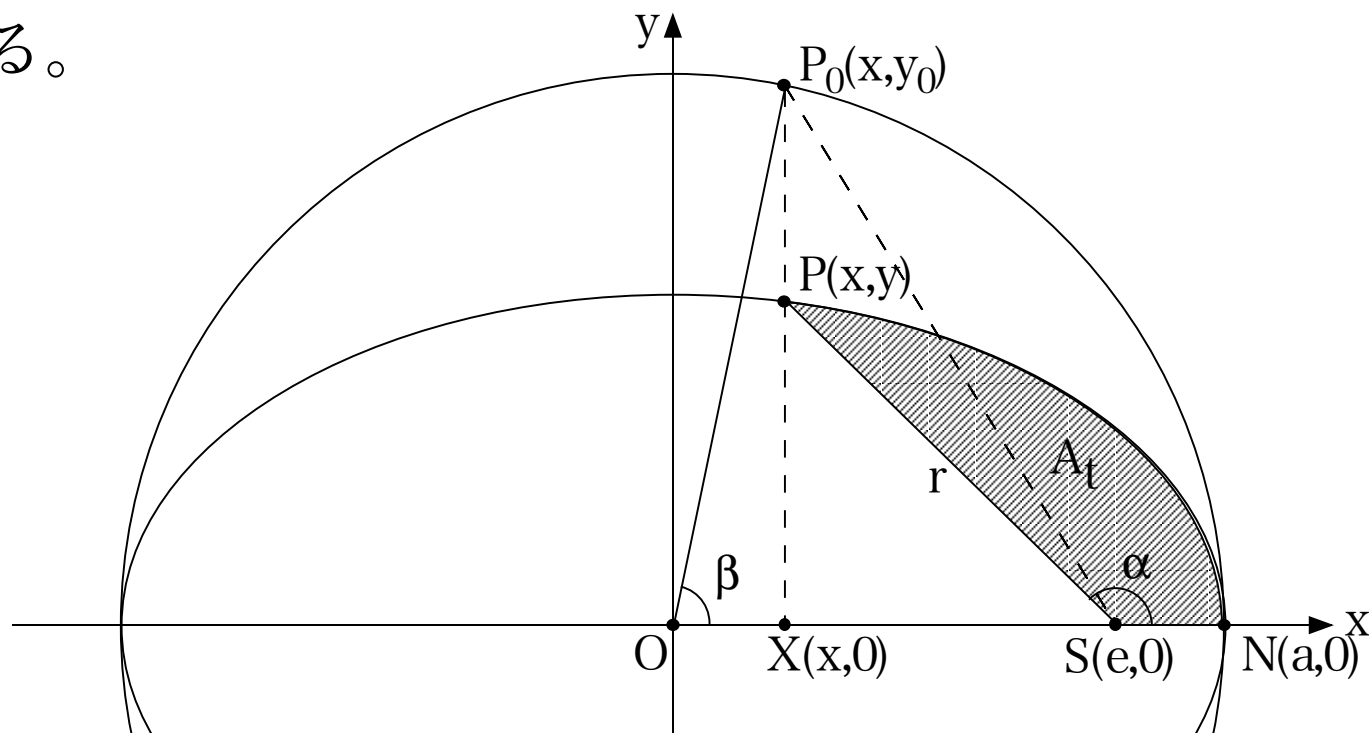
これより

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{\beta}{2} \quad (\text{ガウスの公式})$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

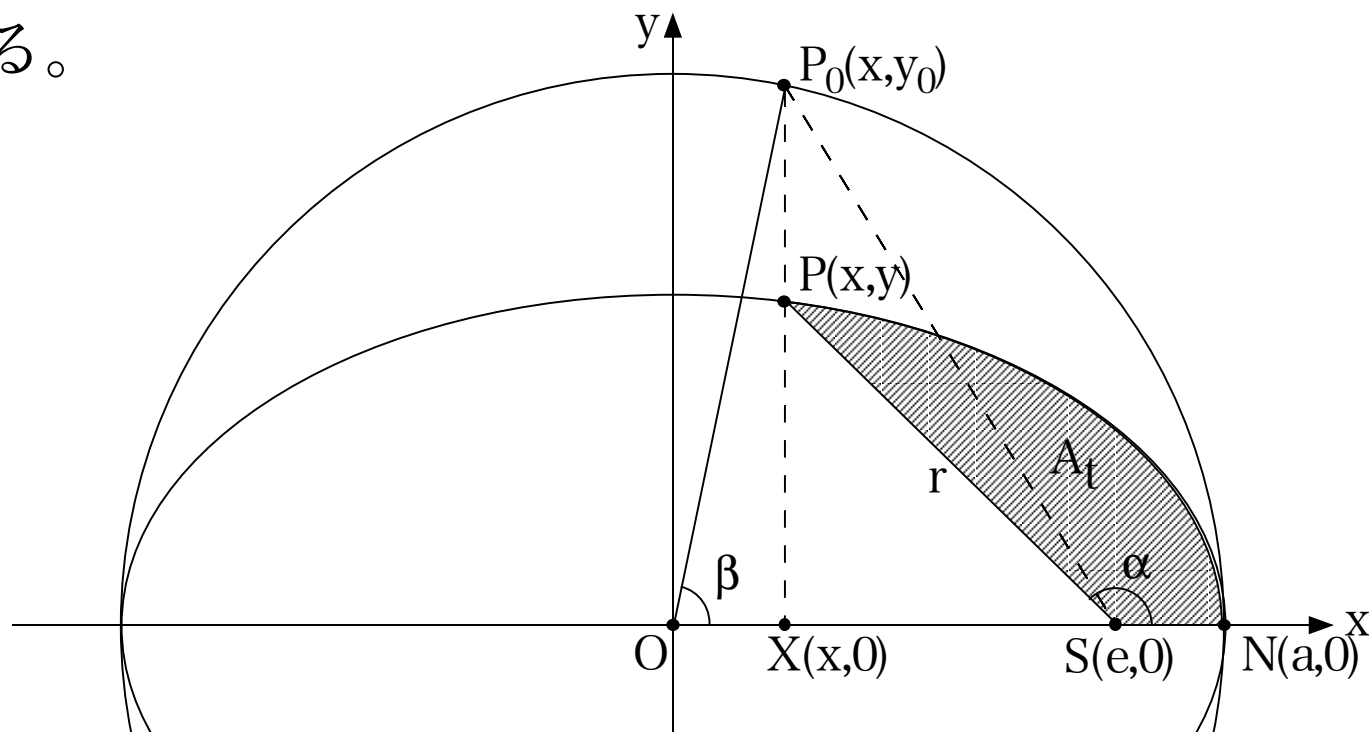
惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

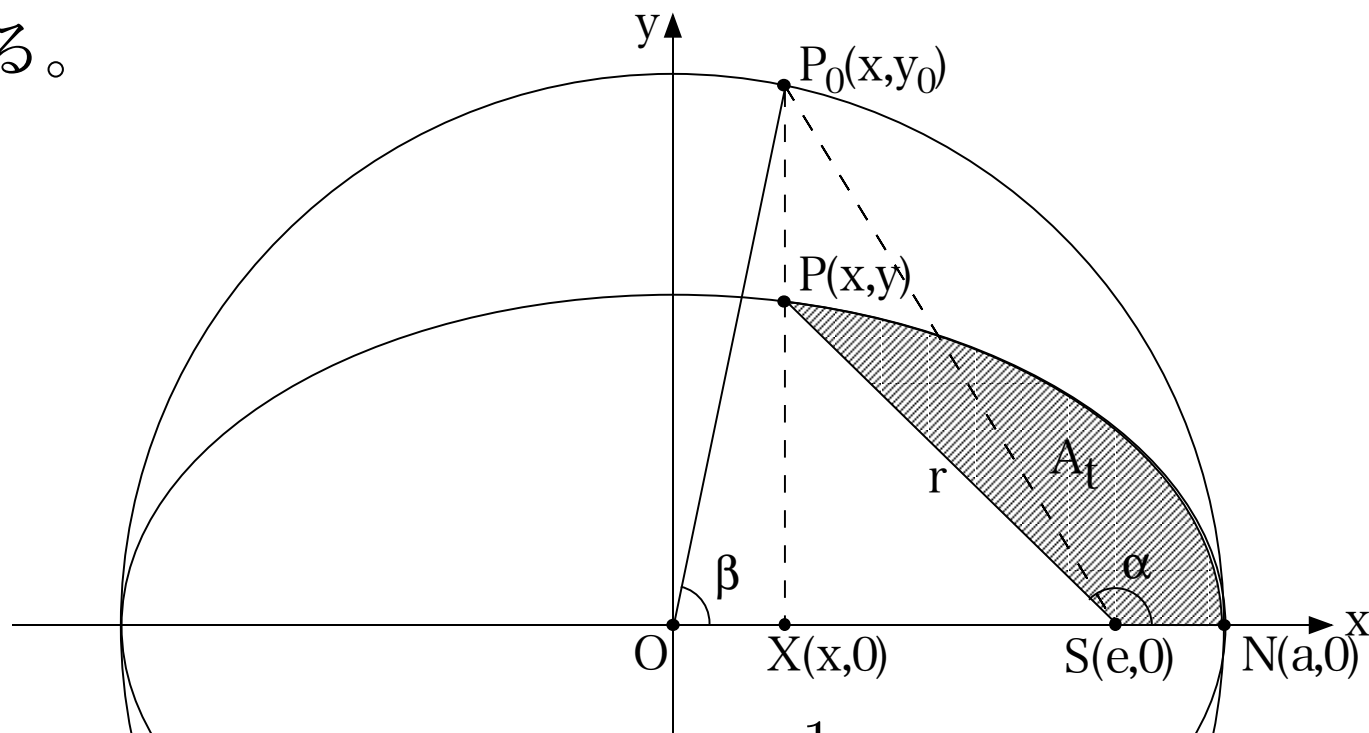
次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



$$A_t = PXN - \triangle PXS$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

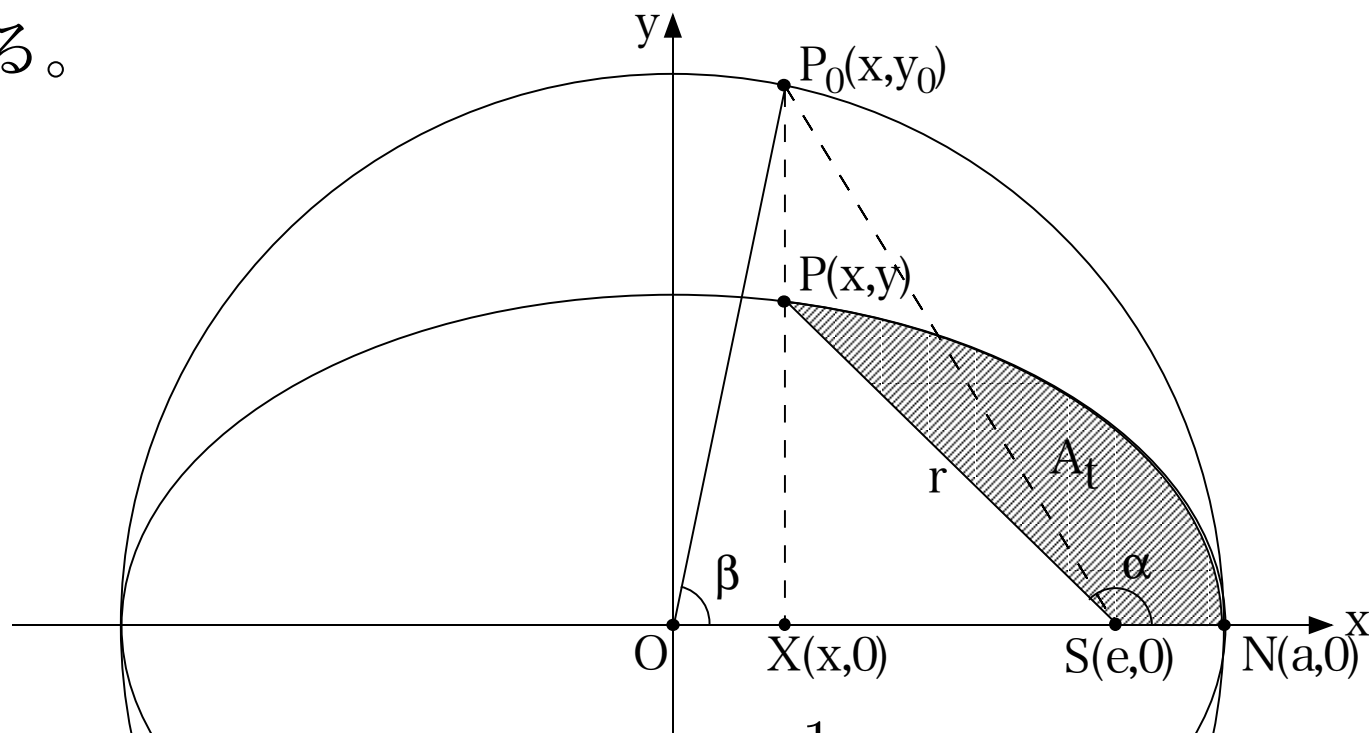
次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



$$A_t = PXN - \triangle PXS = PXN - \frac{1}{2}(e - x)y$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

次に、時刻 0 から t までの間に、線分 SP が掃く面積 A_t を考える。



$$\begin{aligned}
 A_t &= PXN - \triangle PXS = PXN - \frac{1}{2}(e - x)y \\
 &= PXN - \frac{1}{2}(e - x)b \sin \beta
 \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$P_0 X N = P_0 O N - \triangle P_0 X O$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$A_t = \left(\frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} e b \sin \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} e b \sin \beta = \frac{1}{2} \beta a b - \frac{1}{2} \varepsilon a b \sin \beta \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

外側の円を考えると、カバリエリの原理より

$$PXN = \frac{b}{a} P_0 X N$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0 X N &= P_0 O N - \triangle P_0 X O \\ &= \frac{1}{2} \beta a^2 - \frac{1}{2} x a \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{1}{2} \beta ab - \frac{1}{2} x b \sin \beta \right) - \frac{1}{2} (e - x) b \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \beta ab - \frac{1}{2} e b \sin \beta = \frac{1}{2} \beta ab - \frac{1}{2} \varepsilon ab \sin \beta \\ &= \frac{ab}{2} (\beta - \varepsilon \sin \beta) \end{aligned}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

ケプラーの法則より面積速度は一定なので、惑星の周期 T に対して $\frac{A_t}{t} = \frac{\pi ab}{T}$ が成り立つ。

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

ケプラーの法則より面積速度は一定なので、惑星の周期 T に対して $\frac{A_t}{t} = \frac{\pi ab}{T}$ が成り立つ。

従って

$$A_t = \frac{ab}{2} (\beta - \varepsilon \sin \beta) = \frac{\pi ab t}{T}$$

惑星軌道の解析 (β と t の関係式)

ケプラーの法則より面積速度は一定なので、惑星の周期 T に対して $\frac{A_t}{t} = \frac{\pi ab}{T}$ が成り立つ。

従って

$$A_t = \frac{ab}{2} (\beta - \varepsilon \sin \beta) = \frac{\pi ab t}{T}$$

これより

$$\beta - \varepsilon \sin \beta = \frac{2\pi t}{T} \quad (\text{ケプラー方程式})$$

が得られる。

逐次近似法

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_0| = |f(x_2) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_0|$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_0| = |f(x_2) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_0|$$

$$= \varepsilon |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|,$$

逐次近似法

$x = f(x)$ の形の方程式を数値的に解く方法。

仮定

$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|$ となる $0 < \varepsilon < 1$ がある。

解法

x_0 を $x = f(x)$ の解とする。適当な x_1 を最初を選び、
 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$ とすると、

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{が成り立つ。}$$

証明

$$|x_2 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|,$$

$$|x_3 - x_0| = |f(x_2) - f(x_0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_0|$$

$$= \varepsilon |f(x_1) - f(x_0)| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|,$$

$$\dots, |x_n - x_0| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|, \dots \text{より } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

$$\beta_2 = \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{2\pi t_{ve}}{T} = 1.33512,$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

$$\beta_2 = \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{2\pi t_{ve}}{T} = 1.33512, \quad \beta_3 = 1.33513, \beta_4 = 1.33513, \dots$$

惑星軌道の解析 (β を t で表す)

$\beta = \varepsilon \sin \beta + \frac{2\pi t}{T}$ を満たす $\beta = \beta(t)$ を求める。

$|\sin \phi - \sin \psi| \leq |\phi - \psi|$ が成り立つので、離心率 $\varepsilon < 1$ より逐次近似法が使える。

具体例 (地球の離心率は $\varepsilon = 0.0167$)

1994 年の一年の長さは $T = 365.2422$ 日、近日点は 1 月 2 日 5 時 55 分 (GMT)、近日点から春分点までの時間が $t_{ve} = 77.6023$ 日であった。春分点での地球の位置 (r, α) を求める。

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_{ve}}{T} = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 77.6023}{365.2422} = 1.3350 \text{ とすると、}$$

$$\beta_2 = \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{2\pi t_{ve}}{T} = 1.33512, \quad \beta_3 = 1.33513, \beta_4 = 1.33513, \dots$$

これより $\beta = 1.33513$ とすると $r = 0.9964_{[\text{AU}]}$, $\alpha = 1.3648_{[\text{rad}]}$

($1_{[\text{AU}]} = 1.495 \times 10^{11}_{[\text{m}]}$ (1 天文単位) は地球の公転軌道の長半径)